Leibniz y el *analysis situs*. Los infinitesimales como estructuras situacionales

Leibniz's analysis situs. *Infinitesimals as situational structures*

LEONARDO RUIZ-GÓMEZ
Universidad Panamericana
Facultad de Filosofía
03920 Ciudad de México (México)
leruiz@up.edu.mx

Abstract: The *analysis situs* is a geometrical project developed by Leibniz during his years in Paris. The aim of this paper is to outline the notion of "situational structure" through the main ideas of the *analysis situs*. This notion should explain the relation between this geometrical project and his metaphysics, dynamics and the infinitesimal calculus. This should shed some light on some important Leibnizian notions such as infinitesimals, *impetus* and *conatus*.

Keywords: Leibniz; *analysis situs*; calculus; infinitesimals; dynamics.

Resumen: El *analysis situs* es un proyecto geométrico desarrollado por Leibniz durante sus años en París. El objetivo del presente artículo es perfilar la noción de "estructura situacional" a partir de las ideas presentes en el *analysis situs*. Esta noción permitirá establecer vínculos claros entre esta disciplina geométrica y el cálculo infinitesimal, la metafísica y la dinámica leibniziana. Un mejor entendimiento de estos vínculos posibilitará una comprensión más profunda de nociones leibnizianas como la de infinitesimal, *impetus* y *conatus*.

Palabras clave: Leibniz; *analysis situs;* cálculo; infinitesimales; dinámica.

RECIBIDO: MARZO DE 2017 / ACEPTADO: MARZO DE 2018
DOI: 10.15581/009.52.3.003

Introducción

Gottfried Wilhelm Leibniz es célebre por varios descubrimientos matemáticos: sus trabajos pioneros en combinatoria, sus investigaciones sobre series en torno a la cuadratura del círculo y —el que probablemente más ha trascendido en la historia de la matemática— la invención del cálculo infinitesimal.

Quizá este descubrimiento y su correspondiente polémica hayan sido culpables de opacar varios otros frutos del bien ejercitado *ars inveniendi* del pensador de Hannover. Es verdad que este último descubrimiento y sus diversas aplicaciones ocuparon buena parte del trabajo leibniziano en materia matemática. Existe, sin embargo, un proyecto paralelo de cuya existencia poco se supo en su época y que el filósofo de Hannover tuvo siempre en alta estima. Este proyecto es el de la elaboración de un "análisis de la situación", esto es, un *analysis situs*.

Un proyecto siempre insipiente, el *analysis situs* pretendía instaurarse como una nueva geometría que, aun sin haber descubierto nuevos teoremas u obtenido resultados importantes, apuntaba ya a una refundación profunda del sistema euclidiano[1].

Como es habitual en el pensamiento de Leibniz, esta disciplina poseía desde su nacimiento estrechos lazos con muchos otros ámbitos de su sistema. En este sentido, el *analysis situs* no sólo pretendía ser una reelaboración profunda de los fundamentos de la geometría y de la característica geométrica; sino que sus implicaciones metafísicas y metodológicas también influyeron en la elaboración de su teoría del espacio y en la constitución de la ciencia dinámica.

El objetivo del presente artículo es mostrar la relación que guarda el *analysis situs* con algunos ámbitos fundamentales del sistema leibniziano: en concreto, la geometría o análisis infinitesimal, la metafísica y la dinámica. En primer lugar, realizaré un breve esbozo sobre los principios conceptuales en los que se fundamenta el *analysis situs*. En segundo lugar, expondré algunos elementos que se pueden encontrar en el *analysis situs* que pueden fungir como funda-

---

1. Cf. J. Echeverría, *Introducción*, en G. W. Leibniz, *La caracteristique géométrique* (Vrin, Paris, 1995) 15 ss.

mento del cálculo infinitesimal. Esta fundamentación del cálculo fue un tema en el que Leibniz fue especialmente elusivo pero que puede recibir una nueva luz desde la perspectiva del análisis de situación. Para ello será necesario apelar a la noción de infinitesimal y perfilar una comprensión del mismo como estructura situacional. En tercer lugar mostraré cómo, a partir de esta misma noción, está vinculado el *analysis infinitesimal* a la metafísica monadológica. Finalmente, mostraré una aplicación del *analysis situs* en sede dinámica; en concreto, en la comprensión de dos elementos infinitesimales de la dinámica leibniziana: el *conatus* y el *impetus*.

Este breve bosquejo pretende abrir así nuevas coordenadas para reinterpretar la filosofía leibniziana como sistema y, a la vez, colocar al *analysis situs* en un lugar privilegiado en la comprensión del pensamiento del sabio de Hannover.

EL *ANALYSIS SITUS*

Leibniz incluye la noción de *situs* ya en el *Ars combinatoria*[2] como un elemento de orden entre los conceptos según cierta anterioridad o posterioridad lógica; sin embargo, la aparición del concepto de una "geometría del *situs*", esto es, de un esfuerzo de aplicación del *situs* exclusivamente a la extensión, no aparecerá sino hasta 1671 en un fragmento intitulado *Elementa de Mente et Corpore*, en el que se puede ver por primera vez una intención clara de modificar el objeto de la Geometría[3]: "La Geometría debe ser escrita sin movimiento,

2. *Dissertatio de arte combinatoria*, A VI, 1, 172 / OFC VIIB, 547, ss. [Las obras de Leibniz se citan bajo las ediciones habituales si no se señala lo contrario: A= *Sämtliche Schriften und Briefe* (Akademie Verlag, Berlin, 1999); D= *Opera Omnia (ed. Ludovici Dutens)* (Olms, Hildesheim, 1989); G= *Die Philosophischen Schriften (ed. C.J. Gerhardt)* (Olms, Hildesheim, 1965); GM= *Mathematische Schriften (ed. C.J. Gerhardt)* (Olms, Hildesheim, 1971); Grua= *Textes inédits (ed. G.Grua)* (Presses Univ. de France, Paris, 1948); C= *Opuscules et fragments inédits (L. Couturat)* (Alcan, Paris, 1903); K= *Die Werke Von Leibniz (ed. O. Klopp)* (Olms, Hildesheim, 1973)]. Cuando sea posible, señalaré la paginación de los textos leibnizianos en la edición (actualmente en desarrollo) de OFC= *Obras filosóficas y científicas* (Comares, Granada, 2007-). Utilizaré, siempre que sea posible, las traducciones de esta edición; si no se hace referencia a ésta, la traducción es mía.
3. Sigo de cerca la cronología propuesta por V. DE RISI, *Geometry and Monadology*.

sólo situación, lugar o distancia. La recta es, en efecto, la situación de un punto a [otro] punto”[4].

Aunque Leibniz rectificará bastante pronto la idea de que la Geometría puede prescindir absolutamente del movimiento, se ve ya aquí una intención de colocar a la situación en el foco central de la geometría. Este intento, todavía preliminar, de establecer un nuevo análisis geométrico se verá poco a poco refinado con la llegada de Leibniz a París donde, de la mano de Huygens y Oldenburg, nuestro pensador se hará de herramientas matemáticas mucho más sofisticadas que aquéllas que aprendió autodidactamente en Hannover[5]. Ahí, Leibniz absorberá lo mejor de las matemáticas francesas e inglesas de cada uno de estos pensadores.

Es bien sabido que esta explosión intelectual del joven Leibniz desencadenó, en sede matemática, el origen del análisis infinitesimal. Sin embargo, paralelo a este trabajo que lo llevó a la fama, Leibniz mantenía oculto el proyecto de una nueva geometría que pretendía distanciarse, por una parte, del carácter sintético de la geometría euclidiana y, por otra parte, de la relación arbitraria entre las figuras geométricas y las expresiones algebraicas que constituían a la geometría analítica cartesiana.

No fue sino hasta 1675 cuando Leibniz se mostró seguro en sus escritos respecto a los cimientos de lo que será su análisis de situación. Es entonces cuando compartió por primera vez las ideas básicas de su proyecto. El depositario de esta confianza fue nada menos que su mentor matemático y amigo, Christian Huygens. En el anexo a una carta de apenas un par de folios, Leibniz trata de convencer a su maestro de las ventajas de su proyecto:

Leibniz's Analysis Situs *and Philosophy of Space* (Birkhäuser, Basel, 2007) 45. Todavía es poco el trabajo que se ha realizado en la literatura secundaria entorno al *analysis situs*. Sobresale de manera muy notable este libro de De Risi y algunos otros textos suyos: *Leibniz's* analysis situs *and the localization of monads*, en *Natur und Subjekt I* (Leibniz-Gesellschaft, Hannover, 2011) 208-216. Probablemente el primer académico en atender a este proyecto geométrico haya sido Javier Echeverría en su edición antes citada.

4. *Elementa de mente et corpore*, A VI, 2, 282.
5. Cf. J. Hofmann, *Leibniz in Paris (1672-1676). His Growth to mathematical maturity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

> Yo he encontrado algunos elementos de una nueva característica en todo diferente al Álgebra y que traerá grandes ventajas para representar al espíritu, exactamente y al natural, aunque sin figuras, todo lo que depende de la imaginación. El Álgebra no es otra cosa que la característica de los números indeterminados, o de las cantidades. Pero ella no expresa directamente la situación, los ángulos y el movimiento. De donde se sigue que es generalmente difícil de introducir en el cálculo las condiciones de la figura, y es entonces más difícil de encontrar demostraciones y construcciones geométricas bastante cómodas, aun cuando se haya completado el cálculo del Álgebra. Pero esta nueva característica, sin perder de vista las figuras, no fallará al dar, al mismo tiempo, la solución, la construcción y la demostración geométrica, todo de una manera natural. Y por un análisis, es decir, por vías determinadas[6].

Salta a la vista que las ventajas que el mismo Leibniz atribuye a su sistema no tienen que ver con el descubrimiento de teoremas que fueran inaccesibles para la geometría euclidiana o analítica. Por una parte, a Leibniz le molesta de la geometría analítica la aplicación que hace de una característica (conjunto de caracteres) inadecuada al objeto de la geometría: se emplea el modelo propio de las cantidades (el álgebra) para aplicarlo a objetos cuya naturaleza implica más que la simple cantidad. El requerimiento de un "plano cartesiano" en la geometría analítica es un símbolo patente de esta "deficiencia". El plano cartesiano es precisamente la herramienta que traduce los otros elementos propiamente geométricos (situación, ángulos y movimiento) en términos de magnitudes. Pero Leibniz no busca una característica que exprese estas relaciones mediatamente, sino de un modo claro y patente.

A modo de paréntesis, vale la pena hacer ver que Newton encontraba los mismos reparos en relación a los fundamentos de la Geometría Analítica. Ésta no era una inquietud exclusiva del filósofo de Hannover y, aunque ambos pensadores establecieron los

6. Leibniz a Huygens, 8 de septiembre de 1679, A III, 2, 851-852.

algoritmos del cálculo a partir del análisis geométrico cartesiano, ambos también verán con reparos esta aplicación de lo algebraico a lo geométrico. El mismo Newton afirma:

> Después de que se haya encontrado el área de una curva, debe ponerse atención en la demostración de la construcción que no tenga, en la medida de lo posible, cálculos algebraicos; de modo que el Teorema sea adornado para ser digno del conocimiento público[7].

Este "adornamiento" hace referencia a la posibilidad de aportar una solución constructiva a un problema, una vez encontrada una curva bajo un cierto análisis (infinitesimal o geométrico). El rechazo de Newton a la expresión algebraica de la geometría hace eco del reproche leibniziano de la poca elegancia existente entre el método geométrico y la característica aplicada a tal método. Divergen ambas posturas, sin embargo, en que Newton tributa respeto a la geometría sintética y la demostración por construcción, típicamente antiguas. Leibniz, al contrario, considera dudosa la fundamentación de un método que se apoya demasiado en la imaginación, como es, a su juicio, el método por construcción. Así, el filósofo de Hannover dirá, por ejemplo, respecto a su propio cálculo infinitesimal:

> Lo que hay de mejor y más cómodo en mi nuevo cálculo es que ofrece las verdades por una especie de análisis, y sin esfuerzo alguno de la imaginación, que a menudo tiene éxito sólo por azar, y nos da sobre Arquímides todas las ventajas que Viete y Descartes nos habían dado sobre Apolonio[8].

Este reparo frente al uso de la imaginación en las demostraciones geométricas tiene, por parte de Leibniz, un asentado fundamento epistemológico. Baste, por lo pronto, subrayar el hecho de que Lei-

7. I. NEWTON, *De methodis serierum et fluxionum* en *Mathematical Papers of Isaac Newton* III (Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1976) 278.
8. Leibniz a Huygens, 11[21] de septiembre de 1691, A III, 5, 172-173.

bniz critica, por una parte, a la geometría analítica por utilizar una característica arbitraria, cuyo objeto no se identifica con aquello que representa. Por otra parte, critica a la geometría euclidiana por tener una elevada dependencia de la imaginación en el proceso de demostración.

Vale la pena poner un ejemplo particular de cómo funciona el *analysis situs*. Utilizaré el mismo ejemplo con el que Leibniz intentó convencer de su proyecto a Huygens[9].

Los puntos son representados por letras acompañadas por un punto: "*A.*". Por las primeras letras del alfabeto se representan los puntos dados (constantes); por las últimas los puntos requeridos (variables). La noción básica que utiliza Leibniz en su análisis (al menos, en este punto del desarrollo de su característica) es la de congruencia.

Así, un segmento será representado por dos puntos *A.B.*; y dos segmentos congruentes por el signo infinito (o a veces por el signo de proporcionalidad): A.B. ∞ C.D.

Se podría caracterizar a una esfera del siguiente modo: A.B. ∞ A.Y. Esto es, dados dos puntos A. y B., se demandan todos los puntos Y. que tengan con A. una situación congruente con A.B. Todos los puntos Y describirán entonces una esfera de radio A.B. con centro en A.

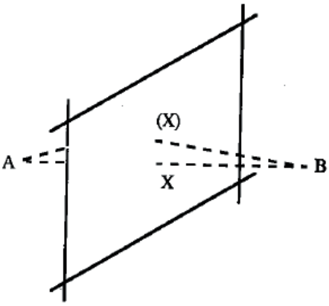
Igualmente se puede caracterizar el plano del siguiente modo A.X. ∞ B.X. Esto es, el plano es el lugar de todos los puntos X. que guardan una relación con A. congruente con la relación que tienen con B.

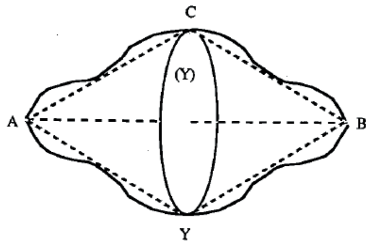
La circunferencia será el lugar de todos los Y., tal que A.B.C. ∞ A.B.Y.

Ahora analicemos la demostración del siguiente teorema: *La intersección de la esfera y el plano es una circunferencia*.

---

9. Cf. Leibniz a Huygens, A III, 2, 851-860.





1. $AC \infty AY$	Definición de la esfera
2. $AY \infty BY$	Definición del plano
3. $AC \infty BY$	Transitoriedad 1, 2
4. $AC \infty BC$	Porque C pertenece a Y (por hipótesis)
5. $BC \infty AY$	Transitoriedad 1, 4
6. $BC \infty BY$	Transitoriedad 2, 5
7. $AB \infty BA$	Conmutabilidad
8. $ABC \infty ABY$	1, 6, 7

El lugar de todos los puntos Y que pasan por el punto C y que tienen una relación congruente con A y B es, precisamente, una circunferencia[10].

Vemos que, intuitivamente, se trata de un triángulo que tiene un vértice en el centro de la esfera (A), otro en el punto de intersección entre el plano y la esfera (C). El triángulo "gira" sobre uno de sus catetos describiendo la circunferencia que engloba en este caso los puntos (Y). El análisis se puede representar en la imaginación, pero lo relevante es que no depende de la representación misma; ni en su validez, ni en su demostración.

Es difícil medir con un teorema tan sencillo los alcances del método leibniziano. Desafortunadamente Leibniz no abundó tanto en la aplicación de su sistema a la resolución de problemas particulares como sí lo hizo en la reformulación y reelaboración de los principios y definiciones del mismo. Las definiciones de congruen-

10. G.W. LEIBNIZ, *De quadratura arithmetica* cit., 262.

cia, semejanza, homogonía, variarán constantemente en los textos leibnizianos y también la jerarquización entre estas relaciones. No puedo entrar ahora mismo en el análisis de estos elementos[11], sin embargo, quisiera analizar una particularidad del ejemplo que acabo de mencionar.

Nótese que el caso extremo del ejemplo anterior es aquél en el que el plano que corta a la esfera es tangente a ésta. En ese caso, se diría más bien que el área de intersección es un punto y no un plano. Sin embargo, el desarrollo leibniziano mantiene su validez en la medida en que C se identifica con Y, y la relación $ABC \infty ABY$ se preserva. Esta verdad, que es a todas luces trivial, jugará un papel importante; no tanto por su resultado (la definición de tangente bastaba para comprender que la esfera y el plano se tocaban en un solo punto), sino por la continuidad de la aplicación de la ley en el caso extremo del problema. El paso del plano secante al plano tangente no rompe el teorema: el área de contacto entre una esfera de radio AC y un plano tangente que pasa por C es la región de puntos Y, tal que $ABC \infty ABY$.

Lo interesante en este punto es precisamente que Leibniz ha llevado a la geometría de ser una *ciencia de la magnitud* a ser una *ciencia de la situación*. En efecto, lo que denota la expresión $ABC \infty ABY$ no es una relación entre magnitudes, sino una estructura de un conjunto de puntos (Y) definida por los puntos A y B. Así, una estructura de este tipo —a la que llamaré *estructura situacional*— es precisamente un conjunto de relaciones de situación no determinadas por consideraciones de magnitud. Esta estructura posee la ventaja operacional de que se preserva incluso en los casos límite, lo cual no sucedía en la geometría tradicional. En efecto, antes veíamos que el teorema "La intersección de la esfera y el plano es una circunferencia" perdía validez cuando el plano se convertía en tangente, en cuyo caso la intersección se convertía en un punto. Con el *analysis situs*, aunque se podría admitir que la circunferencia se convierte en punto cuando el plano secante se vuelve tangente, hay una estructura situacional que permanece incluso en

11. Para una descripción detallada de las relaciones de los tipos de relaciones situacionales, cf. V. De Risi, *Geometry and Monadology*, *op. cit.*, 132 ss.

ese caso, y es la definición que tiene la intersección entre la esfera y el plano tangente y el plano secante.

Esto posee particular relevancia porque mantiene a la geometría en conformidad con la ley de continuidad, famosamente expresada bajo la expresión "la naturaleza no da saltos"[12]. Es bien sabido que esta ley representa no sólo una convicción leibniziana, sino una directriz de toda su filosofía y uno de los temas a los que el sabio alemán dedicó más energía. Otra formulación de la ley de continuidad puede ser más útil para comprender el rédito que tiene el *analysis situs* en esta dirección: "En las cosas continuas, el límite externo puede ser tratado como si fuera interno, de tal manera que el último caso, incluso si se supone de naturaleza completamente diferente, cae bajo la ley general de los otros [casos]"[13]. A Leibniz le parecería absurdo que en la consecución de un movimiento continuo se tuvieran resultados discontinuos; que se pasara de la igualdad a la desigualdad en un simple cambio infinitesimal[14]. En el caso particular del teorema descrito con anterioridad, sería absurdo que el movimiento continuo del plano arrojara, en un "instante", una intersección de determinada naturaleza (una circunferencia), y en el siguiente "instante", una naturaleza completamente distinta (el punto). Si se toma en cuenta exclusivamente la estructura situacional, no se da este "salto" que violaría la ley de continuidad, sino que la descripción de la intersección permanecería inmutable incluso en el caso límite.

12. "Ningún cambio se produce por medio de un salto". *Specimen Dynamicum* II, GM VI, 248 / OFC VIII, 434.
13. *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium*…, GM V, 385. Otra formulación interesante es la siguiente: "La igualdad puede ser considerada como una desigualdad infinitamente pequeña". *Lettre de M. L. sur un principe generàle utile*, G VII, 53.
14. Un famoso ejemplo de esta convicción leibniziana la podemos encontrar en la crítica que hace en contra de las leyes cartesianas del choque. Leibniz denunciaba que, siguiendo las reglas cartesianas del movimiento (R. DESCARTES, *Principes* II, §49, AT IX, 90), se concluía que una modificación infinitesimal en las dimensiones de los cuerpos podría generar escenarios completamente diversos después de la colisión; esto violaría, según Leibniz, la ley de continuidad. Cf. *Specimen Dynamicum* II, GM VI, 247-248 / OFC VIII, 433-434.

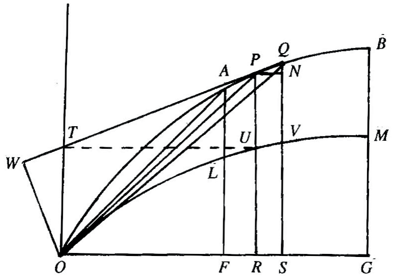
EL *ANALYSIS SITUS* COMO FUNDAMENTACIÓN DEL CÁLCULO

Es bien sabido que la aplicación de los algoritmos del cálculo infinitesimal a una gran variedad de problemas fue bastante más acelerada que los empeños de la comunidad científica por hacer una fundamentación rigurosa del nuevo método[15]. Los principios del cálculo remitían demasiado a los métodos de aproximación de Arquímedes y al método de los indivisibles de Cavalieri que siempre habían sido vistos con sospecha respecto a su validez matemática. Sin embargo, una vez publicados por Leibniz en 1684[16], se comenzó la elaboración de un *corpus* de teoremas, problemas y soluciones en torno a este nuevo método (gracias al trabajo del mismo Leibniz, Newton, los hermanos Bernoulli y del Marqués de L'Hôpital).

Leibniz, por su parte, fue ambiguo respecto a la fundamentación y validez de su propio cálculo. Solía hablar de los infinitésimos (que podrían considerarse como el concepto base de su método) como de unos "fenómenos útiles"[17] a los que llega a comparar incluso con los números imaginarios. Aunque es habitual que se relacione directamente al cálculo con la teoría leibniziana de las mónadas, varias cartas privadas de Leibniz hacen ver que él no daba ningún crédito metafísico a los infinitesimales[18]. Lejos de esto, la ontología leibniziana impedía hablar de cantidades últimas, en cierto modo

15. Para la historia de la fundamentación del cálculo, cf. N. BOURBAKI, *Elementos de historia de las matemáticas* (Alianza, Madrid, 1976) 228-229.
16. Los textos que incluyen los algoritmos del cálculo son: *Nova methodus pro maximis et minimis*, GM V, 220-226 / OFC VIIA, 312-329; *De geometria recondita*, GM V, 226-233 / OFC VIIA 321-329.
17. "Cuando disputaron en Francia con el Abate Gallois, el Padre Gouge y otros, yo les manifesté que no creía en absoluto que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales, que no eran más que ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y para hablar universalmente, como las raíces imaginarias en el álgebra, tales como $\sqrt{-1}$ ". Leibniz a Dangicourt, septiembre de 1716, D III, 500 / OFC VIIB, 411.
18. "A decir verdad, yo mismo no estoy convencido que sea necesario considerar nuestros infinitos y las cantidades infinitamente pequeñas de otra manera que como cosas ideales o como ficciones bien fundadas". Leibniz a Varignon, 20 de junio de 1702, GM IV, 110. También cf. Leibniz a Varignon, 2 de febrero de 1702, GM IV, 91; Leibniz a Varignon, 14 de abril de 1702, GM IV, 98; Leibniz a Bernoulli, 19 de julio de 1698, GM III, 524 / OFC, XVIA, 480-481.

atómicas, que no fueran resolubles en otras menores[19]. Es evidente que una ontología de los infinitesimales no era para Leibniz una vía plausible para fundamentar el nuevo cálculo[20].



Horváth Miklós apunta que hay dos preguntas fundamentales a la hora de hacer un juicio sobre la fundamentación de un método como el cálculo[21]: en primer lugar, la pregunta de si un concepto incluye o no algo que es objetivamente existente; en segundo lugar, la de si la aplicación de este concepto está bien fundamentada en el ámbito matemático. La primera pregunta parece ser respondida negativamente por Leibniz, tal como se ha explicado: los infinitesimales no poseen para Leibniz un correlato ontológico. Respecto a la segunda pregunta, Leibniz realiza varios esfuerzos para justificar su método en sede matemática. Un intento importante es el que se observa en el *De quadratura arithmetica*[22]. Ahí, Leibniz intenta hacer

19. Los lugares en donde Leibniz establece esto son muy abundantes: *Monadologie*, §65, G VI, 618 / OFC II, 337-338; *Demonstratio contra Atomos*, G VII, 284-288 / OFC VIII, 268-272; *Specimen Dynamicum* II, GM VI, 248 / OFC VIII, 435; *Double infinité chez Pascal et monade*, Grua, 554 / OFC II, 274.
20. Resulta curioso que Newton —quien en más de alguna ocasión criticó el uso de infinitesimales en el cálculo leibniziano— sí quiera dar credenciales metafísicas a su contraparte de los infinitésimos: las cantidades evanescentes. Para ello basta analizar los argumentos de fundamentación aportados en los *Principia* y en el mismo *De quadratura curvarum*: "Las líneas no son descritas por aposición de partes, sino por un movimiento continuo de puntos, y generadas al serlo; las superficies lo son por movimientos de líneas; por movimientos de superficies los sólidos; los ángulos, por rotación de lados; el tiempo por el fluir continuo, y así lo demás. *Tal génesis tiene verdaderamente lugar en las cosas de la naturaleza y a diario es discernible en el movimiento de los cuerpos*". *De quadratura curvarum*, OE I, 333. Las itálicas son mías.
21. Cf. H. MIKLÓS, *On the Attempts made by Leibniz to Justify his Calculus*, "Studia Leibniziana" 18 (1986) 65.
22. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyerpbolae*, (Vrin, Paris, 1993/OFC VIIA) 108-241. Una explicación didáctica de este teorema se encuentra en D. BERTOLONI-MELI, *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz* (Oxford University Press, Oxford, 1993) 60.

una reconciliación entre las magnitudes finitas y las infinitamente pequeñas a través de su teorema de la transmutación y del triángulo característico.

Leibniz imagina una curva segmentada por varios rectángulos que la imitan[23]. El triángulo característico PQN estará formado entonces por un lado de uno de estos rectángulo y la línea tangente a la curva OAB. Leibniz extrae distintas semejanzas, por ejemplo,

$$OWT \approx PQN$$
$$TO : WO :: PN : PQ$$
$$WO \cdot PQ = TO \cdot PN$$
$$\Delta \mathrm{OPQ} = \frac{WO \cdot PQ}{2}$$
$$\Delta \mathrm{OPQ} = \frac{TO \cdot PN}{2}$$
$$\Delta \mathrm{OPQ} = \frac{\square\, UVSR}{2}$$

Si se repite la operación con varios rectángulos y varios triángulos, se puede obtener la curva OLM que está en relación doble con el área descrita por los triángulos. Esto representa un primer paso apenas hacia la posibilidad de integrar la curva. Me basta, sin embargo, con hacer notar que la adquisición de la curva secundaria OLM supone desde luego una reducción infinitesimal de los triángulos y los rectángulos. En ese sentido, la operación implica ya la comparación entre elementos finitos y otros inconmensurables. ¿Cómo es posible esa comparación? Ahí radica, precisamente, el problema de la justificación del cálculo.

Ahora bien, como vimos en la sección anterior, Leibniz cuenta con la posibilidad de llevar sus cálculos hasta el extremo de la inconmensurabilidad porque están fundamentados en una relación de

23. El esquema aquí mostrado es una versión más simple que el que se encuentra en *De quadratura arithmetica*. Se puede encontrar en *Historia et origo calculi differentialis*, GM V, 401 / OFC VIIA, 396. La imagen se ha tomado de D. Bertoloni-Meli, *Equivalence and Priority* cit., 60.

semejanza que no varía con el cambio de magnitud. El triángulo característico no se convierte en un punto, sino en un triángulo infinitesimal o, mejor aún, en una *estructura de situación*.

Leibniz, sin el *analysis situs* suficientemente maduro, realizará malabares en el *De quadratura arithmetica* para justificar este paso de lo finito a lo infinitésimo. Recurrirá a una simple formulación que le permitirá salir al paso del problema: la diferencia entre la figura formada por los rectángulos y el área bajo la curva puede hacerse tan pequeña como se quiera. Este error será "menor que cualquier error asignable"[24], dice Leibniz. Esta solución puede parecer poco satisfactoria en la medida en que deja abierta la existencia de esa discrepancia infinitesimal, y que no da una justificación matemática de por qué el área del triángulo característico se considera a veces cero y a veces como una magnitud finita.

Considérese ahora el ejemplo de la sección anterior: ahí se mostró cómo una estructura situacional (aquélla que conformaba la circunferencia en la esfera) se preservaba incluso en el caso límite (cuando la esfera y el plano eran tangentes). Análogamente, podemos pensar en el triángulo característico como una estructura de situación que —incluso en el límite infinitesimal— preserva sus propiedades. Esto permite comprender por qué el triángulo característico no se reduce a un punto, ni el diferencial de equis se reduce sin más a cero (lo que invalidaría la división entre *dx*; problema que encontraba Femat, por ejemplo, en su método para encontrar tangentes[25]). El infinitésimo es un elemento de magnitud despreciable pero que no se reduce a la nada, sino que preserva una estructura, que, con afinidad a la ley de continuidad leibniziana, no puede desvanecerse en un cambio continuo. Como se había dicho, la ley de continuidad tan apreciada por Leibniz nos impide pensar en una estructura que, en un simple cambio gradual, pierda sus propiedades (de semejanza o congruencia, por ejemplo). En el caso propuesto, se impide que el triángulo característico deje de ser semejante al trián-

24. "Minor quovis errore assignabili", *Quadrature arithmétique*, 33 / OFC VIIA, 119.
25. El método de Fermat es descrito en A. SABRA, *Theories of light. From Descartes to Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981) 144.

gulo normal sólo por haber modificado su tamaño. Un triángulo infinitesimal no se convierte en un punto, sino que permanece siendo un triángulo con las propiedades situacionales que ello implica.

Ciertamente, Leibniz no posee un sistema matemático suficientemente robusto para dar una justificación rigurosa del cálculo (y eso no será posible sino hasta los trabajos de Euler). No obstante, la aplicación de los conceptos maduros del posterior *analysis situs* a los teoremas del cálculo permiten comprender con mayor claridad la intuición que ya poseía Leibniz desde su etapa parisina.

La fundamentación metafísica del *analysis situs*

Como se ha dicho, Leibniz niega la existencia real de los infinitesimales, si por ellos se entienden elementos mínimos indivisibles cuya magnitud es reductible a cero. Pero la comprensión de los infinitesimales como estructuras de situación sí encuentra en la metafísica leibniziana un amplio espectro de consecuencias y matices.

Como se sabe, la ontología leibniziana está constituida por una pluralidad de sustancias individuales o mónadas. Estas mónadas representan el universo entero —afirma Leibniz— desde un punto de vista particular[26]. Este punto de vista es el *situs* de la mónada[27]. Pero no se debe entender por ello que Leibniz supone un espacio en el que se ubican las mónadas. Al contrario, Leibniz afirma en numerosas ocasiones que las mónadas ni poseen extensión, ni se encuentran ubicadas en el espacio[28]. Más bien, el espacio leibniziano es generado a partir de la combinatoria infinita de puntos de vista de las mónadas.

---

26. Cf. *Monadologie*, §57, G VI, 616 / OFC II, 336.
27. Cf. Leibniz a Des Bosses, 21 de julio de 1707, G II, 339 / OFC XIV, 220.
28. El espacio no se compone de mónadas: Cf. Leibniz a Des Bosses, 21 de junio de 1707, G II, 336 / OFC XIV, 216. Las mónadas no son modificaciones del espacio, es decir, no son puntos: cf. Leibniz a Des Bosses, 31 de julio de 1709, G II, 378-379 / OFC XIV, 278; Leibniz a Des Bosses, 24 de abril de 1709, G II, 371 / OFC XIV, 268; *Je Vous suis obligé*, G VI, 627 / OFC II, 356-357; *Discussion avec Gabriel Wagner*, Grua, 399 / OFC II, 300. Las mónadas no son extensas: cf. Leibniz a Des Bosses, 24 de abril de 1709, G II, 372 / OFC XIV, 269; *Discussion avec Gabriel Wagner*, Grua, 391 /OFC II, 290; *Monadologie*, §3, G VI, 607 / OFC II, 328. Tampoco tienen un lugar: cf. Leibniz a Des Bosses, 16 de junio de 1712, G II, 451 / OFC XIV, 377.

De este modo, las relaciones de situación entre las mónadas no son propiedades espaciales (pues en el ámbito monádico no hay espacio). Se trata, más bien, de relaciones metafísicas que fundamentan a las propiedades espaciales en los fenómenos. El espacio es, pues, ontológicamente posterior a las mónadas y al *situs* monádico.

El *situs* es el fundamento monádico del espacio. Cuando una mónada percibe a otras mónadas con un distinto grado de determinación, percibe el *situs* de cada una de ellas integrado en un cierto orden (el "orden de coexistencia", dirá Leibniz). La abstracción que se hace de este orden particular y concreto de los *situs* determinados de cada mónada constituye el espacio absoluto, que Leibniz define como el *locus locorum*[29]. Este espacio es ideal, innato, abstracto y continuo, y es precisamente el objeto propio de la geometría[30].

Como este espacio absoluto es una abstracción del *situs* de las mónadas, la geometría que lo estudia debe ser precisamente un *analysis situs*. Un análisis de la situación de toda mónada posible, abstrayendo (esto es, eliminando, haciendo a un lado) las características particulares de cada una de estas mónadas. Lo importante aquí es que las mónadas no son puntos, sino estructuras de expresión *con* situación. En consecuencia, la geometría que se ocupa del espacio que resulta de esta red expresiva que suponen las mónadas, es una geometría que no se ocupará de conjuntos de puntos, sino de relaciones de situación.

Quisiera hacer hincapié en el carácter continuo del espacio. Que el espacio sea continuo implica que en él no existen saltos o, como Leibniz prefiere decirlo, que dados dos puntos cualesquiera (no importa lo próximos que se encuentren) siempre se encontrará otro punto entre ellos dos[31]. Esto mismo es lo que Leibniz quiere

---

29. Cf. Leibniz a Clarke, L.V.47, G VII, 400-401 / OFC XVIII, 278; "El *Espacio* es el lugar de todos los puntos". *Définitions géométriques*, C, 540; "*Espacio absoluto* es el lugar pleno o el lugar de todos los lugares", *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, GM VII, 21.
30. Para una reconstrucción pausada de los diferentes sentidos y tipos de espacio presentes en el pensamiento leibniziano, cf. L. RUIZ-GÓMEZ, *El concepto leibniziano de espacio. La polémica con Clarke y el newtonianismo* (Eunsa, Pamplona, 2014) cap. 4.
31. Cf. Leibniz a De Volder, 30 de junio de 1704, G II, 268 / OFC XVIB, 1222; Leibniz a De Volder, 19 de enero de 1706, G II, 281-282 / OFC XVIB, 1242;

decir cuando afirma que toda la materia del universo está dividida actualmente al infinito y que no hay, por lo tanto, salto alguno en la naturaleza. No hay partícula mínima ni átomo. Es por eso que el infinitesimal, entendido como unidad mínima despreciable, no tiene fundamento ni en la naturaleza ni en el espacio abstracto; porque ni la materia ni el espacio están conformados por una combinatoria infinita de puntos (como quería Newton[32]), sino por una combinatoria infinita de relaciones de situación. Y estas relaciones se preservan independientemente de la escala que se tome en consideración. La ley de continuidad que rige tanto en metafísica como en geometría es el suelo común que permite que el espacio, comprendido como una combinatoria ideal de todas las estructuras de situación posibles, constituya la verdadera fundamentación metafísica del *analysis situs*.

Vicenzo de Risi ha mostrado contundentemente cómo el desarrollo leibniziano de esta metafísica del espacio está cronológicamente ligada al desarrollo del *analysis situs* y cómo algunas nociones de éste migraron a los temas más ontológicos del filósofo de Hannover[33]. A mi parecer, resulta muy relevante observar también —aunque en la dirección opuesta— la fundamentación metafísica que permite que el *analysis situs* tenga tal relevancia epistemológica. Si el análisis de situación es válido es porque, por una parte, tanto en el corazón de la metafísica monadológica como en la geometría situacional yace la ley de continuidad y, por otra parte, porque lo que distingue a las mónadas es precisamente una relación situacional. Esta relación situacional es el fundamento metafísico de su contraparte abstracta: el *situs* que estudiará la nueva geometría que propone Leibniz.

Leibniz a Des Bosses, 29 de mayo de 1716, G II, 515 / OFC XIV, 460; Leibniz a Sophie, 31 de octubre de 1705, K IX, 152.

32. Cf. I. NEWTON, *De gravitatione*, en R. HALL, M. Boas HALL (eds.), *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1962) 100.
33. Cf. V. DE RISI, *Geometry and Monadology*, *op. cit.*, cap. I.

La dinámica como una aplicación metafísico-geométrica

Otra ciencia de la que Leibniz reclamaba paternidad es la dinámica. Es célebre la fórmula de la fuerza leibniziana, mv^2, que sería interpretada posteriormente en términos de energía cinética. Es bien sabido también que el cálculo infinitesimal fue de gran ayuda para el sabio alemán al momento de establecer los principios de esta nueva ciencia.

Dos elementos de muy difícil comprensión dentro de la dinámica leibniziana son el de *impetus* y el de *conatus*. La complicación radica en que se trata de dos elementos infinitesimales en el que uno representa la integración de otro. El carácter infinitesimal de estos elementos no es baladí, pues estamos en el ámbito de la fuerza, un registro metafísico distinto al del simple movimiento y la cinemática. La dinámica, que estudia las causas del movimiento, se encuentra en el ámbito de lo fenoménicamente inconmensurable y, por esa razón —afirma Leibniz—, las fuerzas son imperceptibles[34]. El movimiento —el efecto de las fuerzas— pertenece en cambio al ámbito de lo conmensurable y de las magnitudes finitas y observables. ¿Cómo se relacionan entonces los conceptos infinitesimales de la dinámica con la cinemática y sus cantidades finitas?

El *conatus* (a veces llamado también *solicitatio*), dice Leibniz, es "la velocidad tomada con la dirección"[35]. El *conatus* representa un diferencial de velocidad en un instante de tiempo ($\mathrm{d}v \cdot \mathrm{d}t$). El *conatus* es, entonces, una aceleración elemental, embrionaria, simple tendencia al movimiento[36], y se trata desde luego de una cantidad infinitesimal.

El *impetus*, por su parte, es "el producto de la masa del cuerpo por la velocidad"[37]. Es igualmente momentáneo y es, no obstante, velocidad real, fruto de una integración de *conatus* y de la inclusión de la masa ($\mathrm{m}\int \mathrm{d}v \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{m}v \cdot \mathrm{d}t$). Dado que el *impetus* es momentáneo

34. Cf. *Nouveaux Essais* I, c. I, A VI, 6, 72.
35. *Specimen dynamicum* I, GM VI, 237.
36. Cf. M. Gueroult, *Leibniz. Dynamique et Métaphysique* (Aubier-Montaigne, Paris, 1967) 35; A. Robinet, *Dynamique et fondements métaphysiques*, "Studia Leibnitiana" 13 (1984) 17.
37. *Specimen dynamicum* I, GM VI, 237 / OFC VIII, 416.

debe ser considerado hasta cierto punto como virtualidad. No es sino en la integración de estos *impetus* que se obtiene como resultado el movimiento. Así, Leibniz llegará a la estimación del movimiento a partir de la aplicación del cálculo a sus nociones dinámicas:

> Por tanto, así como la estimación de movimiento durante un espacio de tiempo se produce a partir de infinitos ímpetus, del mismo modo, el propio ímpetu, a su vez, se produce a partir de los grados infinitos impresos sucesivamente al mismo móvil, y tiene cierto elemento, del cual no puede nacer si no es reproducido infinitas veces[38].

La complicación evidente es la siguiente. ¿Qué significa que el *impetus* y el *conatus* sean cantidades derivadas del movimiento? ¿Se trata de límites del movimiento como el punto es límite de la línea? ¿La fuerza expresada en estos dos conceptos no es más que un movimiento infinitesimal? El tema se complica más aun cuando se considera que Leibniz explícitamente niega la existencia real de estas cantidades infinitesimales:

> De aquí se deduce que es doble el *esfuerzo* [*nisum*], a saber, elemental o infinitamente pequeño, al que también llamo *solicitación*, y el formado por la continuación o repetición de los esfuerzos elementales, esto es, del propio ímpetu, aunque no quiera por ello que estos Entes Matemáticos se encuentren exactamente así en la naturaleza, sino que sirven tan sólo para hacer cuidadosas evaluaciones por abstracción del pensamiento[39].

Las cantidades infinitesimales de *conatus* e *impetus* son, como cualquier infinitesimal, inexistentes en la naturaleza y, sin embargo, designan algo real. No sólo eso: lo que designan es la fuerza, que para Leibniz constituye a la forma sustancial o entelequia y que, por

---

38. *Specimen dynamicum* I, GM VI, 238 / OFC VIII, 416.
39. *Specimen dynamicum* I, GM VI, 238 / OFC VIII, 417.

tanto, no se le puede escatimar realidad alguna[40]. ¿Qué es entonces lo real que designan estos "Entes Matemáticos", como los llama Leibniz?

En mi opinión, la consideración de los infinitesimales como estructuras de situación permite echar luz sobre este asunto. En efecto, dado que Leibniz mantiene una posición relacionalista del movimiento —es decir, que éste no implica otra cosa que el cambio de posición entre los objetos[41]— bien podemos argumentar que el movimiento es una sucesión de estructuras situacionales. La consideración del tiempo en este caso debe ser análoga a la que se hace en geometría sobre el espacio: así como el espacio no es un conjunto de puntos, el tiempo debe ser tratado como un continuo y no como una conglomeración de instantes. En ese sentido, ni el *impetus* ni el *conatus* pueden ser considerados como partes elementales del movimiento, sino como un movimiento embrionario; esto es, como el caso límite del movimiento.

Se mencionó anteriormente que el *conatus* es "la velocidad tomada con la dirección". La noción de dirección puede ser tomada entonces como un *situs* futuro, virtual. El *impetus* y el *conatus* designan estructuras situacionales embrionarias (la fuerza); son infinitésimos no sólo en el espacio, sino también en el tiempo. Así como el triángulo característico preservaba sus propiedades situacionales al convertirse en un triángulo infinitesimal, del mismo modo, el movimiento considerado infinitesimalmente preserva su dirección y su velocidad, a pesar de que no expresa una distancia recorrida en un tiempo determinado. No expresa el movimiento, sino la capacidad de movimiento, esto es, la fuerza.

Leibniz es consciente de que no existen movimientos de magnitud infinitesimal, pero eso no obsta para describir a la fuerza como un movimiento embrionario. Y si el movimiento es un cambio en la situación, la fuerza será entonces la génesis de un estructura situacional futura. Sólo en este sentido se puede entender a la fuerza como movimiento embrionario; porque, aunque no posee magnitud,

---

40. Cf. *Specimen dynamicum* I, GM VI, 241-242 / OFC VIII, 423.
41. Cf. Leibniz a Clarke, L.V.47, G VII, 400-401 / OFC XVIII, 277-278.

sí contiene ya las propiedades definitorias del movimiento: dirección y velocidad. No sólo eso: dado que el movimiento no es otra cosa que un cambio de situación, esto es, una modificación de estructuras situacionales, los elementos infinitesimales de la fuerza, al poseer ya las propiedades de dirección y velocidad, contienen necesariamente en ellos las estructuras situacionales futuras. Se puede continuar con la analogía del teorema geométrico: si consideramos un plano que interseca una esfera, y ese plano se mueve de manera perpendicular sobre la esfera, la descripción en términos de situación que se tenía de la intersección (*ABC* ∞ *ABY*) contiene la definición de todos los estados futuros de dicha intersección (sea una circunferencia o un punto). Esta definición no sólo es válida para un instante determinado, sino para la serie de instantes subsiguientes. Igualmente, las cantidades infinitesimales del movimiento describen con propiedad a la fuerza, que contiene ya en sí todos los estados futuros de los cuerpos en movimiento.

Hay aquí otra conexión con la metafísica leibniziana, pues es una tesis básica del monadismo que la mónada contiene en sí a todos sus estados futuros. A través de la noción de fuerza, precisamente, Leibniz hace a la mónada un sistema autónomo que despliega progresivamente todos sus estados desde su propio fondo. La fuerza es entonces una ley de progresión que se puede describir infinitesimalmente. Como se dijo, estas cantidades —el *impetus* y el *conatus*— no *son* la fuerza, sino que la describen; la fuerza es real, mientras que éstos son entes matemáticos. No obstante, gracias a la consideración de los infinitesimales como estructuras situacionales, es posible hacer una descripción de la fuerza que sea fidedigna a la ley de continuidad y a la naturaleza del espacio y el tiempo.

Conclusión

Se han mostrado así las ventajas de comprender las nociones del cálculo infinitesimal leibniziano a la luz del *analysis situs*. Se ha mostrado que Leibniz tenía a la mano una interpretación mucho más fructífera de los infinitesimales que la de ser simples “ficciones útiles”, y que la interpretación de ellos como “estructuras de situación” es sumamente provechosa en el contexto del cálculo infinitesimal y de su fundamentación.

Se ha señalado que existe en la metafísica leibniziana una fundamentación ontológica del *analysis situs*. Tal cimentación metafísica da credenciales a esta nueva geometría como una verdadera ciencia del espacio, entendido éste como la combinatoria infinita de las relaciones de situación posibles. Además, en sede dinámica, la noción de "estructura de situación" también permite solucionar el problema del estatuto ontológico de los conceptos infinitesimales de *impetus* y *conatus*. Se ha demostrado que estos no deben entenderse como unidades mínimas de movimiento, sino como la designación de una capacidad de movimiento, esto es, la fuerza.

Estas relaciones entre geometría, metafísica y dinámica nos dejan ver una coherencia sistemática en el pensamiento de Leibniz que, si bien pocas veces hace explícita en sus textos, es posible reconstruir cuando se encuentra un hilo conductor adecuado. En este caso, espero haber demostrado que el *analysis situs* cumple con dicha función. Se revela así la potencia de una mente que supo abordar los problemas de la filosofía de la naturaleza, de la metafísica y de las ideas matemáticas desde un frente versátil pero consistente.

Referencias

D. Bertoloni-Meli, *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz* (Oxford University Press, Oxford, 1993).

V. De Risi, *Geometry and Monadology. Leibniz's* Analysis Situs *and Philosophy of Space* (Birkhäuser, Basel, 2007).

J. Echeverría, *Introducción*, en G. W. Leibniz, *La caracteristique géométrique* (Vrin, Paris, 1995).

M. Gueroult, *Leibniz. Dynamique et Métaphysique* (Aubier-Montaigne, Paris, 1967).

J. Hofmann, *Leibniz in Paris (1672-1676). His Growth to mathematical maturity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

G. W. Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe* (Akademie Verlag, Berlin, 1999).

G. W. LEIBNIZ, O*pera Omnia (ed. Ludovici Dutens)* (Olms, Hildesheim, 1989).

G. W. LEIBNIZ, *Die Philosophischen Schriften (ed. C.J. Gerhardt)* (Olms, Hildesheim, 1965).

G. W. LEIBNIZ, *Mathematische Schriften (ed. C.J. Gerhardt)* (Olms, Hildesheim, 1971).

G. W. LEIBNIZ, *Textes inédits (ed. G.Grua)* (Presses Univ. de France, Paris, 1948).

G. W. LEIBNIZ, *Opuscules et fragments inédits (L. Couturat)* (Alcan, Paris, 1903).

G. W. LEIBNIZ, *Die Werke Von Leibniz (ed. O.Klopp)* (Olms, Hildesheim, 1973).

G. W. LEIBNIZ, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyerpbolae (ed. J. Echeverría, M. Parmentier)* (Vrin, Paris, 1993).

G. W. LEIBNIZ, *Obras filosóficas y científicas* (Comares, Granada, 2007).

I. NEWTON, *De gravitatione*, en R. HALL, M. BOAS HALL (eds.), *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1962).

I. NEWTON, *De methodis serierum et fluxionum* en *Mathematical Papers of Isaac Newton* III (Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1976).

A. ROBINET, *Dynamique et fondements métaphysiques*, "Studia Leibnitiana" 13 (1984) 1-25.

L. RUIZ-GÓMEZ, *El concepto leibniziano de espacio. La polémica con Clarke y el newtonianismo* (Eunsa, Pamplona, 2014).