UNIVERSIDAD
Panamericana

La triste historia de las proyecciones y su inversa desalmada

Óscar Dávalos Orozco

Tesis presentada para optar al título de:
Maestría en Ciencias en Ingeniería

Director:
Dr. Fernando Brambila Paz

Línea de Investigación:
Reconstrucción de funciones a partir de sus proyecciones

Universidad Panamericana
Facultad de Ingeniería
Aguascalientes, México
2022

UNIVERSIDAD PANAMERICANA®
Campus Bonaterra

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACION

En mi calidad de ASESOR y después de haber analizado el trabajo de titulación de:

Dávalos	Orozco	Óscar
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)

Quien cursó el programa "Maestría en Ciencias" con reconocimiento de validez oficial de estudios de la Secretaría de Educación Pública según acuerdo número 2007574 de fecha 29 de junio 2007 y presenta el trabajo titulado

"La triste historia de las proyecciones y su inversa desalmada."

de conformidad a la modalidad de titulación: Tesis

Manifiesto que reúne los requisitos que obligan los reglamentos en vigor, para ser presentado ante el Honorable jurado del Examen Profesional

Aguascalientes, Ags., 23 de febrero de 2022.

Vo.Bo.

Dr. Fernando Brambila Paz
No. Cédula profesional 1387209

Josemaría Escrivá de Balaguer No. 101 Apartado Postal 1168-B Aguascalientes, Ags., México C.P. 20290
Tels 01 (449) 910-62-00 Fax 01 (449) 910-62-22 e-mail: rpublica@bonaterra.edu.mx

A Roco, Tico, Maco y Paco

Al Monstruo de Espagueti Volador

Resumen

El objetivo de este escrito es dar un esbozo general del trabajo que se ha hecho con respecto a la reconstrucción de funciones a partir de sus proyecciones.
En el capítulo 1, se aborda la historia de la tomografía así como la reconstrucción de matrices. Se hace hincapiés en las matrices binarias, como los nonogramas, y la técnica de reconstrucción algebraica.
En el capítulo 2 se da la definición de la Transformada de Radon, se dan ejemplos y se da un esbozo de la demostración para obtener su inversa.
En el capítulo 3 se aborda el problema de obtener la transformada de Radon para campos vectoriales, así como el método para obtener su inversa.
En el capítulo 4 se dan unos resultados para reconstruir funciones a partir de los valores de sus integrales.

Palabras clave: ART, Campos Vectoriales, matices binarias, proyecciones, tomografía, transformada de Radon, nonogramas.

Contenido

Resumen vii

1. Nonogramas y ART 2
1.1. Historia de la Tomografía . . . 2
1.2. Bosquejo del funcionamiento de las TAC . . . 5
1.3. Reconstrucción de matrices binarias . . . 5
1.4. Técnica de reconstrucción algebraica . . . 9

2. Transformada de Radon 14
2.1. Idea intuitiva . . . 14
2.2. Transformada de Radon de una circunferencia . . . 15
2.3. Transformada de Radon de F en una circunferencia . . . 17
2.4. Definición de la Transformada de Radon . . . 19
2.5. Ejemplos de Transformadas de Radon . . . 20
2.6. Propiedades básicas de la Transformada de Radon . . . 24
2.7. Transformada de Fourier de la transformada de Radon . . . 31
2.8. Transformada discreta y rápida de Fourier . . . 34

3. Transformada de Radon en campos vectoriales 41
3.1. Efecto Doppler . . . 41
3.1.1. Doppler y Ballot . . . 41
3.1.2. ¿Qué es el efecto Doppler? . . . 42
3.1.3. Algunas fórmulas . . . 43
3.1.4. ¿Cómo calcular la velocidad usando el efecto Doppler? . . . 44
3.2. Sonido y ultrasonido en el tiempo . . . 45
3.2.1. El sonido . . . 45
3.2.2. El ultrasonido . . . 49
3.2.3. Ultrasonido y Doppler . . . 50
3.3. Tomografías, introducción . . . 53

3.4. Definición y ejemplos 54
3.4.1. Ejemplos de la transformada de Radon en un campo vectorial . 55
3.5. Recuperación del campo 59
3.6. Aseveración de Juhlin 63

4. Reconstrucción de una función a partir de sus integrales 67
4.1. Introducción 67
4.2. Problemas 68

Anexos 77

A. Implementación del algoritmo de aproximación de ART 78

B. Código de la Transformada rápida de Fourier 80

C. Función Beta 84

D. Funciones vectoriales 89
D.1. Definiciones preliminares 89
D.1.1. Laplaciano ∇^2 89
D.1.2. Divergencia 90
D.2. Un poco sobre la medida 100

Bibliografía 103

Índice alfabético 109

1. Nonogramas y ART

Desde el invento de tomógrafo se han hecho varias investigaciones para procesar de manera eficiente las proyecciones generadas por el tomógrafo y de ellas recuperar la imagen. A continuación se expondrá una breve historia del tomógrafo y su funcionamiento, algunas formas en que se ha atacado este problema para algunos casos discretos y continuos. En particular se revisarán algunos algoritmos para el caso en que el objeto que analiza es comparable a una matriz binaria. También se revisará la técnica de reconstrucción algebraica (ART por sus siglas en inglés), y por último se repasará la Transformada de Radon.

1.1. Historia de la Tomografía

En 1967 mientras el grupo de rock *The Beatles* rompía marcas en ventas de discos con la compañía discográfica Electro Musical Industries, EMI, un trabajador de esa misma compañía, Godfrey Hounsfield, empezaba a idear una máquina que pudiera distinguir las distintas densidades de los tejidos del cuerpo. Aunque ya se tenía más de 70 años de haberse descubierto los rayos X, Röntgen descubrió los rayos X en 1895, a Hounsfield le molestaba la limitación de que con ellos solamente se podían ver los huesos y no la compleja anatomía de los tejidos blandos como los músculos, tendones, vasos sanguíneos o nervios, con los rayos X se pierde la profundidad y por supuesto, la densidad.
Hounsfield tenía la idea de que podía obtener mayor información a partir de los mismos rayos X tomando a una misma "rebanada", corte transversal, del cuerpo varias radiografías desde diferentes ángulos y con ellas obtener una imagen que representara las diferentes densidades de la parte estudiada.
Hounsfield fue ingeniero electrónico que estudió, gracias a una beca, en el Faraday House Electrical Engineering College en Londres. Empezó a trabajar en EMI en 1951, donde trabajó en radares, y armas guiadas. En 1958 dirigió un equipo de diseño que construyó la primera computadora de transistores a ser construida en Gran Bretaña, el EMIDEC 1100. Luego se le ocurrió la idea crear lo que sería el EMI-Scanner y la

técnica de Tomografía Axial Computarizada (TAC). [39]
Por otra parte los directivos de la EMI, conociendo lo voluble que suele ser el negocio de la música, aprovechando las utilidades que estaban teniendo con la venta de los discos de *The Beatles*, y considerando la trayectoria de Godfrey Hounsfield, decidieron apoyar el proyecto. [15] Cabe aclarar, como se escribió en párrafos anteriores, que EMI no era una compañía novata en la investigación y desarrollo de la electrónica, ya que en años anteriores había desarrollado un sistema de televisión completamente electrónico el cual fue llamado *Marconi-EMI system*, había hecho investigaciones sobre el sonido estereo, había desarrollado equipos de radar y misiles guiados. En 1958 realizó la *EMIDEC 1100*, que fue la primera computadora de transistores disponible en el Reino Unido, bajo la dirección del mismo Godfrey Hounsfield.

El trabajo de Godfrey se inspiró en un par artículos de Allan McLeod Cormack. Cormack fue un ingeniero electrónico y físico sudafricano, en 1956 se interesó en la tecnología de los rayos X [65], lo que lo llevó a desarrollar fundamentos teóricos. Sus trabajos fueron publicados en dos artículos en el Journal of Applied Physics en 1963 y 1964 bajo el título "*Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications*" y "*Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications II*" [17,18], (Representación de funciones a partir de su integral de línea, con algunas aplicaciones a la Radiología).

Cormack, a su vez, se inspiró en las investigaciones del matemático Johann Karl August Radon. Radon nació en lo que actualmente es la República Checa en 1887 cerca de Bohemia.
En una reunión en 1917 de la Sociedad Real de Física y Matemática de Sajonia, Radon presentó su trabajo "*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*", ("Sobre la definición de funciones por sus integrales a lo largo de ciertos planos") [59]. En este trabajo Radon resuelve el problema de reconstruir una función a partir de sus integrales de línea. Definió a lo que hoy se le llama Transformada de Radon, la cual mapea una función en el conjunto de sus proyecciones. Lo que se obtiene de una tomografía son proyecciones de la parte de una cuerpo, para la reconstruir esa parte del cuerpo en una imagen basta aplicar la transformada inversa de Radon.

Por la importancia de sus respectivos trabajos, Allan McLeod Cormack y Godfrey Newbold Hounsfield obtuvieron de forma compartida el Premio Nobel de Fisiología o

Medicina en 1979. Durante el discurso de la presentación del Premio Nobel de Fisiología o Medicina, a cargo del profesor Torgny Greitz, se comentó: "Previo al escáner, las radiografías de la cabeza mostraban sólo los huesos del cráneo, pero el cerebro permanecía como un área gris, cubierto por la neblina. Súbitamente la neblina se ha disipado" [34].

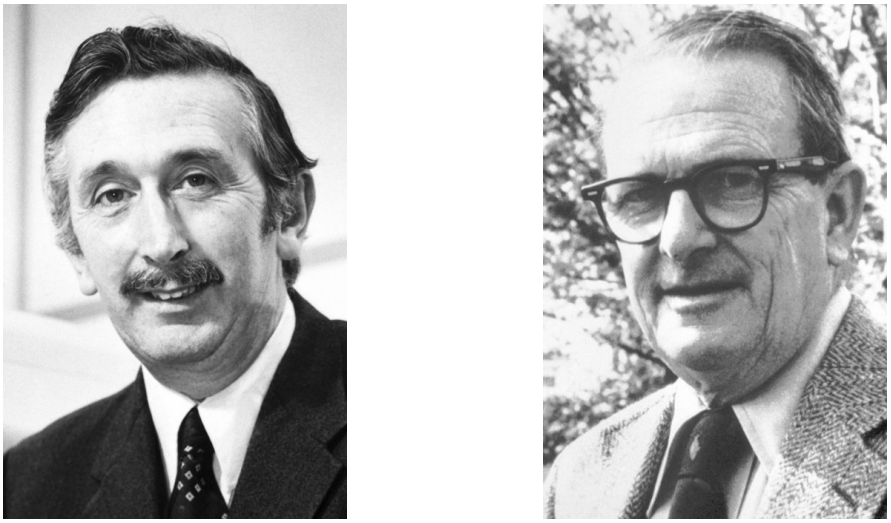


Figura 1-1.: Godfrey Newbold Hounsfield y Allan McLeod Cormack
Creadores del Tomógrafo Axial Computarizado. Ganadores del Premio Nóbel en Medicina o Fisiología 1979
Imágenes de Nobel Foundation archive [53, 54]

Las ventajas que tienen las imágenes por Tomomografía Computarizada es que son exactas, no son invasivas y no provocan dolor, y sobretodo su capacidad de obtener imágenes de huesos, tejidos blandos y vasos sanguíneos al mismo tiempo. Los exámenes por TAC son rápidos y sencillos. La desventaja es la posibilidad de cáncer como consecuencia de la exposición excesiva a la radiación.

En recuerdo y homenaje a Hounsfield, las unidades que definen las distintas densidades de los tejidos estudiadas en las Tomografías Computarizadas se denominan unidades Hounsfield.

1.2. Bosquejo del funcionamiento de las TAC

Durante un escaneo por TAC, el paciente permanece recostado en una cama que se mueve lentamente a través de fuente motorizada de rayos X que gira alrededor de una abertura circular de una estructura en forma de dona llamada Gantry [12]. A diferencia de las imágenes de rayos X que son proyectadas de manera perpendicular al plano, el TAC mientras gira dispara haces angostos de rayos X al paciente. De esa forma los tomógrafos toman de miles de rayos X en diferentes direcciones de una "rebanada" del cuerpo que se quiere estudiar. Los escáneres utilizan detectores digitales especiales de rayos X, localizados directamente al lado opuesto de la fuente de rayos X. Cada vez que la fuente de rayos X completa toda una rotación, se procesan los datos. A cada rayo se le compara su intensidad de envió con la intensidad con que se recibió en el otro extremo. Con estos datos se reconstruye la "rebanada" y se almacena.
Se puede repetir el proceso anterior moviendo la cama hacia adelante en el Gantry. Lo cual permitirá tener otro "corte".

La computadora puede desplegar las imágenes de los cortes en formas individuales o amontonadas, para generar una imagen 3D del paciente que muestre el esqueleto, los órganos y los tejidos, así como cualquier anormalidad que el médico esté tratando de identificar. Este método tiene muchas ventajas, incluyendo la capacidad de rotar la imagen 3D en el espacio o ver los cortes en sucesión, haciendo más fácil encontrar el lugar exacto donde se puede localizar un problema [12]. A partir de varias imágenes transversales (axiales) una computadora reconstruye una imagen bidimensional que permite ver la sección de estudio desde cualquier ángulo. Los equipos modernos permiten incluso hacer reconstrucciones tridimensionales.

1.3. Reconstrucción de matrices binarias

Se considera una matriz binaria de $m \times n$, es decir, una matriz en donde sus entradas son 0 o 1. Para cada renglón i, $1 \leq i \leq m$, se define h_i como la suma de todas las entradas del renglón i y se le llama la proyección del renglón i.
Análogamente, para cada columna j, $1 \leq j \leq n$, se define v_j como la suma de todas las entradas de la columna j y se le llama proyección de la columna j.
Gráficamente, se puede imaginar la matriz binaria como una imagen de $m \times n$ píxeles, donde cada 1 de la matriz es un píxel negro y cada 0 de la matriz un píxel blanco. Las proyección h_i cuenta la cantidad de píxeles negros en el renglón i y, análogamente, la

proyección v_j es la cantidad de píxeles negros en la columna j.
A partir de las proyecciones de los reglones y columnas se crean los vectores $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ y $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, respectivamente.
El problema a resolver es: Dados los vectores H y V encontrar una matriz binaria $B = (b_{i,j})$ tal que el vector de las proyecciones de sus renglones sea H y el vector de las proyecciones de sus columnas sea V. Dicho de otra forma:
Sean $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ y $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Encontrar una matriz $B = (b_{i,j})$, $B \in M_{m,n}$, que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente:

$$b_{i,j} \in \{0, 1\} \tag{1-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = h_i \tag{1-2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{i,j} = v_j \tag{1-3}$$

Como ejemplo, tomemos los siguientes vectores proyección:

$$H = (2, 2, 2, 1) \text{ y } V = (3, 2, 1, 1) \tag{1-4}$$

se tendrían las siguientes soluciones:

1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	1

1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	0	1	0

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	0	0

1	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
0	0	0	1

1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0

1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0

1	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0

1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0

1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0

1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0

1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0

1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	0	1

1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0

1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0

1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	0	0

1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	0

1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0

0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0

0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	0	0

1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0

1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0

1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0

1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0

0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0

Uno de los principales problemas en la reconstrucción de una matriz binaria a partir de su par de proyecciones de columnas y renglones es, como se vio en el ejemplo anterior, que puede tener varias soluciones, en particular, si H y V pertenecen a $\mathbb{N}^n$, $H = V = (1, 1, \ldots, 1)$ tiene $n!$ soluciones.
Cuando la matriz binaria acepta varias soluciones con sus proyecciones se dice que es ambigua. Para eliminar la ambigüedad o reducir la cantidad de soluciones, varios autores, como Kuba, Balázs, Woeginger y Batenburg [5,10,30,48] han impuesto restricciones al tipo de soluciones esperadas. Las restricciones a las cuales se refieren son principalmente conexidad, convexidad, las cuales se tratarán a continuación.
Se dice que una matriz binaria es *horizontalmente convexa* (*verticalmente convexa*,), si todas las celdas color negro, es decir todas las celdas que tienen un 1 en un renglón (columna) son contiguas. Se simboliza como h-convexa (v-convexa).
Formalmente se puede escribir lo anterior de la siguiente forma:
$B = (b_{i,j})$ es h-convexa $\Leftrightarrow b_{i,r} = b_{i,s} = 1, r \leq s$ implica $b_{i,t} = 1 \, \forall \, r \leq t \leq s$.
$B = (b_{i,j})$ es v-convexa $\Leftrightarrow b_{r,j} = b_{s,j} = 1, r \leq s$ implica $b_{t,j} = 1 \, \forall \, r \leq t \leq s$.

Las soluciones para los vectores proyección 1-4 que son *h-convexas* son:

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	0	0

1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0

Las soluciones para los vectores proyección 1-4 que son *v-convexas* son:

1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	1

1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	0	1	0

1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	0	1

1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	0	0

0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0

1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0

1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0

0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0

A una matriz binaria simple se le llama *hv-convexa* si es h-conexo e v-conexo.
La única solución para los vectores proyección 1-4 que es *hv-conexa* es:

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0

Kuba en [47] realizó una heurística para resolver matrices binarias hv-convexas. Por su parte Barcucci [8] demostró que el resolver h-convexa, v-convexa era $NP-completo$ y Woeginger [30] demostró que hv-convexa era también $NP-completo$.

Consideremos dos celdas de la matriz binaria B, $P = b_{i_1,j_1}$ y $Q = b_{i_2,j_2}$, la distancia entre la celda P y la celda Q se define como

$$||P - Q|| = \sqrt{(i_1 - i_2)^2 + (j_1 - j_2)^2} \tag{1-5}$$

Se dice que dos celdas son 4-adyacentes si $|P - Q| \leq 1$ y se dice que dos celdas son 8-adyacentes si $||P - Q|| \leq \sqrt{2}$. La primera de estas dos definiciones se refieren a que dos celdas en una matriz son adyacentes si tienen una arista en común, es decir, si están "pegadas" y una de ellas está a la derecha o abajo de la otra. La segunda definición se refiere a las celdas que comparten al menos un vértice, es decir, una celda puede ser adyacente a lo más a ocho celdas.
Una trayectoria 4-conexa (8-conexa) es una sucesión de celdas negras B_0, B_1, ..., B_p donde la celda B_k es 4-conexa (8-conexa) con B_{k-1} si $k = 1, 2, \ldots, p$.
Una matriz binaria es 4-conexa (8-conexa), si cualquier para de celdas S y T existe una trayectoria 4-conexa (8-conexa) entre ellas.

Para la proyecciones 1-4 no hay soluciones 4-conexas, sin embargo existen 14 soluciones 8-conexas que son:

1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	1

1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0

1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0

1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0

1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0

1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0

1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0

1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	0

0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	0	0

1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0

1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0

A las matrices binarias que son 4-conexas se les suele llamar poliminó , si además se agrega la propiedad de ser h-convexa, v-convexa o hv-convexa al poliminó se le llama poliminó h-convexo, poliminó v-convexo o polinminó hv-convexo respectivamente. Barucci, Del Lugo Nivat y Pinzani [8] demostraron que para poliminó h-convexos y poliminó v-convexos el problema es *NP*-completo, sin embargo, para un poliminó hv-convexo la complejidad es *P*.
En caso de que no se le pidan condiciones al poliminó, Woeginger [30] demostró que el problema es NP-completo.

1.4. Técnica de reconstrucción algebraica

Ahora se estudiará el caso para reconstruir una imagen cuando el cuerpo estudiado tenga densidades con números reales vía el método algebraico ART (*Algebraic Reconstruction Technique*). Para esta parte fueron tomadas ideas de [2]. Este método fue usado por primera vez por Richard Gordon y Gabor T. Herman [32, 38].
Los tomógrafos son construidos a partir de miles de rayos X delgados, después de pasar por el cuerpo, la intensidad de los rayos son medidos y estas medidas son retransmitidas a una computadora para ser procesadas.
Para reconstruir el cuerpo en estudio a partir de las medidas tomadas, el cuerpo se divide en varios pixeles cuadrados numerados del 1 al N, siendo el objetivo medir la

densidad de cada pixel. Después de medir la densidad, se reproduce en un monitor con intensidades de grises dependiendo de la densidad del pixel.
Los fotones del rayo X son absorbidos por el tejido en razón proporcional a la densidad del tejido. La densidad del pixel i-ésimo, simbolizado por δ_i, y se simbolizará $x_i = \ln(\delta_i)$:

$$\delta_i = \frac{\text{cantidad de fotones que salen del pixel } i}{\text{cantidad de fotones que entran al pixel } i}, \qquad x_i = \ln(\delta_i)$$

Suponga que un rayo X pasa por los pixeles $1,\ 2, \ldots n$, en ese orden. Además sea E_i la cantidad de fotones que entran al pixel i, y sea S_i a la cantidad de fotones que salen del pixel i.
La cantidad de fotones que salen en un pixel es igual a la cantidad de pixeles que entran en el siguiente pixel, es decir $S_i = E_{i+1}$, $\forall\, i \in \{1,\ 2\ \ldots, n-1\}$. Con esto se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(\delta_i) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{S_k}{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(S_k) - \ln(E_k)) \\
&= (\ln(S_1) - \ln(E_1)) + (\ln(S_2) - \ln(E_2)) + \ldots (\ln(S_n) - \ln(E_n)) \\
&= (\ln(E_2) - \ln(E_1)) + (\ln(E_3) - \ln(E_2)) + \ldots (\ln(S_n) - \ln(E_n)) \\
&= \ln(S_n) - \ln(E_1) = \ln\left(\frac{S_n}{E_1}\right) \therefore \\
\sum_{k=1}^{n} x_k &= \ln\left(\frac{S_n}{E_1}\right)
\end{aligned} \tag{1-6}$$

La igualdad 1-6 es bastante atractiva, ya que la suma de los logaritmos de las densidades queda determinada por solamente dos datos: cantidad de fotones que entran al primer pixel y la cantidad de fotones que salen del último pixel.
Por otra parte se define

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el rayo i pasa por el pixel } j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1-7}$$

Con lo anterior, si hay m rayos y n pixeles se define el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-8}$$

Siendo

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad b_i = \ln\left(\frac{\text{Fotones que salen del último pixel con el rayo i}}{\text{Fotones que entran al primer pixel con el rayo i}}\right)$$

Como ejemplo considere una matriz con cuatro pixeles a_1, a_2, a_3 y a_4, cuyas densidades son $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 0.5$, $\delta_3 = 0.2$ y $\delta_4 = 0.1$, respectivamente, pero que un principio estos valores son desconocidos.

a_1	a_2
a_3	a_4

0.8	**0.5**
0.2	**0.1**

Imagine que se lanzan cuatro rayos con 100 fotones de la siguiente manera:
El primero pasa por a_1 y a_2, por lo que saldrían $100 \times 0.8 \times 0.5 = 40$ fotones.
El segundo pasa por a_3 y a_4, por lo que saldrían $100 \times 0.2 \times 0.1 = 2$ fotones.
El tercero pasa por a_1 y a_3 por lo que saldrían $100 \times 0.8 \times 0.2 = 16$ fotones.
El cuarto pasa por a_2 y a_3, por lo que saldrían $100 \times 0.5 \times 0.2 = 10$ fotones.
Por lo que el sistema de ecuaciones quedaría:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= \ln\left(\frac{40}{100}\right) \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 &= \ln\left(\frac{2}{100}\right) \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 &= \ln\left(\frac{16}{100}\right) \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 &= \ln\left(\frac{10}{100}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ x_3 + x_4 &= \ln\left(\frac{1}{50}\right) \\ x_1 + x_3 &= \ln\left(\frac{4}{25}\right) \\ x_2 + x_3 &= \ln\left(\frac{1}{10}\right) \end{cases} \tag{1-9}$$

El sistema anterior tiene como solución:

$$x_1 = \ln\left(\frac{4}{5}\right),\ x_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right),\ x_3 = \ln\left(\frac{1}{5}\right),\ x_4 = \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

por lo tanto $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 0.5$, $\delta_3 = 0.2$, $\delta_4 = 0.1$.

Cabe recalcar que a partir de los dos datos por rayo enviado, la cantidad de fotones que entran al primer píxel y la cantidad de fotones que salen del último píxel, se pudieron recuperar las densidades de todos los pixeles.

Debido a errores de medición, es muy difícil que el sistema dé una solución exacta de las densidades de los píxeles, por lo cual se aplica un algoritmo de aproximación publicado en 1937 por el matemático polaco Stefan Kaczmarz con el título *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen* [43] (Resolución aproximada de sistemas de ecuaciones lineales), a dicho algoritmo se le da actualmente el nombre de Método Kaczmarz. En la tesis Jason Peter Stockmann [62] se puede leer traducido al inglés el artículo de Kaczmarz.

Algoritmo

- Escoge un punto en $x_0^1 \in \mathbb{R}^n$. Escoge un entero positivo q, la cantidad de veces que se va a hacer la aproximación.
- for p:=1 to q do
  begin
  for k:=1 to M do
  $x_k^{(p)} := x_{k-1}^{(p)} + \frac{b_k - a_k^T x_{k-1}^{(p)}}{|a_k|^2} a_k$
  $x_0^{(p+1)} := x_M^{(p)}$
  end;

La implementación de este algoritmo en C se puede ver en la parte de anexos en la sección A.

Es claro que el sistema de ecuaciones lineales son las ecuaciones de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$. Sean estos $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$. El algoritmo pide que escojamos cualquier punto en $P_0 \in \mathbb{R}^n$, con este punto se calcula la proyección P_1 de P_0 en Π_1, luego se calcula la proyección P_2 de P_1 en Π_2, y así sucesivamente hasta obtener m puntos. Se repite el proceso cuantas veces queramos escogiendo como P_0, para los siguientes ciclos, P_m.

Se puede demostrar que si el espacio generado por $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ es $\mathbb{R}^n$ el algoritmo siempre converge a los mismos puntos $\{x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \ldots, x_m^{(q)}\}$ en $\mathbb{R}^n$ sin importar el punto inicial $x_0^1 \in \mathbb{R}^n$, además $x_k^{(q)} \in \Pi_k$.

Por último se hará la demostración de que $x_k^{(p)} := x_{k-1}^{(p)} + \frac{b_k - a_k^T x_{k-1}^{(p)}}{|a_k|^2} a_k$ es la proyec-

ción de $x_{k-1}^{(p)}$ sobre el hiperplano Π_k.

Proposición: Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y Π el hiperplano $\sum_{k=1}^{n} a_i x_i = b$, entonces la proyección de P sobre Π está dada por $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i = \frac{b_i - a^T P}{|a|^2} a_i + p_i$

Demostración. La proyección Q de P sobre Π se puede definir como el punto en Π más cercano a P.
Se usará multiplicadores de Lagrange para obtener Q.
La función a minimizar será el cuadrado de la distancia de un punto a P:

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - P_i)^2 \text{ bajo la condición } \sum_{k=1}^{n} a_i x_i = b$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial x_i} =& \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \Rightarrow 2(x_i - p_i) = \lambda a_i \Rightarrow x_i = \frac{\lambda}{2} a_i + p_i \Rightarrow \\
b =& \sum_{k=1}^{n} a_k (\frac{\lambda}{2} a_k + p_k) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k p_k \Rightarrow \lambda = 2 \frac{b - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \therefore \\
x_i =& \frac{2 \frac{b - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}{2} a_i + p_i = \frac{b - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} a_i + p_i = \frac{b - a \cdot P}{|a|^2} a_i + p_i
\end{aligned}$$

Si se simboliza $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$, se obtiene $x_i = \frac{b_i - a^T P}{|a|^2} a_i + p_i$

□

Se sabe que para resolver un sistema lineal de ecuaciones con n incógnitas al n incógnitas se necesitan alrededor de n^3 operaciones, sin embargo, por ser la matriz asociada al sistema de ecuaciones rala, la complejidad computacional se puede reducir de manera considerable.

2. Transformada de Radon

En esta sección se dará un breve resumen de los resultados obtenidos de la Transformada de Radon. Para ello, primero se dará una idea intuitiva de su significado y luego se harán algunos ejemplos para luego dar la definición formal y algunas de sus propiedades.

2.1. Idea intuitiva

Los tomógrafos trabajan lanzando rayos X a una porción del cuerpo y tienen un receptor que recibe los rayos después de atravesar la porción. En función de las densidades de la parte del cuerpo que atraviese el rayo, este se descompondrá y será lo que el receptor obtenga y con lo cual se crean las imágenes.
Los elementos involucrados en el proceso anterior pueden ser interpretados como entes matemáticos de la siguiente forma: Cada rayo es una recta l, la porción del cuerpo es un conjunto en el plano E. Cada punto $(x, y) \in E$ tiene una densidad $F(x, y)$, y lo que obtiene el receptor es un número real r. Por lo anterior, el proceso se puede pensar como una transformación T cuyo dominio son rectas, que al aplicarlas a F sobre E, da por resultado r:

$$T\left(F_E(l)\right) = r$$

Por otra parte, una recta está representada biunivocamente mediante una ecuación la forma $x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$, es decir, por cada pareja (p, θ) hay una sola recta, y por cada recta hay un única pareja (p, θ). Por lo anterior en lugar de pensar en una recta, se puede pensar en una pareja (p, θ):

$$T\left(F_E(p, \theta)\right) = r \tag{2-1}$$

En resumen, el proceso tomográfico se puede pensar como una función del tipo 2-1, y la Transformada de Radon es precisamente una función de ese tipo, la cual se detallará más adelante, por lo cual su importancia en este texto.

2.2. Transformada de Radon de una circunferencia

Dada la recta $x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$, ¿cuál es la longitud de la secante que corta esta recta a la circunferencia $(x-h)^2 + y^2 = 1$?
Lo anterior es una clara muestra de una transformada de Radon, donde E es la circunferencia, y la regla de correspondencia de F es la longitud de la secante que corta esta recta a la circunferencia.
A continuación se resolverá el problema usando geometría básica.

Para simplificar se expresa la recta de la forma

$$y = mx + b,\ m = -\cot(\theta),\ b = \frac{p}{\mathrm{sen}(\theta)} = p\csc(\theta)$$

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ los puntos en donde se interceptan la recta y la circunferencia. Entonces la longitud de la cuerda P_1P_2 es:

$$\begin{aligned}
|P_1P_2| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (mx_2+b-(mx_1+b))^2} \\
&= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (mx_2-mx_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (x_2-x_1)^2m^2} \\
&= |x_2-x_1|\sqrt{1+m^2} = |x_2-x_1|\sqrt{1+\cot^2(\alpha)} \\
&= |x_2-x_1|\cdot|\csc(\alpha)| \qquad (2\text{-}2)
\end{aligned}$$

Si una circunferencia está centrada en el punto $(h,\ k)$ y tiene radio r el valor de x_1 y x_2 está dado por la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{h + km - bm \pm \sqrt{\xi}}{1+m^2},\ \xi = r^2(1+m^2) - (k - mh - b)^2$$

La cual, sustituyendo con los valores que se tienen, $k = 0$, $r = 1$, $m = -\cot(\theta)$, $b = p\csc(\theta)$ queda la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{h + b\cot(\theta) \pm \sqrt{\xi}}{1+\cot^2(\theta)} = h\,\mathrm{sen}^2(\theta) + p\cos(\theta) \pm \mathrm{sen}^2(\theta)\sqrt{\xi},$$

$$\xi = 1 + \cot^2(\theta) - (\cot(\theta)h - p\csc(\theta))^2$$

Por lo cual:

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{2\sqrt{\xi}}{1+\cot^2(\theta)}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\xi}}{\csc^2(\theta)}\right| = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\sqrt{\xi} \tag{2-3}$$

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + \cot^2(\theta) - (\cot(\theta)h - p\csc(\theta))^2 \\ &= \csc^2(\theta) - \csc^2(\theta)(\cos(\theta)h - p)^2 \\ &= \csc^2(\theta)\left(1 - (\cos(\theta)h - p)^2\right) \\ &= \csc^2(\theta)(r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sqrt{\xi} = |\csc(\theta)|\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2} \tag{2-4}$$

Sustituyendo la ecuación 2-4 en la ecuación 2-3:

$$|x_2 - x_1| = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\sqrt{\xi} = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)|\csc(\theta)|\sqrt{r^2 - (cos(\theta)h - p)^2}$$

$$|x_2 - x_1| = 2|\,\mathrm{sen}(\theta)|\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2} \tag{2-5}$$

Sustituyendo la ecuación 2-5 en la ecuación 2-2:

$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= |x_2 - x_1| \cdot |\csc(\theta)| \\ &= 2|\,\mathrm{sen}(\theta)|\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2} \cdot |\csc(\theta)| \\ &= 2\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2}\end{aligned}$$

En conclusión, la longitud de la cuerda viene dada por la siguiente función:

$$F(\theta,\, p) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2} & \text{si } r \geq |\cos(\theta)h - p| \\ 0 & \text{si } r < |\cos(\theta)h - p| \end{cases} \tag{2-6}$$

En la figura **2-1** se esquematiza la función $F(\theta,\, p)$ para $h = 0,\, 0.5,\, 1,\, 2$. A ese tipo de imágenes se le suele llama senogramas. Un problema análogo al anterior para un cuadrado de lado 2, con lados paralelos a los ejes y centro en $(h,\, 0)$, $h = 0,\, 0.5,\, 1,\, 2$, daría por resultado las imágenes de la figura **2-2**.

Por último, en las figuras **2-4** se presentan las gráficas de la función aplicada a un triángulo equilátero de lado 2, con un lado paralelo al eje Y, sus vértices son $A = (h, 0)$, $B = \left(h + \sqrt{3},\, 1\right)$ y $C = \left(h + \sqrt{3},\, -1\right)$, $h = -\sqrt{3},\, \frac{-2\sqrt{3}}{3},\, 0,\, 1$, en los tres primeros el origen corresponde al punto medio de un cateto, al centroide y a un vértice, respectivamente, ver la figura **2-3**.

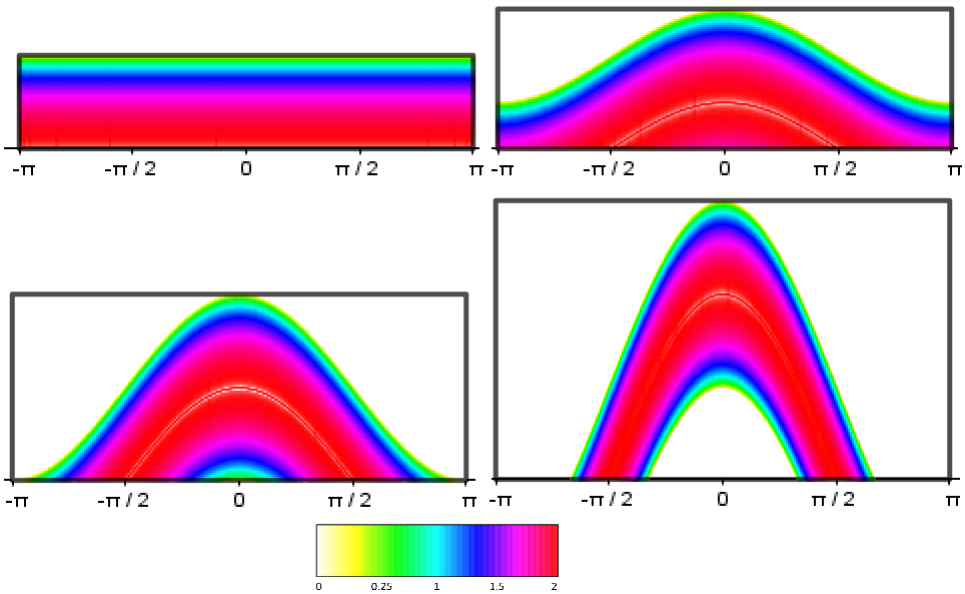


Figura 2-1.: Senograma de la transformada de $(x-h)^2+y^2=1$ para $h=0,\ 0.5,\ 1,\ 2$

2.3. Transformada de Radon de F en una circunferencia

Se obtendrá la fórmula explícita de la transformada de Radon para una función definida en una circunferencia.
Considérese la recta $L(\theta,p)$, P_1 y P_2 los punto de intersección de L con la circunferencia $(x-h)^2+y^2=1$, entonces una parametrización de L es $\gamma(t)=(P_2-P_1)t+P_1$, $t\in[0,1]$, entonces $|\gamma'(t)|=|P_2-P_1|$, por lo tanto

$$\Re\{f\}(p,\theta)=\int_0^1 f\left(\gamma(t)\right)|P_2-P_1|dt$$

Ahora se encontrará explícitamente el valor de $|P_2-P_1|$ y de $\gamma(t)$.
Por 2-6 $|P_2-P_1|=2\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2)}$. Sean $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ $x_{1,2}=h\,\mathrm{sen}^2(\theta)+p\cos(\theta)\pm|\,\mathrm{sen}(\theta)|\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}$. Se puede suponer que

$$x_{1,2}=h\,\mathrm{sen}^2(\theta)+p\cos(\theta)\pm\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}$$

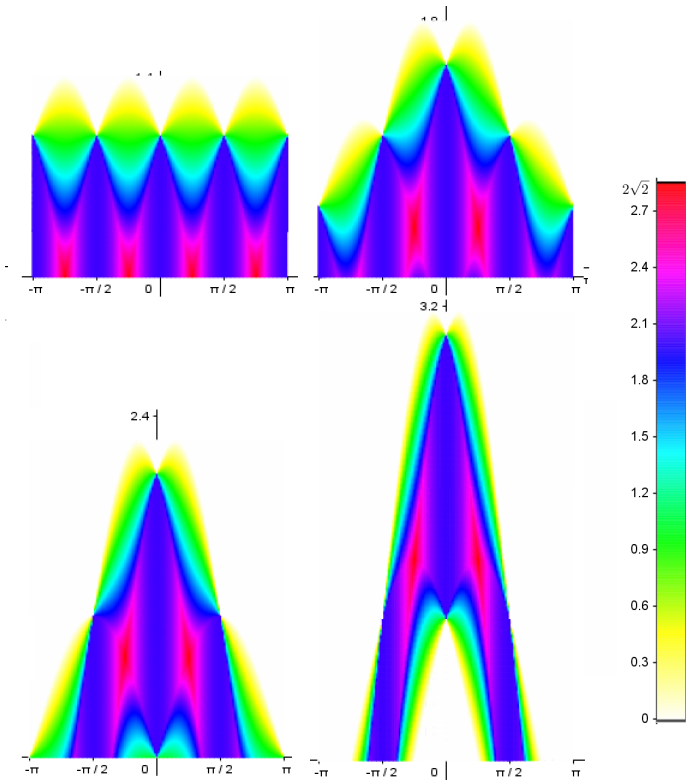


Figura 2-2.: Senograma de la transformada de un cuadrado de lado 2, con lados paralelos a los ejes y centro en $(h,\,0)$, $h = 0,\,0.5,\,1,\,2$

$$y = mx + b,\; m = -\cot(\theta),\; b = \frac{p}{\operatorname{sen}(\theta)} = p\csc(\theta)$$

Como $y = mx + b,\; m = -\cot(\theta),\; b = \frac{p}{\operatorname{sen}(\theta)} = p\csc(\theta)$,

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -\cot(\theta)\left(h\operatorname{sen}^2(\theta) + p\cos(\theta) \pm \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}\right) + p\csc(\theta) \\ &= -h\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - p\cos(\theta)\cot(\theta) \mp \cos(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} + p\csc(\theta) \\ &= -h\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\operatorname{sen}(\theta) \mp \cos(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = -2\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} \\ y_2 - y_1 = 2\cos(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} \end{cases} \Rightarrow P_2 - P_1 = 2\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}\,(-\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta))$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} -2\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}\operatorname{sen}(\theta)t + h\operatorname{sen}^2(\theta) + p\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} \\ 2\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2}\cos(\theta)t - h\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta)\sqrt{1-(\cos(\theta)h-p)^2} \end{cases}$$

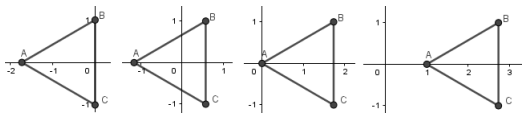


Figura 2-3.: Triángulos a los cuales se les aplicó la transformada

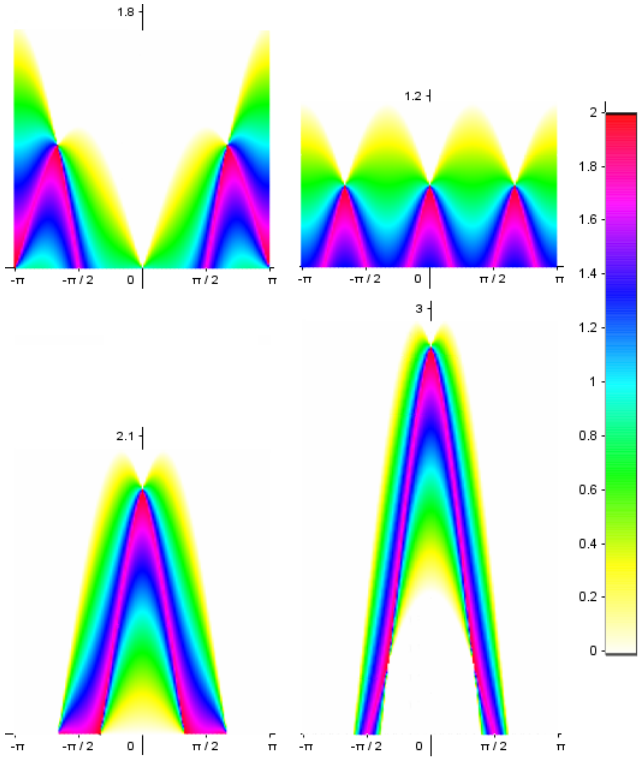


Figura 2-4.: Senogramas de la transformadas del los triángulos de la figura **2-3**

2.4. Definición de la Transformada de Radon

La Transformada de Radon de f se define integrando a lo largo de las rectas:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(\cos(\theta)x + \operatorname{sen}(\theta)y - p)dxdy, \quad \delta(x) = \text{delta de Dirac.} \tag{2-7}$$

La transformada de Radon de f se simboliza como $\check{f}$ o como $\mathfrak{R}(f)$.
Una forma equivalente de escribir la ecuación 2-7 es expresando la ecuación de la recta $\cos(\theta)x + \operatorname{sen}(\theta)y = p$ en su forma paramétrica.
Como el punto $(p\cos(\theta),\, p\operatorname{sen}(\theta))$ pertenece a la recta y $(-\operatorname{sen}(\theta),\, \cos(\theta))$ es un vector

dirección de la recta, una ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = p\cos(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Por lo cual, la transformada de Radon puede quedar expresada de la siguiente forma:

$$\Re\{f(p,\theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta), p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta))\,dt \tag{2-8}$$

Lo que se obtiene por cada recta es el área que está bajo $f(x,y)$ y sobre la recta $x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$. Como cada recta queda definida biunivocamente por la coordenada (θ, p), se obtiene es una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
En el caso particular $f(x,y) = \chi_E(x,y)$[1], $E \subset \mathbb{R}^2$ $\check{f}(p,\theta)$ es la longitud de la intersección del conjunto E y la recta $x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$, (lo que realizó en la sección anterior), entonces por la ecuación 2-6, si E es el círculo de centro $(h,0)$ de radio r

$$\check{\chi}_E(p,\,\theta) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - (\cos(\theta)h - p)^2} & \text{si } r \geq |\cos(\theta)h - p| \\ 0 & \text{si } r < |\cos(\theta)h - p| \end{cases}$$

2.5. Ejemplos de Transformadas de Radon

- Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to R$ dada por $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

  Sea $\lambda : x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$, con la parametrización: $\begin{cases} x(t) = t\,\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta) \\ y(t) = -t\cos(\theta) + p\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$

  Entonces: $\begin{cases} x'(t) = \mathrm{sen}(\theta) \\ y'(t) = -\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1$

$$f(x(t),y(t)) = e^{-(t\,\mathrm{sen}(\theta)+p\cos(\theta))^2-(-t\cos(\theta)+p\,\mathrm{sen}(\theta))^2} = e^{-t^2-p^2}$$

$$\int_\lambda f\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-p^2}dt = e^{-p^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = e^{-p^2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{p^2}}$$

[1] χ_A es la función característica, $\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}$

- Sea la función $f:\mathbb{R}^2 \to R$ y $\lambda > 1$, $f(x,y) = \begin{cases} (1-x^2-y^2)^{\lambda-1} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

  Sea $\gamma : x\cos(\theta)+y\,\text{sen}(\theta) = p$, con la parametrización: $\begin{cases} x(t) = t\,\text{sen}(\theta) + p\cos(\theta) \\ y(t) = -t\cos(\theta) + p\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$

  Entonces: $\begin{cases} x'(t) = \text{sen}(\theta) \\ y'(t) = -\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)} = 1$

  $x^2+y^2 = p^2+t^2 \Rightarrow f(x(t),y(t)) = \begin{cases} (1-p^2-t^2)^{\lambda-1} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

  $$\int_\gamma f ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_{-\sqrt{1-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} (1-p^2-t^2)^{\lambda-1} dt$$

  Aplicando el hecho de que:

  $$\int_{-a}^{a} \left(a^2-t^2\right)^{\lambda-1} dt = a^{2\lambda-1} B\left(\frac{1}{2},\lambda\right) \tag{2-9}$$

  de la integral anterior se obtiene:

  $$\begin{aligned} \int_\gamma f ds &= \left(\sqrt{1-p^2}\right)^{2\lambda-1} B\left(\frac{1}{2},\lambda\right) = \left(1-p^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(1-p^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

  La demostración de 2-9 se puede leer en los anexos C-6.

- Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x,\, y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

  Si $\theta = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\check{f}(p,\theta) = 2$.
  Considérese ahora $\theta \neq \frac{\pi}{2}k$.
  La recta $x\cos(\theta)+y\,\text{sen}(\theta) = p$ puede cortar el perímetro en cuatro tipos diferentes de puntos, dependiendo del lado al cual pertenezca:

  - Tipo 1: Corta la recta $x = -1 \Rightarrow y = p\csc(\theta)+\cot(\theta)$, $|p+\cos(\theta)| \leq |\,\text{sen}(\theta)|$.
  - Tipo 2: Corta la recta $x = 1 \Rightarrow y = p\csc(\theta) - cot(\theta)$, $|p-\cos(\theta)| \leq |\,\text{sen}(\theta)|$.
  - Tipo 3: Corta la recta $y = -1 \Rightarrow x = p\sec(\theta)+\tan(\theta)$, $|p+\text{sen}(\theta)| \leq |\cos(\theta)|$.

- Tipo 4: Corta la recta $y = 1 \Rightarrow x = p\sec(\theta) - \tan(\theta)$, $|p - \text{sen}(\theta)| \leq |\cos(\theta)|$.

Por lo anterior puede haber seis diferentes segmentos, dependiendo de los lugares en que se encuentren sus extremos. A continuación se obtienen la longitud de esos segmentos:

- Punto del Tipo 1 con punto del Tipo 2:
  Distancia de $(-1, p\csc(\theta) + cot(\theta)$ a $(1, p\csc(\theta) - \cot(\theta))$
  $\sqrt{4 + 4cot^2(\theta)} = 2|\csc(\theta)|$
- Punto del Tipo 1 con punto del Tipo 3:
  Distancia de $(-1, p\csc(\theta) + cot(\theta))$ a $(p\sec(\theta) + tan(\theta), -1)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p\sec(\theta) + tan(\theta) + 1)^2 + (p\csc(\theta) + cot(\theta) + 1)^2} \\
&= \big(p^2\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta) + 1 + 2p\sec(\theta)\tan(\theta) + 2p\sec(\theta) + 2\tan(\theta) \\
&\quad + p^2\csc^2(\theta) + \cot^2(\theta) + 1 + 2p\csc(\theta)\cot(\theta) + 2p\csc(\theta) + 2\cot(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \big(p^2\sec^2(\theta)\csc^2(\theta) + \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) \\
&\quad + 2p\sec^2(\theta)\csc(\theta) + 2p\sec(\theta)\csc^2(\theta) + 2\sec(\theta)\csc(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= |p\sec(\theta)\csc(\theta) + \sec(\theta) + \csc(\theta)|
\end{aligned}$$

- Punto del Tipo 1 con punto del Tipo 4:
  Distancia de $(-1, p\csc(\theta) + \cot(\theta))$ a $(p\sec(\theta) - \tan(\theta), 1)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p\sec(\theta) - \tan(\theta) + 1)^2 + (p\csc(\theta) + \cot(\theta) - 1)^2} \\
&= \big(p^2\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta) + 1 - 2p\sec(\theta)\tan(\theta) + 2p\sec(\theta) - 2\tan(\theta) + \\
&\quad p^2\csc^2(\theta) + \cot^2(\theta) + 1 + 2p\csc(\theta)\cot(\theta) - 2p\csc(\theta) - 2\cot(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \big(p^2\sec^2(\theta)\csc^2(\theta) + \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) - 2p\sec^2(\theta)\csc(\theta) \\
&\quad + 2p\csc^2(\theta)\sec(\theta) - 2\sec(\theta)\csc(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= |p\sec(\theta)\csc(\theta) - \sec(\theta) + \csc(\theta)|
\end{aligned}$$

- Punto del Tipo 2 con punto del Tipo 3:
  Distancia de $(1,\, p\csc(\theta) - \cot(\theta)$ a $(p\sec(\theta) + \tan(\theta),\, -1)$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p\sec(\theta) + \tan(\theta) - 1)^2 + (p\csc(\theta) - \cot(\theta) + 1)^2} \\
=&\big(p^2\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta) + 1 + 2p\sec(\theta)\tan(\theta) - 2p\sec(\theta) - 2\tan(\theta) \\
&+ p^2\csc^2(\theta) + \cot^2(\theta) + 1 - 2p\csc(\theta)\cot(\theta) + 2p\csc(\theta) - 2\cot(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
=&\big(p^2\sec^2(\theta)\csc^2(\theta) + \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) \\
&+2p\sec^2(\theta)\csc(\theta) - 2p\sec(\theta)\csc^2(\theta) - 2\sec(\theta)\csc(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
=&|p\sec(\theta)\csc(\theta) + \sec(\theta) - \csc(\theta)|
\end{aligned}$$

- Punto del Tipo 2 con punto del Tipo 4:
  Distancia de $(1, p\csc(\theta) - cot(\theta))$ a $(p\sec(\theta) - \tan(\theta), 1)$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p\sec(\theta) - tan(\theta) - 1)^2 + (p\csc(\theta) - cot(\theta) - 1)^2} \\
=&\big(p^2\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta) + 1 - 2p\sec(\theta)\tan(\theta) - 2p\sec(\theta) + 2\tan(\theta) \\
&+ p^2\csc^2(\theta) + \cot^2(\theta) + 1 - 2p\csc(\theta)\cot(\theta) - 2p\csc(\theta) + 2\cot(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
=&\big(p^2\sec^2(\theta)\csc^2(\theta) + \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) \\
&-2p\sec^2(\theta)\csc(\theta) - 2p\sec(\theta)\csc^2(\theta) + 2\sec(\theta)\csc(\theta)\big)^{\frac{1}{2}} \\
=&|p\sec(\theta)\csc(\theta) - \sec(\theta) - \csc(\theta)|
\end{aligned}$$

- Punto del Tipo 3 con punto del Tipo 4:
  Distancia de $(p\sec(\theta) + tan(\theta),\, -1)$ a $(p\sec(\theta) - \tan(\theta),\, 1)$

$$\sqrt{(2\tan(\theta))^2 + 2^2} = \sqrt{4\tan^2(\theta) + 4} = 2|\sec(\theta)|$$

Resumiendo, $\check{f}(\theta, p)$, está definida como:

$$\begin{cases}
2 & \text{si } 0 \le p \le 1 \text{ y } \theta = 0,\, \pm\frac{pi}{2},\, \pi \\
2|\csc(\theta)| & \text{si } |p + \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \text{ y } |p - \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \\
|p\sec(\theta)\csc(\theta) + \sec(\theta) + \csc(\theta)| & \text{si } |p + \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \text{ y } |p + \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)| \\
|p\sec(\theta)\csc(\theta) - \sec(\theta) + \csc(\theta)| & \text{si } |p + \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \text{ y } |p - \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)| \\
|p\sec(\theta)\csc(\theta) + \sec(\theta) - \csc(\theta)| & \text{si } |p - \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \text{ y } |p + \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)| \\
|p\sec(\theta)\csc(\theta) - \sec(\theta) - \csc(\theta)| & \text{si } |p - \cos(\theta)| \le |\operatorname{sen}(\theta)| \text{ y } |p - \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)| \\
2|\sec(\theta)| & \text{si } |p + \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)| \text{ y } |p - \operatorname{sen}(\theta)| \le |\cos(\theta)|
\end{cases}$$

2.6. Propiedades básicas de la Transformada de Radon

$$\text{Sea } \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = p\cos(\theta) - t\,\text{sen}(\theta) \\ y(t) = p\,\text{sen}(\theta) + t\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow |\gamma'(t)| = 1$$

Monotonía: $f \geq 0 \Rightarrow \mathfrak{R}\{f\}(p,\theta) \geq 0$

Esta propiedad es una consecuencia directa del teorema de cálculo integral:

$$\text{Si } f(x) \geq g(x)\,\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f(x,y) \geq & 0 & \Rightarrow \\ f(p\cos(\theta) - t\,\text{sen}(\theta), p\,\text{sen}(\theta) + t\cos(\theta)) \geq & 0 & \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta) - t\,\text{sen}(\theta), p\,\text{sen}(\theta) + t\cos(\theta)) \geq & \int_{-\infty}^{\infty} 0 & \Rightarrow \\ \mathfrak{R}\{f\}(p,\theta) \geq & 0 \end{aligned}$$

□

Simetría: $\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta) = \mathfrak{R}\{f\}(-p,\theta+\pi)$

La recta definida por $(-p,\theta+\pi)$ es la misma que recta definida por (p,θ):

$$\begin{aligned} x\cos(\theta+\pi) + y\,\text{sen}(\theta+\pi) &= -p \\ -x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta) &= -p \\ x\cos(\theta) + y\,\text{sen}(\theta) &= p \end{aligned}$$

Por lo tanto las integrales sobre la recta deben ser iguales.

$$\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta) - t\,\text{sen}(\theta), p\,\text{sen}(\theta) + t\cos(\theta))\,dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\{f\}(-p,\theta+\pi)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} f(-p\cos(\theta+\pi)-t\,\mathrm{sen}(\theta+\pi),-p\,\mathrm{sen}(\theta+\pi)+t\cos(\theta+\pi))\,dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta)+t\,\mathrm{sen}(\theta),p\,\mathrm{sen}(\theta)-t\cos(\theta))\,dt
\end{aligned}$$

Se hace el cambio de variable $\bar{t}=-t\Rightarrow d\bar{t}=-dt\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\{f\}(-p,\theta+\pi)\\
&=-\int_{\infty}^{-\infty} f(p\cos(\theta)-\bar{t}\,\mathrm{sen}(\theta),p\,\mathrm{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta))\,d\bar{t}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta)-\bar{t}\,\mathrm{sen}(\theta),p\,\mathrm{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta))\,d\bar{t}=\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)\quad\square
\end{aligned}$$

Linealidad: $\mathfrak{R}\{f+kg\}(p,\theta)=\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)+k\mathfrak{R}\{g\}(p,\theta)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}\{f+kg\}(p,\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}(f+kg)(\gamma(t))\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t))+kg(\gamma(t))\,dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t))\,dt+k\int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma(t))\,dt\\
&=\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)+k\mathfrak{R}\{g\}(p,\theta)
\end{aligned}$$

Desplazamiento:
$h(x,y)=f(x-x_0,y-y_0)\Rightarrow\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta)=\mathfrak{R}\{f\}(p-x_0\cos\theta-y_0\,\mathrm{sen}(\theta),\theta)$

Si $h(x,y)=f(x-x_0,y-y_0)\Rightarrow\mathfrak{R}\{h\}(\theta,p)=\mathfrak{R}\{f\}(\theta,p-x_0\cos\theta-y_0\,\mathrm{sen}(\theta))$
Sea $\vec{\xi}=\langle\cos(\theta),\mathrm{sen}(\theta)\rangle$.
Si la función $f(x,y)$ se desplaza en la dirección del vector $\vec{v}=\langle x_0,y_0\rangle$, su ecuación resultante sería $h(x,y)=f(x-x_0,y-y_0)$.
La imagen de la recta $L:\cos(\theta)x+\mathrm{sen}(\theta)y=p$ bajo la transformación $\check{h}$, debe ser la misma que la imagen de $\check{f}$ cuando se evalúa en la recta L trasladada $-\vec{v}$.
La ecuación de L trasladada $-\vec{v}$ es $\cos(\theta)x+\mathrm{sen}(\theta)y=p-\vec{\xi}\cdot\vec{v}$, por lo tanto se debe cumplir:

$$\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta)=\mathfrak{R}\{f\}(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v},\theta)$$

Demostración.

$$\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta)-t\,\mathrm{sen}(\theta),p\,\mathrm{sen}(\theta)+t\cos(\theta))\,dt$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\{f\}\left(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v},\theta\right)\\
=&\int_{-\infty}^{\infty} f((p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})\cos(\theta)-t\,\mathrm{sen}(\theta),(p-\vec{v}\cdot\vec{\xi})\,\mathrm{sen}(\theta)+t\cos(\theta))\,dt\\
=&\int_{-\infty}^{\infty} h((p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})\cos(\theta)-t\,\mathrm{sen}(\theta)+x_0,(p-\vec{v}\cdot\vec{\xi})\,\mathrm{sen}(\theta)+t\cos(\theta)+y_0)dt
\end{aligned} \tag{2-10}$$

Se hace el cambio de variable $t=\bar{t}+x_0\,\mathrm{sen}(\theta)-y_0\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
&(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})\cos(\theta)-t\,\mathrm{sen}(\theta)+x_0\\
=&(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})\cos(\theta)-(\bar{t}+x_0\,\mathrm{sen}(\theta)-y_0\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)+x_0\\
=&p\cos(\theta)-x_0\cos^2(\theta)-y_0\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)-\bar{t}\,\mathrm{sen}(\theta)-x_0\,\mathrm{sen}^2(\theta)\\
&+y_0\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+x_0\\
=&p\cos(\theta)-\bar{t}\,\mathrm{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{2-11}$$

$$\begin{aligned}
&(p-\vec{v}\cdot\vec{\xi})\,\mathrm{sen}(\theta)+t\cos(\theta)+y_0\\
=&(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})\,\mathrm{sen}(\theta)+(\bar{t}+x_0\,\mathrm{sen}(\theta)-y_0\cos(\theta))\cos(\theta)+y_0\\
=&p\,\mathrm{sen}(\theta)-x_0\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)-y_0\,\mathrm{sen}^2(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)+x_0\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\\
&-y_0\cos^2(\theta)+y_0\\
=&p\,\mathrm{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{2-12}$$

Sustituyendo 2-11 y 2-12 en 2-10 se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\{f\}\left(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v},\theta\right)=\\
=&\int_{-\infty}^{\infty} h(p\cos(\theta)-\bar{t}\,\mathrm{sen}(\theta),p\,\mathrm{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta))\,d\bar{t}=\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta)
\end{aligned}$$

□

A continuación se hace la demostración con otra definición de transformada de Radon:

$$\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x-x_0,y-y_0)\delta\left(x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)-p\right)\,dxdy$$

Demostración. Se hacen los cambios de variable $u=x-x_0$ e $v=y-y_0$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\left\{h\right\}(p,\theta) = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v)\delta\left((u+x_0)\cos(\theta)+(v+y_0)\operatorname{sen}(\theta)-p\right)\,dudv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v)\delta\left(u\cos(\theta)+v\operatorname{sen}(\theta)-(p-x_0\cos(\theta)-y_0\operatorname{sen}(\theta))\right)\,dudv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\delta\left(x\cos(\theta)+y\operatorname{sen}(\theta)-(p-x_0\cos(\theta)-y_0\operatorname{sen}(\theta))\right)\,dxdy \\
&= \check{f}(p-x_0\cos(\theta)-y_0\operatorname{sen}(\theta),\,\theta) = \check{f}(p-\langle x_0,y_0\rangle\cdot\langle\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta)\rangle\,,\,\theta) \\
&= \check{f}(p-\vec{\xi}\cdot\vec{v})
\end{aligned}
$$

□

Escalado $f(kx,ky)$

Sea $h(x,y) = f\left(kx,ky\right) \Rightarrow \mathfrak{R}\left\{h\right\}(p,\theta) = |k|\mathfrak{R}\left\{f\right\}(kp,\theta)$

Demostración.

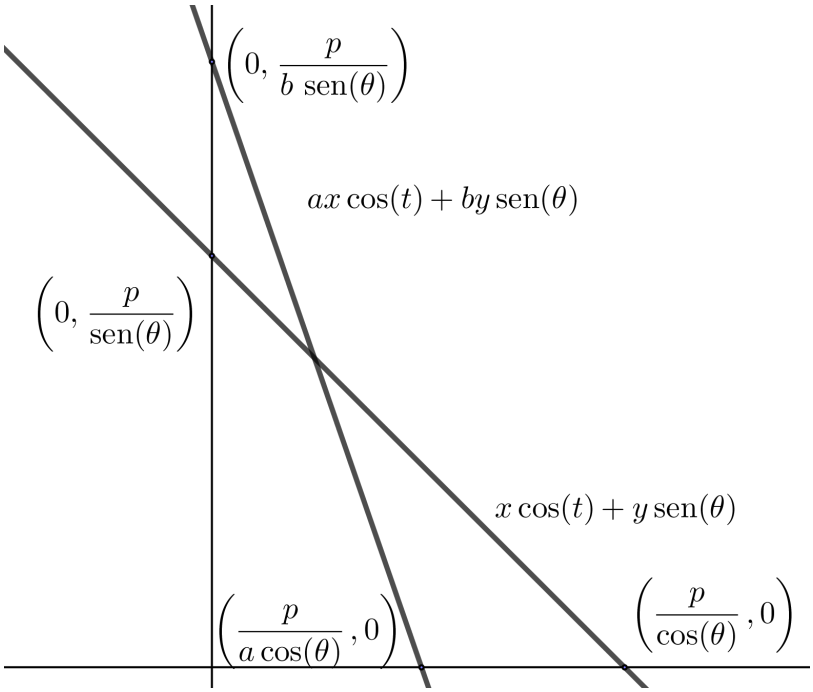
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}\left\{f\left(kx,ky\right)\right\}(p,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(k\left(p\cos(\theta)-t\operatorname{sen}(\theta)\right),k\left(p\operatorname{sen}(\theta)+t\cos(\theta)\right)\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(pk\cos(\theta)-tk\operatorname{sen}(\theta),pk\operatorname{sen}(\theta)+tk\cos(\theta)\right)dt \qquad (2\text{-}13)
\end{aligned}
$$

Sea hace el cambio de variable $\bar{t} = tk \Rightarrow d\bar{t} = k\,dt \Rightarrow \frac{1}{k}\,d\bar{t} = dt$. Sustituyendo en 2-13 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\left\{f\left(kx,ky\right)\right\}(p,\theta) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(kp\cos(\theta)-\bar{t}\operatorname{sen}(\theta),kp\operatorname{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)\right)d\bar{t} & \text{si } k\geq 0 \\ \frac{1}{k}\int_{\infty}^{-\infty} f\left(kp\cos(\theta)-\bar{t}\operatorname{sen}(\theta),kp\operatorname{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)\right)d\bar{t} & \text{si } k\leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(kp\cos(\theta)-\bar{t}\operatorname{sen}(\theta),kp\operatorname{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)\right)d\bar{t} & \text{si } k\geq 0 \\ -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(kp\cos(\theta)-\bar{t}\operatorname{sen}(\theta),kp\operatorname{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)\right)d\bar{t} & \text{si } k\leq 0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(kp\cos(\theta)-\bar{t}\operatorname{sen}(\theta),kp\operatorname{sen}(\theta)+\bar{t}\cos(\theta)\right)d\bar{t} \\
&= \frac{1}{|k|}\mathfrak{R}\left\{f\right\}(pk,\theta)
\end{aligned}
$$

□

Escalado $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$



Sea L una recta no paralela a los ejes $L : x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$. En los puntos $\left(\frac{p}{\cos(\theta)}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{p}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)$ la recta L intercepta a los ejes X y Y respectivamente.
Si se tiene la recta $\overline{L} : ax\cos(\theta) + by\,\mathrm{sen}(\theta) = p$, los puntos de intercepción con los ejes son $\left(\frac{p}{a\cos(\theta)}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{p}{b\,\mathrm{sen}(\theta)}\right)$
La meta es expresar a $\overline{L}$ en su forma normal $\overline{L} : x\cos(\overline{\theta}) + y\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) = \overline{p}$, por lo cual a continuación se calculará $\overline{\theta}$ y $\overline{p}$.

$$\cos(\overline{\theta}) = \frac{\overline{p}}{\frac{p}{a\cos(\theta)}} = \frac{a\overline{p}\cos(\theta)}{p} \tag{2-14}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \overline{\theta}\right) = \mathrm{sen}(\overline{\theta}) = \frac{\overline{p}}{\frac{p}{b\,\mathrm{sen}(\theta)}} = \frac{b\overline{p}\,\mathrm{sen}(\theta)}{p} \tag{2-15}$$

$$\tan(\overline{\theta}) = \frac{\mathrm{sen}(\overline{\theta})}{\cos(\overline{\theta})} = \frac{\frac{b\overline{p}\,\mathrm{sen}(\theta)}{p}}{\frac{a\overline{p}\cos(\theta)}{p}} = \frac{b\,\mathrm{sen}(\theta)}{a\cos(\theta)} = \frac{b}{a}\tan(\theta) \tag{2-16}$$

$$\overline{\theta} = \begin{cases} \frac{b}{a}\arctan(\theta) & \text{si } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{b}{a}\arctan(\theta) + \pi & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi] - \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Para calcular $\overline{p}$ usemos la ecuación 2-14:

$$\begin{aligned}
\cos(\overline{\theta}) =& \frac{a\overline{p}\cos(\theta)}{p} \Rightarrow \overline{p} = \frac{p\cos(\overline{\theta})}{a\cos(\theta)} \Rightarrow \overline{p}^2 = \frac{p^2\cos^2(\overline{\theta})}{a^2\cos^2(\theta)} = \frac{p^2}{a^2\sec^2(\overline{\theta})\cos^2(\theta)} \Rightarrow \\
\overline{p}^2 =& \frac{p^2}{a^2\left(1+\tan^2(\overline{\theta})\right)\cos^2(\theta)} = \frac{p^2}{a^2\left(1+\tan^2(\overline{\theta})\right)\cos^2(\theta)} \\
& \text{Usando } 2-16 \\
\overline{p}^2 =& \frac{p^2}{a^2\left(1+\left(\frac{b}{a}\tan(\theta)\right)^2\right)\cos^2(\theta)} = \frac{p^2}{(a^2+b^2\tan^2(\theta))\cos^2(\theta)} \\
=& \frac{p^2}{a^2\cos^2(\theta)+b^2\operatorname{sen}^2(\theta)} \\
\overline{p} =& \frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\operatorname{sen}^2(\theta)}}
\end{aligned}$$

En conclusión, si a la recta $L(x,y) : x\cos(\theta)+y\operatorname{sen}(\theta) = p$ se le aplica la transformación $L(ax,by) = \overline{L} : ax\cos(\theta)+by\operatorname{sen}(\theta) = p$, la recta resultante es equivalente a

$$\cos(\overline{\theta})x + \operatorname{sen}(\overline{\theta})y = \overline{p} \tag{2-17}$$

$$\overline{p} = \frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\operatorname{sen}^2(\theta)}} \tag{2-18}$$

$$\overline{\theta} = \begin{cases} \frac{b}{a}\arctan(\theta) & \text{si } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{b}{a}\arctan(\theta)+\pi & \text{si } \theta \in [-\pi,\pi] - \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Sea $h(x,y) = f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$. Para obtener la transformada de Radon de h en función de la transformada de Radon de f se hará uso de 2-14 y 2-15. En las tres ecuaciones aparece el factor $\frac{\overline{p}}{p}$ el cual, por 2-18 es equivalente a

$$\frac{\overline{p}}{p} = \frac{\frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\operatorname{sen}^2(\theta)}}}{p} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\operatorname{sen}^2(\theta)}}$$

Por comodidad sea $L = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}$.
Por 2-14 y 2-15 se obtienen las ecuaciones:

$$\cos(\overline{\theta}) = \frac{a\overline{p}\cos(\theta)}{p} = aL\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\cos(\overline{\theta})}{aL} \tag{2-19}$$

$$\mathrm{sen}(\overline{\theta}) = \frac{b\overline{p}\,\mathrm{sen}(\theta)}{p} = bL\,\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow \mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{sen}(\overline{\theta})}{bL} \tag{2-20}$$

$$\Re\{h\}(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(p(\cos\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta), p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta)\right) dt \tag{2-21}$$

Sustituyendo $\mathrm{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ por $2-19$ y $2-20$: (2-22)

$$\Re\{h\}(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(p\frac{1}{aL}\cos(\overline{\theta}) - t\frac{1}{bL}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}), p\frac{1}{bL}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) + t\frac{1}{aL}\cos(\overline{\theta})\right) dt \tag{2-23}$$

$$\Re\{h\}(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(p\frac{1}{a^2L}\cos(\overline{\theta}) - t\frac{1}{abL}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}), p\frac{1}{b^2}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) + t\frac{1}{abL}\cos(\overline{\theta})\right) dt \tag{2-24}$$

$$\text{Cambio de variable } \overline{t} = \frac{1}{abL}t \Rightarrow abL\,d\overline{t} = dt \Rightarrow \tag{2-25}$$

$$\Re\{h\}(p,\theta) = abL\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{p}{a^2L}\cos(\overline{\theta}) - \overline{t}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}), \frac{p}{b^2L}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) + \overline{t}\cos(\overline{\theta})\right) d\overline{t} \tag{2-26}$$

Nótese que la integral de línea 2-26 es sobre la recta M $\begin{cases} x = \frac{p}{a^2L}\cos(\overline{\theta}) - \overline{t}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) \\ y = \frac{p}{b^2L}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) + \overline{t}\cos(\overline{\theta}) \end{cases}$ y además pasa por el punto $Q = \left(\frac{p}{a^2L}\cos(\overline{\theta}), \frac{p}{b^2L}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta})\right)$.
Se demostrará que Q pertenece a la recta $\overline{L}$ con su ecuación 2-17 sustituyendo las variables x e y por las coordenadas de Q:

$$\begin{aligned}\cos(\overline{\theta})x + \mathrm{sen}(\overline{\theta})y &= \cos(\overline{\theta})\cdot\frac{p}{a^2L}\cos(\overline{\theta}) + \mathrm{sen}(\overline{\theta})\cdot\frac{p}{b^2L}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) \\ &= \frac{p}{L}\left(\frac{\cos^2(\overline{\theta})}{a^2} + \frac{\mathrm{sen}^2(\overline{\theta})}{b^2}\right)\end{aligned}$$

Por 2-19 y 2-20:

$$\begin{aligned}\cos(\overline{\theta})x + \mathrm{sen}(\overline{\theta})y &= \frac{p}{L}\left(\frac{a^2L^2\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{b^2L^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{b^2}\right) = pL \\ &= \frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}} = \overline{p} \quad \therefore Q \in \overline{L}\end{aligned}$$

Nótese adicionalmente que $\overline{L}$ y M son paralelas, y como $Q \in \overline{L} \cap M$, L y M son la misma recta, por lo tanto de

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta) =& abL\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\overline{p}\cos(\overline{\theta}) - \overline{t}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}), \overline{p}\,\mathrm{sen}(\overline{\theta}) + \overline{t}\cos(\overline{\theta})\right) d\overline{t} \\ =& abL\mathfrak{R}\{f\}\left(\overline{p},\overline{\theta}\right) \\ =& abL\mathfrak{R}\{f\}\left(pL,\overline{\theta}\right)\end{aligned}$$

Por lo cual, se concluye el resultado esperado: Si $h(x,y) = f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ se tiene que:

$$\mathfrak{R}\{h\}(p,\theta) = abL\mathfrak{R}\{f\}\left(pL,\overline{\theta}\right)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}} \text{ y } \overline{\theta} = \begin{cases} \frac{b}{a}\arctan(\theta) & \text{si } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{b}{a}\arctan(\theta) + \pi & \text{si } \theta \in [-\pi,\pi] - \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

2.7. Transformada de Fourier de la transformada de Radon

La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua e integrable se define respectivamente como

$$\mathfrak{F}_1\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iux}dx \tag{2-27}$$

$$\mathfrak{F}_2\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-2\pi i(ux+vy)}dxdy \tag{2-28}$$

y las respectivas transformadas inversas de Fourier son:

$$\mathfrak{F}_1^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi iux}du \tag{2-29}$$

$$\mathfrak{F}_2^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{2\pi i(ux+vy)}dudv \tag{2-30}$$

Considere la transformada de Radon $\mathfrak{R}\{f(p,\,\theta)\}$ con θ constante. Para evitar confusiones se simboliza esta transformación como $\mathfrak{R}_\theta\{f(p,\theta)\}$. La transformada de ésta

es:

$$\mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}_\theta\{f(p,\,\theta)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_\theta\{f(p,\,\theta)\}e^{-2\pi iup}dp \tag{2-31}$$

Por la definición de la transformada de Radon 2-8 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}_\theta\{f(p,\,\theta)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta),\, p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta))dt\, e^{-2\pi iup}dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta),\, p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta))e^{-2\pi iup}dt\, dp\end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $x = p\cos(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta);\ y = p\,\mathrm{sen}(\theta) + t\cos(\theta)$
se obtiene $p = x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_\theta\{f(p,\,\theta)\}e^{-2\pi iup}dp &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\,y)e^{-2\pi i(x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta))u}dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\,y)e^{-2\pi i(xu\cos(\theta)+yu\,\mathrm{sen}(\theta))}dx\,dy \\ &= F(u\cos(\theta),\, u\,\mathrm{sen}(\theta)) \text{ siendo } F = \mathfrak{F}_2\{f\}\end{aligned}$$

Concluyendo se obtienen las siguientes igualdades:

$$\mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}_\theta\{f(p,\theta)\}\} = \mathfrak{F}_2\{f(x,y)\}|_{(u\cos(\theta),\, u\,\mathrm{sen}(\theta))} \tag{2-32}$$

A la ecuación 2-32 se le llama Teorema de corte de Fourier (*Fourier slice Theorem*). Ahora se hará otra demostración usando la otra definición de la transformada de Radon.

$$\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(\cos(\theta)x + \mathrm{sen}(\theta)y - p)dxdy$$

Siendo $\delta(x)$ la función delta de Dirac.

La recta $\cos(\theta)x + \mathrm{sen}(\theta)y - p = 0$ en coordenadas polares polares (r,ϕ) es

$$r\cos(\theta)\cos(\phi) + r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) - p = r\cos(\phi-\theta) - p = 0$$

$$\mathfrak{R}\{f(x,y)\}(p,\theta) = \mathfrak{R}\{f(r,\phi)\}(p,\theta) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\delta(p - r\cos(\phi-\theta))rd\phi dr$$

Si se aplica la transforma de Fourier a la tranformada de Radon tomando a θ como una constante se obtiene.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)\}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)e^{-2\pi i\xi p}dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r,\phi)\delta(p - r\cos(\phi-\theta))rd\phi dr \right) e^{-2\pi i\xi p}dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r,\phi)\delta(p - r\cos(\phi-\theta))e^{-2\pi i\xi p}rd\phi drdp \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r,\phi)\delta(p - r\cos(\phi-\theta))e^{-2\pi i\xi p}rdpd\phi dr \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r,\phi)r \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - r\cos(\phi-\theta))e^{-2\pi i\xi p}dp \right) d\phi dr
\end{aligned}$$

Por la propiedad de la función δ: $\int_a^b \delta(t-\alpha)\cdot f(t)dt = \begin{cases} f(\alpha) & a<\alpha<b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - r\cos(\phi-\theta))e^{-2\pi i\xi p} = e^{-2\pi i\xi r\cos(\phi-\theta)}$$

Por lo tanto:

$$\mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)\}(\xi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r,\phi)re^{-2\pi i\xi r\cos(\phi-\theta)}d\phi dr$$

Ahora se desarrollará la transformada de Fourier en dos dimensiones:

$$\mathfrak{F}_2\{f(x,y)\}(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-2\pi i(\xi_1 x+\xi_2 y)}dxdy$$

Se cambiarán a coordenadas polares las variables (x,y):

$$x = r\cos(\phi) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_2\{f(x,y)\}(\xi_1,\xi_2) =& \mathfrak{F}_2\{f(r,\phi)\}(\xi_1,\xi_2)\\ =& \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)e^{-2\pi i(\xi_1 r\cos(\phi)+\xi_2 r\,\mathrm{sen}(\phi))}rd\phi dr\end{aligned}$$

Se hace el cambio de las variables (ξ_1,ξ_2):

$$\xi_1 = \xi\cos(\theta) \qquad \xi_2 = \xi\,\mathrm{sen}(\theta)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}_2\{f(x,y)\}\left(\xi\cos(\theta),\xi\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)e^{-2\pi i\xi r(\cos(\theta)\cos(\phi)+\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi))}rd\phi dr\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\phi)e^{-2\pi i\xi r\cos(\phi-\theta)}rd\phi dr\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathfrak{F}_1\{\mathfrak{R}\{f\}(p,\theta)\}(\xi) = \mathfrak{F}_2\{f(x,y)\}\left(\xi\cos(\theta),\xi\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \qquad \square$$

2.8. Transformada discreta y rápida de Fourier

La transformada de Fourier para una función continua $f(t)$ se define como

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\pi tikw}dt$$

El problema de la definición anterior es que la función f debe ser continua y en la práctica sólo se tiene un conjunto finito de puntos $f(t_0)$, $f(t_1),\ldots,$ $f(t_{N-1})$. Por lo cual es necesario definir la Transformada Discreta de Fourier (TDF) , la cual se define como:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-nki\frac{2\pi}{N}} \tag{2-33}$$

y la transformada discreta inversa de Fourier se define como:

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{nki\frac{2\pi}{N}} \tag{2-34}$$

Como ejemplo, se calculará la TDF para $f(x) = 5+2\,\mathrm{sen}(2\pi x)+3\cos(4\pi x)$, con cuatro valores, es decir $N=4$, siendo estos $t_0=0$, $t_1=\frac{1}{4}$, $t_2=\frac{1}{2}$, $t_3=\frac{3}{4}$, entonces:

$f(t_0) = f(0) = 8,\ f(t_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 4,\ f(t_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 8,\ f(t_3) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$

$$
\begin{aligned}
N =& 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\
e^{-\frac{\pi k}{2} i} =& \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) = (-i)^k \Rightarrow e^{-kni\frac{\pi}{2}} = \left(e^{-ik\frac{\pi}{2}}\right)^n = (-i)^{kn} \\
F(k) =& \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\pi nik\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{3} f(n)(-i)^{kn} \\
F(0) =& \sum_{n=0}^{3} f(n)(-i)^0 \\
=& 8\cdot(-i)^0 + 4\cdot(-i)^0 + 8\cdot(-i)^0 + 0\cdot(-i)^0 = 8+4+8+0 = 20. \\
F(1) =& \sum_{n=0}^{3} f(n)(-i)^n \\
=& 8\cdot(-i)^0 + 4\cdot(-i)^1 + 8\cdot(-i)^2 + 0\cdot(-i)^3 = 8-4i-8+0 = -4i. \\
F(2) =& \sum_{n=0}^{3} f(n)(-i)^{2n} = 8\cdot(-i)^0 + 4\cdot(-i)^2 + 8\cdot(-i)^4 + 0\cdot(-i)^6 \\
=& 8-4+8+0 = 12. \\
F(3) =& \sum_{n=0}^{3} f(n)(-i)^{3n} \\
=& 8\cdot(-i)^0 + 4\cdot(-i)^3 + 8\cdot(-i)^6 + 0\cdot(-i)^9 = 8+4\cdot i-8+0 = 4i.
\end{aligned}
$$

A continuación se calcula la transformada inversa:

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{\pi k}{2}i} &= \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) = i^k \Rightarrow e^{kni\frac{2\pi}{N}} = \left(e^{-ki\frac{2\pi}{N}}\right)^n = i^{kn} \\
f(k) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)e^{kni\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} F(n)i^{kn} \Rightarrow 4f(k) = \sum_{n=0}^{3} F(n)i^{kn} \\
4f(0) &= \sum_{n=0}^{3} F(n)\, i^0 = 20\cdot i^0 + (-4i)\cdot i^0 + 12\cdot i^0 + 4i\cdot i^0 = 32 \qquad \Rightarrow f(0) = 8 \\
4f(1) &= \sum_{n=0}^{3} F(n)\, i^n = 20\cdot i^0 + (-4i)\cdot i^1 + 12\cdot i^2 + 4i\cdot i^3 = 16 \qquad \Rightarrow f(1) = 4 \\
4f(2) &= \sum_{n=0}^{3} F(n)\, i^{2n} = 20\cdot i^0 + (-4i)\cdot i^2 + 12\cdot i^4 + 4i\cdot i^6 = 32 \qquad \Rightarrow f(2) = 8 \\
4f(3) &= \sum_{n=0}^{3} F(n)\, i^{3n} = 20\cdot i^0 + (-4i)\cdot i^3 + 12\cdot i^6 + 4i\cdot i^9 = 0 \qquad \Rightarrow f(3) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} i^0 & i^0 & i^0 & i^0 \\ i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \\ i^0 & i^2 & i^4 & i^6 \\ i^0 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 20 \\ -4i \\ 12 \\ 4i \end{pmatrix}
$$

Ahora se analizará la expansión de la transformada discreta inversa de Fourier 2-34.

$$
\begin{aligned}
&\text{Sea } w_n = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^n \\
Nf(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{kni\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\left(\left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^n\right)^k = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)w_n^k \\
Nf(0) &= F(0)w_0^0 + F(1)w_0^1 + F(2)w_0^2 + F(3)w_0^3 + \cdots + F(N-1)w_0^{N-1} \\
Nf(1) &= F(0)w_1^0 + F(1)w_1^1 + F(2)w_1^2 + F(3)w_1^3 + \cdots + F(N-1)w_1^{N-1} \\
Nf(2) &= F(0)w_2^0 + F(1)w_2^1 + F(2)w_2^2 + F(3)w_2^3 + \cdots + F(N-1)w_2^{N-1} \\
&\vdots \\
Nf(N-1) &= F(0)w_{N-1}^0 + F(1)w_{N-1}^1 + F(2)w_{N-1}^2 + \cdots + F(N-1)w_{N-1}^{N-1}
\end{aligned}
$$

Nótese que calcular $Nf(n)$ es lo mismo que evaluar a w_n en el polinomio

$$Q(z) = F(0) + F(1)z + F(2)z^2 + F(3)z^3 + \cdots + F(N-1)z^{N-1}$$

La cantidad de operaciones necesarias para evaluar un polinomio de grado $N-1$ son N, se tiene que evaluar el polinomio N veces, por lo cual se necesitan un total del N^2 operaciones para obtener la Transformada Discreta de Fourier así como su inversa.
A continuación se estudiará una manera de agilizar la evaluación de $Q(w_n)$.

El polinomio se puede dividir en dos partes, los términos de grado par y los términos de grado impar, esto es:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k} (x^2)^k + x \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k+1} (x^2)^k \end{aligned}$$

Si se nombran $Q_p(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k} x^k$, $\quad Q_i(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2k+1} x^k \quad$ y $w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$
$Q(x) = Q_p(x^2) + xQ_i(x^2)$
Por otra parte, si N es par, $w^{n+N/2} = -w^n$, ya que:
$w^{n+N/2} = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^{n+N/2} = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^{n} \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^{\frac{N}{2}} = w^n e^{\pi i} = -w^n.$
Por lo tanto:
$Q(w^{n+N/2}) = Q_p\left(\left(w^{n+N/2}\right)^2\right) + w^{n+N/2} Q_i\left(\left(w^{n+N/2}\right)^2\right) = Q_p\left((w^n)^2\right) - w^n Q_i\left((w^n)^2\right)$
En resumen, se tiene que:

$$Q(w^n) = Q_p\left((w^n)^2\right) + w^n Q_i\left((w^n)^2\right) \tag{2-35}$$

$$Q(w^{n+N/2}) = Q_p\left((w^n)^2\right) - w^n Q_i\left((w^n)^2\right) \tag{2-36}$$

Si se considera a N como una potencia de 2, usando las ecuaciones 2-35 y 2-36 se puede crear un algoritmo recursivo para calcular $Q(w^n)$.

Entrada: $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_{N-1})$, donde N es una potencia de 2.
Salida: $(Q(w^0), Q(w^1), Q(w^2), \ldots, Q(w^{N-1}))$, siendo $w = e^{2\pi i/N}$.

función FFT($(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, n : entero, w : complejo): arreglo de tamaño n
variables
Q_p, Q_i: arreglo de tamaño $n/2$
Q: arreglo de tamaño n
k: entero;
inicio
si n=1 **entonces**
inicio
$Q[0] = a_0$;
fin
en caso contrario
inicio
Q_p = FFT($(a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2})$, $n/2$, w^2);
Q_i = FFT($(a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1})$, $n/2$, w^2);
k:=0;
repetir $n/2$ **veces**
inicio
$Q[k] = Q_p[k] + w^k \times Q_i[k]$;
$Q[k + n/2] = Q_p[k] - w^k \times Q_i[k]$;
k:=k+1;
fin;
fin;
regresa Q;
fin;
programa principal
inicio
FFT($(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{N-1})$, N, $e^{2\pi i/N}$);
fin.

Considere el polinomio:

$$Q(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + F_6x^6 + F_7x^7$$

<table>
<tr><td colspan="8">$[F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, w]$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$[F_0, F_2, F_4, F_6, w^2]$</td><td colspan="4">$[F_1, F_3, F_5, F_7, w^2]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$[F_0, F_4, w^4]$</td><td colspan="2">$[F_2, F_6, w^4]$</td><td colspan="2">$[F_1, F_5, w^4]$</td><td colspan="2">$[F_3, F_7, w^4]$</td></tr>
<tr><td>$[F_0, w^8]$</td><td>$[F_4, w^8]$</td><td>$[F_2, w^8]$</td><td>$[F_6, w^8]$</td><td>$[F_1, w^8]$</td><td>$[F_5, w^8]$</td><td>$[F_3, w^8]$</td><td>$[F_7, w^8]$</td></tr>
<tr><td>$q[0] = F_0$</td><td>$q[0] = F_4$</td><td>$q[0] = F_2$</td><td>$q[0] = F_6$</td><td>$q[0] = F_1$</td><td>$q[0] = F_5$</td><td>$q[0] = F_3$</td><td>$q[0] = F_7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$q[0] = F_0 + F_4$
$q[1] = F_0 - F_4$</td><td colspan="2">$q[0] = F_2 + F_6$
$q[1] = F_2 - F_6$</td><td colspan="2">$q[0] = F_1 + F_5$
$q[1] = F_1 - F_5$</td><td colspan="2">$q[0] = F_3 + F_7$
$q[1] = F_3 - F_7$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$q[0] = F_0 + F_4 + F_2 + F_6$
$q[1] = F_0 - F_4 + F_2w^2 - F_6w^2$
$q[2] = F_0 + F_4 - F_2 - F_6$
$q[3] = F_0 - F_4 - F_2w^2 + F_6w^2$</td><td colspan="4">$q[0] = F_1 + F_5 + F_3 + F_7$
$q[1] = F_1 - F_5 + F_3w^2 - F_7w^2$
$q[2] = F_1 + F_5 - F_3 - F_7$
$q[3] = F_1 - F_5 - F_3w^2 + F_7w^2$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$q[0] = F_0 + F_4 + F_2 + F_6 + F_1 + F_5 + F_3 + F_7$
$q[1] = F_0 - F_4 + F_2w^2 - F_6w^2 + F_1w - F_5w + F_3w^3 - F_7w^3$
$q[2] = F_0 + F_4 - F_2 - F_6 + F_1w^2 + F_5w^2 - F_3w^2 - F_7w^2$
$q[3] = F_0 - F_4 - F_2w^2 + F_6w^2 + F_1w^3 - F_5w^3 - F_3w^5 + F_7w^5$
$q[4] = F_0 + F_4 + F_2 + F_6 - F_1 - F_5 - F_3 - F_7$
$q[5] = F_0 - F_4 + F_2w^2 - F_6w^2 - F_1w + F_5w - F_3w^3 + F_7w^3$
$q[6] = F_0 + F_4 - F_2 - F_6 - F_1w^2 - F_5w^2 + F_3w^2 + F_7w^2$
$q[7] = F_0 - F_4 - F_2w^2 + F_6w^2 - F_1w^3 + F_5w^3 + F_3w^5 - F_7w^5$</td></tr>
</table>

$$
\begin{aligned}
Q(w^0) =& Q(1) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = q[0] \\
Q(w) =& F_0 + F_1 w + F_2 w^2 + F_3 w^3 + F_4 w^4 + F_5 w^5 + F_6 w^6 + F_7 w^7 \\
=& F_0 + F_1 w + F_2 w^2 + F_3 w^3 - F_4 - F_5 w - F_6 w^2 - F_7 w^3 = q[1] \\
Q(w^2) =& F_0 + F_1 w^2 + F_2 w^4 + F_3 w^6 + F_4 w^8 + F_5 w^{10} + F_6 w^{12} + F_7 w^{14} \\
=& F_0 + F_1 w^2 - F_2 - F_3 w^2 + F_4 + F_5 w^2 - F_6 - F_7 w^2 = q[2] \\
Q(w^3) =& F_0 + F_1 w^3 + F_2 w^6 + F_3 w^9 + F_4 w^{12} + F_5 w^{15} + F_6 w^{18} + F_7 w^{21} \\
=& F_0 + F_1 w^3 - F_2 w^2 - F_3 w^5 - F_4 - F_5 w^3 + F_6 w^2 + F_7 w^5 = q[3] \\
Q(w^4) =& F_0 + F_1 w^4 + F_2 w^8 + F_3 w^{12} + F_4 w^{16} + F_5 w^{20} + F_6 w^{24} + F_7 w^{28} \\
=& F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5 + F_6 - F_7 = q[4] \\
Q(w^5) =& F_0 + F_1 w^5 + F_2 w^{10} + F_3 w^{15} + F_4 w^{20} + F_5 w^{25} + F_6 w^{30} + F_7 w^{35} \\
=& F_0 - F_1 w + F_2 w^2 - F_3 w^3 - F_4 + F_5 w - F_6 w^2 + F_7 w^3 = q[5] \\
Q(w^6) =& F_0 + F_1 w^6 + F_2 w^{12} + F_3 w^{18} + F_4 w^{24} + F_5 w^{30} + F_6 w^{36} + F_7 w^{42} \\
=& F_0 - F_1 w^2 - F_2 + F_3 w^2 + F_4 - F_5 w^2 - F_6 + F_7 w^2 = q[6] \\
Q(w^7) =& F_0 + F_1 w^7 + F_2 w^{14} + F_3 w^{21} + F_4 w^{28} + F_5 w^{35} + F_6 w^{42} + F_7 w^{49} \\
=& F_0 - F_1 w^3 - F_2 w^2 + F_3 w^5 - F_4 + F_5 w^3 + F_6 w^2 - F_7 w^5 = q[7]
\end{aligned}
$$

3. Transformada de Radon en campos vectoriales

En los anteriores capítulos se comentó la manera en que la tomografía computarizada trata el problema de reconstruir una función f escalar, donde f puede representar la densidad de los tejidos, usando la transformada de Radon.
El problema que se planteará en este capítulo será el método para reconstruir campos vectoriales F a partir de sus proyecciones.
Una de las aplicaciones del problema de la tomografía vectorial es la reconstrucción de campos vectoriales en la tomografía Doppler [23], donde tratan de estudiar por ejemplo, el flujo sanguíneo. Para estas aplicaciones se hacen presentes los siguientes fenómenos físicos: el sonido, el ultrasonido y el efecto Doppler. Primero se expondrá lo que es el efecto Doppler y luego se hará un bosquejo histórico de los estudios del sonido, ultrasonido y del ultasonido junto al efecto Doppler.

3.1. Efecto Doppler

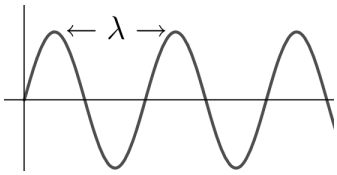
3.1.1. Doppler y Ballot

El cambio Doppler, también conocido como efecto Doppler, fue postulado por primera vez por el físico austriaco Christian Doppler (1803–1853) en el artículo "On the colored light of the double stars and certain other stars of the heavens" en 1842.
Este concepto describe cómo los cambios en la frecuencia de las ondas de luz explicaron la variación de color visible de las estrellas. Las estrellas y galaxias que se alejan de la Tierra adquieren una tonalidad cercana al rojo, mientras que los objetos astronómicos que se mueven hacia la Tierra adquieren una tonalidad cercana al azul. [51] El holandés Buys Ballot (1817–1890),

en 1845, comprobó el efecto Doppler para el sonido. En un tren subió a varios músicos. Luego pidió al conductor condujera tan rápido como pudiera y le pidió a los músicos tocaran una nota constate. [25] Mientras tanto, un par de observadores fijos registraban, las notas que percibían. Las conclusiones fueron que cuando el productor de sonido y el observador están en el mismo punto, las frecuencias emitidas y recibidas son idénticas; y cuando el productor de sonido se aleja de un observador, la frecuencia recibida es menor que la frecuencia emitida [22].
Para esta parte se consultó [56], [13], [46], [27], [28] y [63].

3.1.2. ¿Qué es el efecto Doppler?

Es fácil notar el cambio aparente de tono la sirena de una ambulancia, el tono de la sirena es más agudo cuando se acerca y más grave cuando se aleja. Este cambio se conoce con el efecto Doppler.
El efecto Doppler es el cambio en la frecuencia y la longitud de una onda debido al movimiento relativo entre la fuente de onda y un observador. Fue estudiado por primera vez en 1842 por el matemático y físico austriaco Christian Johann Doppler.
Hay varios tipos de ondas: las ondulaciones en la superficie de un estanque, los sonidos, la luz o los temblores. Todos estos pueden ser estudio del efecto Doppler.
Para explicar por qué se produce el efecto Doppler, es necesario tener en cuenta dos conceptos básicos: la longitud de onda y la frecuencia de onda. Si suponemos que una onda tiene picos, la longitud de onda, λ, es la distancia entre dos picos consecutivos. La frecuencia de una onda, f, es la cantidad de picos que pasan por un punto fijo en determinado tiempo, por lo cual, la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda, es decir, cuanto más pequeña sea la longitud de onda, mayor será la frecuencia y viceversa.



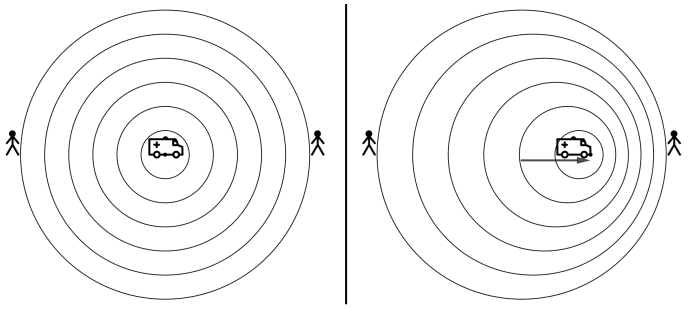
Los frentes de onda son las líneas imaginarias que conectan a los puntos que son alcanzados en un mismo instante por una determinada onda. Los frentes de onda pueden visualizarse como curvas o superficies que se expanden a lo largo del tiempo alejándose del emisor que genera las ondas sin tocarse entre sí. Por ejemplo, la unión de todos los picos de onda que provienen del punto donde se deja caer una piedra en un estanque

creará un conjunto de frentes de onda circulares concéntricos cuando se ve desde arriba. Las ondas sonoras son ondas que se extienden esféricamente desde su emisor en todas direcciones, como la sirena de una ambulancia. La distancia entre dos frentes de onda consecutivos es la longitud de la onda de sonido. Si la ambulancia está en reposo, cualquier persona inmóvil cerca de ella encontrará con cada frente de onda con la misma frecuencia con la que se emitió.

Si el emisor está en movimiento y va de izquierda a derecha, la longitud de onda medida por el observador situado a la derecha es más pequeña que la longitud de onda del emisor, y la longitud de onda medida por el observador situado a la izquierda del emisor es mayor que la del emisor. Lo anterior es debido a que las fuentes de onda serán también circunferencias pero ya no serán concéntricas, ya que en el tiempo entre la emisión de un pico de onda y la siguiente, la fuente se habrá movido.

Un cambio similar en la frecuencia observada ocurre si la fuente está quieta y el observador se está moviendo hacia o alejándose de ella.

De hecho, cualquier movimiento relativo entre los dos causará un efecto Doppler en la frecuencia observada.



3.1.3. Algunas fórmulas

En esta parte se simbolizará como f frecuencia de la onda, λ la longitud de la onda, c la velocidad de la onda, f' la frecuencia que percibe el receptor, λ' la longitud de onda que percibe el receptor, v_s la velocidad del emisor, v_r velocidad del receptor.
Si el observador y emisor están quietos, la longitud de onda es el cociente de la velocidad de la onda entre la frecuencia:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Leftrightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

Si el observador se mueve hacia el receptor a una velocidad v_r (o se aleja a una velocidad $-v_r$):

$$f' = \frac{c \pm v_r}{\lambda} = \frac{c \pm v_r}{\frac{c}{f}} = \left(1 \pm \frac{v_r}{c}\right) f$$

Si el emisor se está moviendo hacia el receptor, entonces las ondas siguen moviéndose a una velocidad c, ya que la velocidad de la onda está definida por el medio a través del cual viaja y es independiente de la velocidad de la fuente. Sin embargo, la longitud de onda disminuirá. Esto se debe a que los frentes de onda se producen a la misma velocidad que para una fuente estacionaria, pero en el momento en que se emiten los frentes de onda la fuente se ha movido, por lo que cada frente de onda está más cerca del frente de onda anterior. El valor de λ' se puede encontrar considerando la distancia entre la fuente y el último frente de onda a medida que se produce el siguiente frente de onda. Si el emisor va a una velocidad v_s, cuando la onda recorra λ, el emisor recorre $\frac{v_s}{f}$, por lo cual la longitud de onda con respecto al receptor será:

$$\lambda' = \lambda - \frac{v_s}{f} = \frac{c}{f} - \frac{v_s}{f} = \frac{c - v_s}{f}$$

De la anterior ecuación se puede obtener la frecuencia que percibe el observador:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - v_s} f$$

Haciendo un análisis análogo si el emisor se está alejando a una velocidad $-v_s$, se obtendría la igualdad:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c + v_s} f$$

Si tanto el emisor como el receptor están en movimiento la frecuencia que percibe el receptor será:

$$f' = \frac{c - v_r}{c - v_s} f \tag{3-1}$$

Por convención, la dirección es positiva para la velocidad va del emisor al receptor.

3.1.4. ¿Cómo calcular la velocidad usando el efecto Doppler?

El efecto Doppler se puede usar para medir velocidades, en particular la de los autos usando una pistola radar. El radar emite microondas que son reflejadas por el auto y

regresan al radar. Como el auto se mueve, la frecuencia de las ondas recibidas por el auto son diferentes a las frecuencias emitidas por el radar.
Usando 3-1 la frecuencia recibida por el auto (receptor) es

$$f' = \frac{c + v_r}{c} f$$

Cuando el auto refleja la onda, se convierte en un emisor en movimiento y el radar se convierte en receptor, por lo cual, la frecuencia recibida por el radar (receptor) es

$$f'' = \frac{c}{c - v_r} f' = \frac{c}{c - v_r} \cdot \frac{c + v_r}{c} f = \frac{c + v_r}{c - v_r} f$$

El cambio de frecuencia Δf será:

$$\Delta f = f'' - f = \frac{c + v_r}{c - v_r} f - f = \frac{2v_r}{c - v_r} f$$

Como la velocidad del auto es muy pequeña comparada con la velocidad de la onda, $c - v_r \approx c$, por lo cual

$$\Delta f = \frac{2v_r}{c} f \Rightarrow v_r = \frac{c\Delta f}{2f}$$

Si la velocidad del vector forma un ángulo α con la dirección de observador, la velocidad efectiva es $v\cos(\alpha)$, en el caso del del ultrasonido, el ángulo es el ángulo entre el rato de ultrasonido emitido y el vector velocidad, por lo que la la ecuación de efecto Doppler es:

$$\Delta f = \frac{2v_r \cos(\alpha)}{c} f$$

3.2. Sonido y ultrasonido en el tiempo

3.2.1. El sonido

Una de las primeras personas en estudiar el sonido fue el filósofo griego Aristóteles, (384-322 a. de C.), alrededor del año 350 a. de C., en su obra *Acerca del alma* [3]. Isaac Asimov, en su libro *El monstruo subatómico* [4] comenta acerca de Aristóteles: “tras haber observado que los objetos que emitían sonidos vibraban, sugirió que las vibraciones golpean el aire que está inmediatamente a su alrededor y lo hacen vibrar; este aire hace vibrar el aire que le rodea y así sucesivamente, como una serie de invisibles fichas

de dominó. Al final, la vibración progresiva alcanza el oído y lo hace vibrar, y así oímos el sonido".
La especulación de que el sonido es un fenómeno de ondas surgió a partir de observaciones de las ondas de agua. La posibilidad de que el sonido exhibiera un comportamiento similar fue enfatizada por el filósofo griego Crisipo de Solos (c. 240 a.C.) [57].
En 1490, Leonardo da Vinci se dio cuenta de que si se colocaba el extremo de un tubo largo en el agua y el otro extremo en el oído, se podían escuchar barcos que se encontraban a una gran distancia [44], esto fue utilizado por Sturm y Colladon para sus experimentos, como se narrará más adelante.
El italiano Galileo Galilei (1564-1642), en su tratado "Dos nuevas ciencias" publicado en 1638 demostró que demostró que la frecuencia de un sonido determina su tono [57].

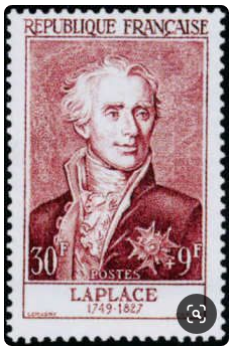
Marin Mersenne fue un sacerdote, matemático y filósofo francés (1588-1648). Fue el primero en calcular la velocidad del sonido en el aire. Su experimento consistió en pararse frente a una pared que reflejara el sonido y decir en un segundo la frase "benedicam dominum" (gracias al Señor en latín), usando un péndulo para cronometrar el sonido. Estaba a 159.5 metros de la pared, el eco siguió inmediatamente al final de la frase original: "benedicam dominum" (bendeciré al señor). Las palabras cubrieron el viaje en un total de 319 metros lo que le permitió a Mersenne deducir que 319 metros por segundo es la velocidad del sonido. Esto es cercano al valor correcto de aproximadamente 340 metros por segundo [19]. Por su obra *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, publicada en 1636, se le llama el padre de la acústica.

Después de los descubrimientos de Mersenne el científico británico Robert Boyle (1627-1691), usando la bomba de aire recientemente inventada, fue el primero en demostrar la aseveración de Galileo de que, en el vacío, una pluma y un trozo de plomo caen a la misma velocidad, y también estableció que el sonido no se transmite en el vacío. Boyle llegó a este resultado poniendo una campana dentro de una jarra en vacío y notó que la campana no era audible. Publicó sus hallazgosen *NewExperiments Physico-Mechanicall, Touching the Spring of the Air, and its Effects* en 1660.

El primer tratado teórico, conocido, sobre el sonido fue hecho por Sir Isaac Newton (1643- 1727) en su *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Newton pensó que había calculado correctamente la velocidad del sonido a través de un medio sólido, líquido o gaseoso. Creía que podría determinar la velocidad del sonido calculando la

raíz cuadrada de la presión dividida por la densidad del medio: $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$.

Tiempo después, el matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827) vio la falla en el pensamiento de Newton y corrigió la fórmula de Newton. Amplió la ecuación de Newton para incluir la idea de que el proceso no es isotérmico como Newton había pensado, pero es adiabático. Laplace modificó la fórmula de Newton agregando γ, el llamado coeficiente adiabático: $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$. A esta ecuación se le llama ecuación de Newton-Laplace. [6]



Jean Antoine Nollet, (1700 - 1770), físico francés realizó una serie de experimentos para resolver una disputa sobre si los sonidos podían viajar a través del agua. Por el simple recurso de sumergir su cabeza en un lago, descubrió que podía escuchar una campana, disparos, gritos y silbidos. Una observación un poco menos obvia fue que una campana golpeada bajo el agua se podía escuchar más fácilmente a través del agua que a través del aire sobre ella. [31]

Los sonidos producidos por los tubos sonoros están sometidos a ciertas leyes, eso sucede con las cuerdas y con los sistemas rígidos. Tanto las correspondientes a los tubos abiertos como a los cerrados, fueron descubiertas por el matemático, físico y médico suizo Daniel Bernoulli (1667-1748). Estos descubrimientos se resumen en las llamadas leyes de Bernoulli [29]:

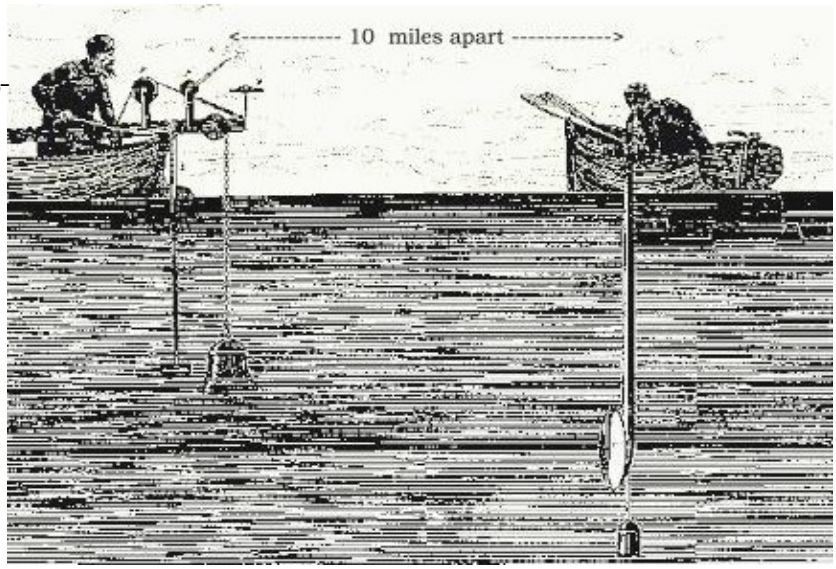
- La frecuencia del sonido producido por un tubo, tanto abierto como cerrado, es directamente proporcional a la velocidad de propagación. De ahí que para producir los diferentes armónicos de un tubo haya que aumentar la velocidad de propagación de la onda.
- La frecuencia del sonido producido por un tubo, tanto abierto como cerrado, es inversamente proporcional a la longitud del tubo. A mayor longitud del tubo, la frecuencia es más grave.
- A igualdad de longitud entre un tubo abierto y otro cerrado, el tubo abierto produce un sonido de frecuencia el doble que el cerrado.

- Los tubos (cilíndricos) abiertos producen la serie completa de armónicos, mientras que los cerrados sólo los armónicos de frecuencia impar de la fundamental.

John Strutt (1842-1919), también conocido como el tercer barón de Rayleigh, fue un físico británico. Realizó varias investigaciones acerca de la resonancia y la vibración del sonido, y describió un procedimiento, para medir las vibraciones acústicas. Estas investigaciones se publicaron *The Theory of Sound* [40].

Jean-Daniel Colladon (Ginebra, 1802-1893) ingeniero suizo junto con su amigo Charles Jacques Charles François Sturm (Ginebra, 1803–1855), realizaron experimentos en el lago de Ginebra para medir la velocidad del sonido bajo el agua en 1826, este estudio les hizo acreedores del Gran Premio de Ciencias en París.

Figura 3-1.: Jean-Daniel Colladon y Jacques Charles François Sturm



En su experimento, una campana submarina fue golpeada simultáneamente con la ignición de la pólvora. El destello del encendido se observó a 10 millas de distancia y se comparó con la llegada del sonido de la campana bajo el agua que se escuchó a través de un dispositivo parecido a una trompeta en el agua (figura **3-1**). Con estos instrumentos lograron determinar que la velocidad del sonido bajo el agua era de 1435 metros/segundo, una cifra no muy diferente de la que se conoce hoy en día. [45]

3.2.2. El ultrasonido

El primer acercamiento al ultrasonido es mediante el biólogo italiano Lazzaro Spallanzani (1729-1799). Él es llamado el"biólogo de biólogos", ya que entre otras de sus investigaciones refutó la generación espontánea, anticipándose a Pasteur; se dió cuenta de que la digestión es un proceso químico y no mecánico, como se creía hasta entonces, descubriendo las propiedades digestivas de la saliva y el poder disolvente del jugo gástrico; demostró que el semen era indispensable para la concepción de un nuevo ser, aunque no supo reconocer la importancia de los espermatozoides [52], de los que se pensaba que eran parásitos, lo anterior lo logró mediante la inseminación artificial de una perra [7].

Figura 3-2.: Lazzaro Spallanzani

En 1793 empezó a investigar sobre la forma en que los animales nocturnos encuentran su camino en la oscuridad. Para tal efecto, trabajó con varios murciélagos a los cuales vendó sus ojos o dejó ciegos y notó que podían seguir volando sin problemas, evitando obstáculos y más aún, podían seguir cazando insectos [58]. La primera idea que se le ocurrió a Spallzani es que tenían un alto sentido del tacto o un sexto sentido, si embargo, el naturista suizo Louis Jurine (1751-1819) al leer los trabajos de Spallazani tapó los oídos a unos murciélagos y estos se desorientaron totalmente. Spallzani comprobó lo hecho por su colega pero no pudieron dar una buena explicación a tal fenómeno. Para sus colegas contemporáneos les bastó aceptar que el sentido del tacto era suficiente para explicar ese fenómeno. [11]

A principios del siglo XX, se retomaron los trabajos de Spallzani para estudiar a los murciélagos, replicaron los experimentos de Spallzani y Jurine, encontraron textos no publicados de Spallzani donde conjeturaba que el sonido que producían sus alas eran reflejados por los objetos y captados por sus oídos.

Hiram Maxim (1912) especuló que los murciélagos podrían detectar obstáculos emitiendo sonidos de baja frecuencia y, de alguna manera, detectando su reflejo en los obstáculos. Hartridge en (1920) avanzó la teoría más plausible de que los sonidos de alta frecuencia eran más adecuados físicamente. Fue hasta la década de los cuarenta del siglo pasado que aparecieron publicaciones de Dijkgraaf, Robert Galambos y Donald R. Griffin donde escribían sobre el descubrimieto de que los murciélagos emiten soni-

dos de orientación ultrasónicos y detectan pequeños obstáculos al escuchar sus ecos [35].

El uso del ultrasonido en medicina comenzó poco después de la segunda guerra mundial. El primer trabajo publicado al respecto fue en 1942 por el austriaco Karl Theodore Dussik (1908-1968), *Uber die moglichkeit hochfrequente mechanische schwingungen als diagnostisches hilfsmittel zu verwerten* (Sobre la posibilidad de utilizar vibraciones mecánicas de alta frecuencia como herramienta de diagnóstico), en el cual hablaba de sus investigaciones de ultrasonido en el cerebro [61]. Por otra parte, el profesor británico Ian Donald (1910-1987) en 1958 y un joven ingeniero aprendiz escocés llamado Tom Brown (1933-) construyeron la primera máquina exitosa de diagnóstico por ultrasonido. La idea de Donald de usar el ultrasonido para diagnosticar a los humanos fue ridiculizada. Sin embargo, después de que se diagnosticara un gran quiste ovárico en una paciente, los médicos tomaron la tecnología en serio [21]. Las investigaciones de Alice Stewart (1906–2002) demostraron que las radiografías durante el embarazo eran peligrosas para el feto, lo que contribuyó a que el ultrasonido fuera aceptado como una tecnología de imagen más segura.

3.2.3. Ultrasonido y Doppler

Figura 3-3.: Paul-Jacques Curie (izquierda) y Pierre-Jacques Curie (derecha)

En 1880, los hermanos científicos franceses Paul-Jacques Curie (1855-1941) y Pierre Curie (1859-1906) descubrieron que al aplicar presión a un cristal de cuarzo se establecían cargas eléctricas en éste; ellos llamaron a este fenómeno "el efecto piezoeléctrico". Lo anterior fue publicado como *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées* (Desarrollo por compresión de electricidad polar en cristales hemisféricos con caras inclinadas). Más tarde ellos verificaron que un campo eléctrico aplicado al cristal proporcionaba una deformación al material. Este efecto era referido como "piezoeléctrico inverso". Los materiales piezoeléctricos, por lo tanto, pueden ser

utilizados para convertir energía eléctrica en energía mecánica y viceversa [20]. Los estudios de los hermanos Curie permitirían enviar y recibir ondas de sonido en ondas de alta frecuencia.

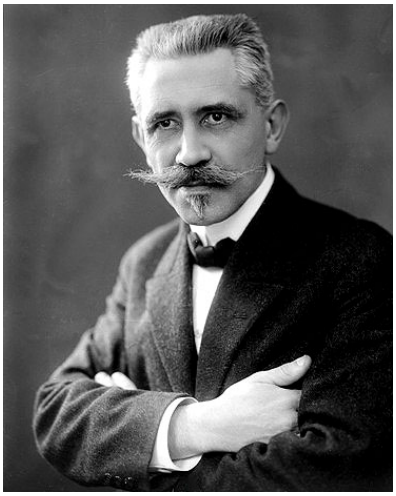


Figura 3-4.: Paul Langevin

En 1906, el arquitecto naval estadounidense Lewis Nixon (1861 - 1940) inventó el primer dispositivo de escucha tipo sonar para detectar icebergs [24] [49]. Después del hundimiento del trasatlántico Titanic en 1912, se empiezan a hacer más investigaciones para detectar objetos en el océano. Uno de los que hicieron mayor contribución a dichas investigaciones fue el físico francés Paul Langévin (1872-1946). Paúl Levign fue alumno de Pierre Curie (y luego tuvo amoríos con su viuda), y continuó estudios acerca de los materiales piezoeléctricos. La meta de Levign era la aplicación del sonar durante la primera guerra mundial en la detección de submarinos. En 1916 podía detectar hojas de metal a una distancia de 200 metros y en 1918 a una distancia de 1500 metros [33], [14].

En 1935, a Watson-Watt le pidieron que desarrollar el "rayo de la muerte"[1]. El respondió que dicho rayo no era factible, pero podía construir un instrumento para detectar y dar la posición de un avión con ayuda de ondas. Le pidieron que construyera ese instrumento, y creó junto con su equipo, lo que hoy se llama radar usando el principio Doppler [60]. El radar fue fundamental durante la segunda guerra mundial, y debido a éste se hicieron varias investigaciones sobre el radar en ese lapso.
Después de la guerra se hicieron mejoras al radar, con mayor rango de distancia y más exactos. En 1947, John L. Barker y Bernard J Midlock adaptaron un dispositivo de radar que habían desarrollado durante la guerra, creando lo que tal vez sea la primera aplicación de velocidad a automóviles del mundo en la ciudad de Glastonbury, Connecticut [9].

[1]El rayo de la muerte o rayo de Tesla es dispositivo que con capacidad de destruir instantáneamente ciudades enteras. El dispositivo sería capaz de proyectar partículas de diferentes dimensiones a gran distancia, transmitiendo una energía muchísimo mayor que cualquier otro rayo [36].

Figura 3-5.: Shigeo Satomura

Shigeo Satomura (1919-1960) fue un físico japonés. Una de sus áreas de interés era el uso de la tecnología del radar con ultrasonido. Su profesor, Kinjiro Okabe, le sugirió usar esas investigaciones para aplicarlas al campo médico. Luego de eso, su investigación consistió en la emisión de ultrasonidos a cuerpos vivos, registrando las señales reflejadas y analizando sus cambios mediante el efecto Doppler. La medición y el análisis de la frecuencia de las señales proporcionaron información sobre la parte reflejada del cuerpo. Satomura, en colaboración con los cardiólogos, T. Yoshida e Y. Nimura, del Hospital Universitario de Osaka, evaluaron la técnica para medir los vasos sanguíneos del corazón.
A finales de año, presentó y publicó su primer artículo sobre el tema. El documento, titulado "*A new method of mechanical vibration measurement and its application*" (Un nuevo método de medición de la vibración mecánica y su aplicación), mostró la visualización de los movimientos del corazón.
Al año siguiente, este mismo equipo publicó el documento "*Ultrasonic Doppler method for the inspection of cardiac functions*" (Método Doppler ultrasónico para la inspección de la función cardíaca), donde se describió el prototipo de medidor de flujo Doppler con el cual fue posible distinguir las señales Doppler producidas por el movimiento de la pared del corazón. En una reunión internacional celebrada en Londres 3 años después (La 3ª Conferencia Internacional de Electrónica Médica), nombraron el equipo mencionado anteriormente Cardiógrafo Doppler ultrasónico.
Como parte de su tesis de doctorado en ciencias médicas, Satomura (en colaboración con el neurólogo Ziro Zaneko) utilizó un medidor de flujo Doppler de nueva construcción para producir datos sobre las velocidades del flujo sanguíneo en los vasos de suministro de cerebro periféricos y extracraneales mediante ultrasonido. Probaron que las señales Doppler ultrasónicas de arterias y venas se pueden registrar desde la superficie de la piel.
A la edad de 41 años Shigeo Satomura falleció debido a una hemorragia subaracnoidea [16].

Además de las aplicaciones antes mencionadas el efecto Doppler se ha utilizado para hacer vibrómetros. Un vibrómetro es un medidor de vibración que informan sobre las oscilaciones de alguna estructura, incluyendo la corteza terrestre. Dentro de los de-

tectores de vibración existe una clasificación, de acuerdo a su frecuencia [1].
También este fenómeno ha sido utilizado en el audio. El altavoz Leslie fue inventado por Donald Leslie (1911-2004) en 1937. El altavoz está diseñado como un dispositivo de modificación de sonido. Funciona según un principio simple: una fuente de sonido direccional gira a velocidad constante (o variable) alrededor de un punto fijo. Usando el efecto Doppler modula el sonido, imitando en cierta medida la resonancia del órgano en un gran espacio de sala al proyectarlo en 360 grados. A medida que gira hacia el oyente la velocidad relativa aumenta cualquier tono que produzca [64], [37].

3.3. Tomografías, introducción

La reconstrucción de una función escalar $f(n)$ a partir de sus integrales de línea o proyecciones en un dominio, así como algunas de sus aplicaciones ya se trató anteriormente. Existen otros tipos de aplicaciones, como el flujo sanguíneo, donde la estimación y la imagen de un campo vectorial pueden ser esenciales para la extracción de información. En estos casos, los métodos de tomografía vectoral intentan reconstruir estos campos a partir de mediciones escalares (proyecciones).
En 1977, Wells [66] fue el primero [50] en describir que había detectado señales de flujo sanguíneo Doppler ultrasónicas que parecen estar asociadas con tumores malignos en la mama femenina. Wells comenta: "Este descubrimiento puede llevar al desarrollo de un escáner Doppler ultrasónico de alta velocidad que podría hacer que la detección de cáncer de mama sea practicable".
Todos los modelos de tomografía de campos vectoriales tienen en común que son integrales de línea de un campo F en una dirección r de una recta L:

$$R(F, L) = \int_L F \cdot r dr$$

El problema es recuperar el valor de F conociendo los valores $R(F, L)$.
Norton fue de los primeros en dar una descripción detallada de las condiciones para reconstruir un campo vectorial en dos dimensiones, escribe su artículo *Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging* de 1989 [55].
Antes de estudiar lo que hizo Norton se recordarán unas definiciones y propiedades de campos vectoriales:
Si un campo vectorial representa la velocidad de un fluido, la divergencia $(\nabla \cdot F)$ en un punto indica como el fluido tiende a acumularse en él (sumidero) o alejarse (fuente).

El rotacional ($\nabla \times F$) en un punto mide la tendencia a girar del fluido.
Si $\nabla \cdot F = 0$ se dice que F solenoidal y si $\nabla \times F = 0$ se le llama irrotacional.
El teorema de descomposición de Helmholtz establece que si un campo vectorial F de clase C^2 (dos veces diferenciable, con derivadas continuas) y cuya divergencia y rotacional se hacen cero más rápido que $\frac{1}{r^2}$, puede ser expresado como la suma de un campo vectorial irrotacional (sin rotor) y un campo vectorial solenoidal (sin divergencia)

$$F = -\nabla\phi + \nabla \times A$$

Además, el teorema de Helmholtz dice que se puede calcular F si se conoce su divergencia (∇F) y su rotacional ($\nabla \times F$) y que es único.
Norton demostró que sólo se puede reconstruir la componente solenoidal, $\nabla \times A$, del campo vectorial F en un dominio acotado a partir de sus integrales de línea, pero en el caso de que la divergencia de F sea cero y se conozca el valor del campo en la frontera, el campo puede ser reconstruido completamente.
Norton agrega en su artículo que su método se puede extender a tres dimensiones pero fue Juhlin [41] en 1992 quien describió el método para campos vectoriales con divergencia cero. Juhlin reconstruye completamente el campo a partir del efecto Doppler acústico.

3.4. Tomografías, introducción

Sea un campo vectorial $\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j} + +F_3(x,y)\,\vec{k}$ y una curva suave por partes C con ecuación paramétrica $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, $t \in [a, b]$. Recuérdese que que la integral de línea del campo vectorial F a través de C como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$.
En la transformada de Radon la curva C será una recta L. Por comodidad se simbolizará como $L(\theta, p)$ a la recta $\cos(\theta)x + \text{sen}(\theta)y = p$, siendo θ y p los mismos parámetros usados en la Transformada de Radon para funciones escalares, ver la figura **3-7**.
La transformada de Radon para campos vectoriales se define como

$$\mathcal{R}(F, L(\theta, p)) = \int_L F \cdot d\vec{r} \tag{3-2}$$

La cual es una generalización de la transformada clásica de Radon a campos vectoriales.
El problema en cuestión es recobrar el campo vectorial F conociendo las integrales de

línea 3-2.

3.4.1. Ejemplos de la transformada de Radon en un campo vectorial

Los ejemplos que se expondrán serán sobre una circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, por lo cual se calculará primero los valores en los cuales una recta intercepta a la circunferencia.

Consideremos una circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y la recta $x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)=p$.
La ecuación paramétrica de la recta es $\gamma(t)=\begin{cases}x=-t\,\mathrm{sen}(\theta)+p\cos(\theta)\\ y=t\cos(\theta)+p\,\mathrm{sen}(\theta)\end{cases}$
Se hallarán los valores de t, en los cuales la recta intercepta a la circunferencia:

$$\begin{aligned}r^2=&(x-h)^2+(y-k)^2=\\ =&(-t\,\mathrm{sen}(\theta)+p\cos(\theta)-h)^2+(t\cos(\theta)+p\,\mathrm{sen}(\theta)-k)^2\\ =&t^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)+p^2\cos^2(\theta)+h^2-2tp\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+2th\,\mathrm{sen}(\theta)-2hp\cos(\theta)\\ &+t^2\cos^2(\theta)+p^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)+k^2+2tp\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)-2tk\cos(\theta)-2kp\,\mathrm{sen}(\theta)\\ =&t^2+p^2+h^2+k^2+2t\left(h\,\mathrm{sen}(\theta)-k\cos(\theta)\right)-2p\left(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\end{aligned}$$

Por lo cual queda la ecuación:

$$t^2+2t\left(h\,\mathrm{sen}(\theta)-k\cos(\theta)\right)-2p\left(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)\right)+p^2+h^2+k^2-r^2=0$$

El discriminante de la ecuación anterior es:

$$\begin{aligned}&4\left(h\,\mathrm{sen}(\theta)-k\cos(\theta)\right)^2-4\left(-2p\left(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)\right)+p^2+h^2+k^2-r^2\right)\\ =&-4(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)-p-r)(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)-p+r)\\ t=&-\left(h\,\mathrm{sen}(\theta)-k\cos(\theta)\right)\\ &\pm\sqrt{-(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)-p-r)(h\cos(\theta)+k\,\mathrm{sen}(\theta)-p+r)}\end{aligned}$$

Si $(h,k)=(1,0)$ y $r=1$ se tiene que $t=-\,\mathrm{sen}(\theta)\pm\sqrt{-(\cos(\theta)-p-1)(\cos(\theta)-p+1)}$
Sea $\begin{cases}a=-\,\mathrm{sen}(\theta)+\sqrt{-(\cos(\theta)-p-1)(\cos(\theta)-p+1)}\\ b=-\,\mathrm{sen}(\theta)-\sqrt{-(\cos(\theta)-p-1)(\cos(\theta)-p+1)}\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = -\operatorname{sen}(\theta) + \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2} \\ b = -\operatorname{sen}(\theta) - \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2} \end{cases}$$

De los anterior se obtiene:

$$b - a = -2\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2} \tag{3-3}$$

$$a + b = -2\operatorname{sen}(\theta) \tag{3-4}$$

$$b^2 - a^2 = 4\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2} \tag{3-5}$$

Ejemplo 1: $F(x,y) = \begin{cases} \langle y, x\rangle & \textbf{si } |(x-1,y)| \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } |(x-1,y)| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot dr &= \int_a^b \langle t\cos(\theta) + p\operatorname{sen}(\theta), -t\operatorname{sen}(\theta) + p\cos(\theta)\rangle \cdot \langle -\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle \, dt \\
&= \int_a^b -t\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - p\operatorname{sen}^2(\theta) - t\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\cos^2(\theta) dt \\
&= \int_a^b -2t\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\left(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\right) dt \\
&= \int_a^b -t\operatorname{sen}(2\theta) + p\cos(2\theta) dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2\operatorname{sen}(2\theta) + p\cos(2\theta)t\right)\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\operatorname{sen}(2\theta) + p\cos(2\theta)(b-a) \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}(2\theta) + p\cos(2\theta)\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo por las igualdades 3-3 y 3-4:

$$= -2\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2}\left(-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(2\theta) + p\cos(2\theta)\right)$$

Ejemplo 2: $F(x,y) = \begin{cases} \langle x, y\rangle & \textbf{si } |(x-1,y)| \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } |(x-1,y)| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot dr &= \int_a^b \langle -t\,\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta), t\cos(\theta) + p\,\mathrm{sen}(\theta)\rangle \cdot \langle -\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b t\,\mathrm{sen}^2(\theta) - p\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + t\cos^2(\theta) + p\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) dt \\ &= \int_a^b t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \\ &\quad \text{Sustituyendo por la igualdad 3-5:} \\ &= 2\,\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: $F(x,y) = \begin{cases} \langle -y, x\rangle & \textbf{si } |(x-1,y)| \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } |(x-1,y)| > 1 \end{cases}$

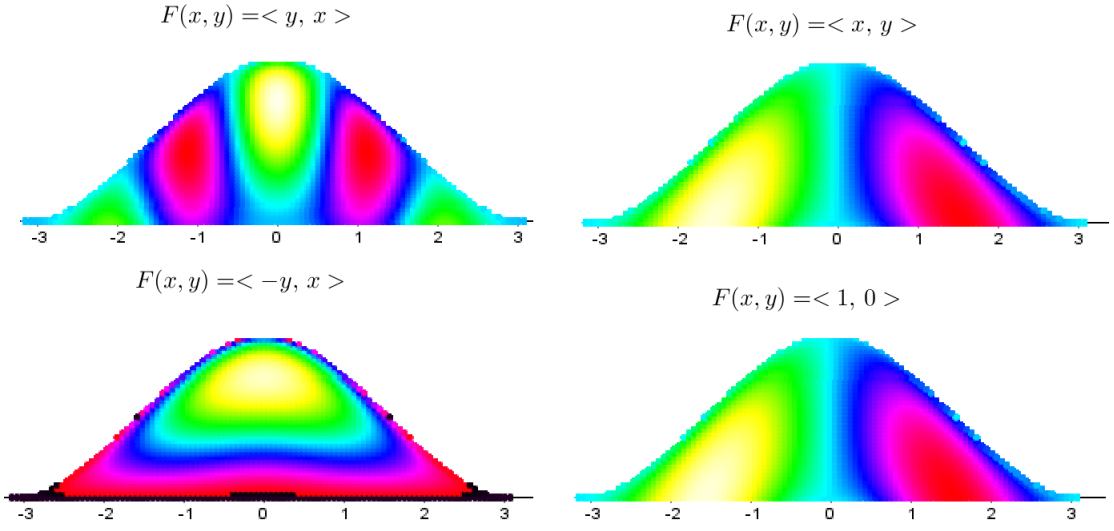
$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot dr &= \int_a^b \langle -t\cos(\theta) - p\,\mathrm{sen}(\theta), -t\,\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta)\rangle \cdot \langle -\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b t\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\,\mathrm{sen}^2(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + p\cos^2(\theta) dt \\ &= \int_a^b p dt = pt\Big|_a^b = p(b-a) \\ &\quad \text{Sustituyendo por la igualdad 3-3:} \\ &= -2p\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 4: $F(x,y) = \begin{cases} \langle 1,0\rangle & \textbf{si } |(x-1,y)| \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } |(x-1,y)| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot dr &= \int_a^b \langle 1,0\rangle \cdot \langle -\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle \, dt \\ &= \int_a^b -\operatorname{sen}(\theta) dt = -\operatorname{sen}(\theta) t \Big|_a^b = -\operatorname{sen}(\theta)(b-a) \\ &\quad \text{Sustituyendo por las igualdad 3-3:} \\ &= 2\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2}\end{aligned}$$

En la figura **3-6** se pueden ver los senogramas de los ejemplos anteriores.

Figura 3-6.: Senogramas de los ejemplos 1 al 4



Ejemplo 5: $F(x,y) = \begin{cases} \langle x-y, x+y\rangle & \textbf{si } |(x-1,y)| \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } |(x-1,y)| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x-y =& -t\,\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta) - t\cos(\theta) - p\,\mathrm{sen}(\theta) \\ =& -\mathrm{sen}(\theta)(p+t) + \cos(\theta)(p-t) \\ x+y =& t\cos(\theta) + p\,\mathrm{sen}(\theta) - t\,\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta) \\ =& \mathrm{sen}(\theta)(p-t) + \cos(\theta)(t+p) \\ F(\gamma) =& \langle \cos(\theta)(p-t) - \mathrm{sen}(\theta)(p+t), \mathrm{sen}(\theta)(p-t) + \cos(\theta)(t+p)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F(\gamma)\cdot\gamma' \\ =& \langle \cos(\theta)(p-t) - \mathrm{sen}(\theta)(p+t), \mathrm{sen}(\theta)(p-t) + \cos(\theta)(t+p)\rangle \\ & \cdot \langle -\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle \\ =& \mathrm{sen}^2(\theta)(p+t) - \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)(p-t) + \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)(p-t) + \cos^2(\theta)(t+p) \\ =& t+p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_\gamma F\cdot dr \\ =& \int_a^b (t+p)\,dt = \left(\frac{1}{2}t^2 + pt\right)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) + p(b-a) = \frac{b-a}{2}\left(b+a+2p\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo por las igualdades 3-3 y 3-4:

$$\int_\gamma F\cdot dr = 2\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta) + 2p\cos(\theta) - p^2}\,(\mathrm{sen}(\theta) - p))$$

3.5. Recuperación del campo

Sea la ecuación de la recta L, $L : \cos(\theta)x + \mathrm{sen}(\theta)y = p$. Si $w = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$ tenemos que la ecuación se puede expresar simplemente como $w\cdot(x,y) = p$. Peter Juhlin [41] considera a L y a w como objetos en el espacio, quedando la ecuación definida como $L = \{r : w\cdot r = p,\, r\cdot\vec{k} = 0\}$.
La ecuación paramétrica de L es $\gamma(t) = \langle -\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta), 0\rangle\, t + p\,\langle\cos(\theta),\, \mathrm{sen}(\theta),\, 0\rangle$. Si

el vector velocidad $F(\gamma) = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} F(\gamma) \cdot \gamma' =& \langle F_1(\gamma), F_2(\gamma), F_3(\gamma) \rangle \cdot \langle -\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0 \rangle \\ =& -F_1(\gamma)\operatorname{sen}(\theta) + F_2(\gamma)\cos(\theta) \\ =& \vec{k} \cdot \langle F_3(\gamma)\operatorname{sen}(\theta), -F_3(\gamma)\cos(\theta), F_2(\gamma)\cos(\theta) - F_1(\gamma)\operatorname{sen}(\theta) \rangle \\ =& \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ F_1(\gamma) & F_2(\gamma) & F_3(\gamma) \end{vmatrix} \\ =& \vec{k} \cdot (w \times F(\gamma)) \end{aligned}$$

Por lo anterior: $\int_L F(r) \cdot d\vec{r} = \int_L F(\gamma) \cdot \gamma' dt = \int_L \vec{k} \cdot (w \times F(\gamma)) dt$.

Sólo es de interés obtener la transformada de Radon en regiones, por lo cual se puede suponer $F(r) = 0$ si r no está en la región.
Consideremos una región acotada R y un rectángulo formado por los segmentos de recta como en la figura **3-7**. La curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. γ_2 como γ_4 están fuera de la región se tiene que $F(\gamma_2) = F(\gamma_4) = 0$ y por lo tanto $\int_{\gamma_2} F(r) \cdot dr = \int_{\gamma_4} F(r) \cdot dr = 0$.

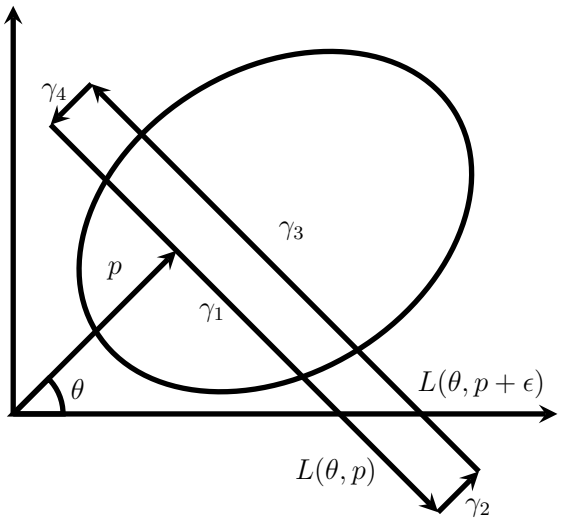


Figura 3-7.: Integración de Juhlin

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(r)\cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} F(r)\cdot d\vec{r}\\ &= \int_{\gamma_1} F(r)\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} F(r)\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} F(r)\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_4} F(r)\cdot d\vec{r}\\ \int_\gamma F(r)\cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} F(r)\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} F(r)\cdot d\vec{r} \qquad (3\text{-}6)\end{aligned}$$

γ_1 es la recta $L(\theta,p)$ y γ_3 en la recta $L(\theta,p+\epsilon)$.

$$\mathcal{R}(F,L(\theta,p))) = \int_{\gamma_1} F\cdot d\vec{r} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(F,L(\theta,p+\epsilon))) = -\int_{\gamma_3} F\cdot d\vec{r} \qquad (3\text{-}7)$$

γ es la frontera de la región R, $\partial R=\gamma$. Por el Teorema de Stokes se sabe que

$$\int_{\partial R} F\cdot d\vec{r} = \int\int_R \text{curl}(F)\cdot\vec{k}dR \qquad (3\text{-}8)$$

Por lo tanto uniendo las igualdades 3-6, 3-7 y 3-8

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(F,L(\theta,p)) - \mathcal{R}(F,L(\theta,p+\epsilon))) &= \int_{\gamma_1} F\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} F\cdot d\vec{r}\\ &= \int_\gamma F\cdot d\vec{r} = \int_{\partial R} F\cdot d\vec{r}\\ &= \int\int_R \text{curl}(F)\cdot\vec{k}\,dR\end{aligned}$$

Si se divide por ϵ y luego se aproxima ϵ a 0:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{R}(F,L(\theta,p)) - \mathcal{R}(F,L(\theta,p+\epsilon))}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int\int_R \text{curl}(F)\cdot\vec{k}\,dR}{\epsilon}\\ \frac{\partial\mathcal{R}(F,L(\theta,p))}{\partial p} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int\int_R(\nabla\times F)\cdot\vec{k}\,dR}{\epsilon}\\ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int\int_R(\nabla\times F)\cdot\vec{n}\,dR}{\epsilon} &= \int_{\substack{r\cdot w=p\\ z=0}}(\nabla\times F)\cdot\vec{k}\,dl\end{aligned}$$

(La anterior igualdad se demuestra en la subsección 3.6)

$$\therefore \frac{\partial\mathcal{R}(F,L(\theta,p))}{\partial p} = \int_{\substack{r\cdot w=p\\ z=0}}(\nabla\times F)\cdot\vec{k}\,dl \qquad (3\text{-}9)$$

El miembro derecho de la ecuación 3-9 es la transformada de Radon para dos dimensiones, entonces se puede aplicar la transformada inversa de Radon:

$$\mathcal{R}^{-1}\left(\frac{\partial\mathcal{R}(F,L(\theta,p))}{\partial p}\right)=(\nabla\times F)\cdot\vec{k}$$

De igual forma, si se rota el objeto se podrá obtener $\nabla\times F\cdot\vec{i}$ y $\nabla\times F\cdot\vec{j}$, con lo cual se obtendría el rotacional de F: curl$F=\nabla\times F$.
Así pues, a partir de las proyecciones del campo F, se puede reconstruir su campo rotacional.
Por lo anterior, cabe hacerse la pregunta, si se conoce el rotacional de un campo vectorial, ¿es posible saber cuál es el campo vectorial?
La solución no es única, pero se puede determinar la familia a la que pertenece, como se verá a acntinuación.

Supóngase que se tiene $\vec{V}=\nabla\times\vec{F}$. Si se aplica el rotacional a ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\nabla\times\vec{V}=\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$$

Por la identidad que D-5 que dice $\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$, se obtiene

$$\nabla\times\vec{V}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

Como $\nabla\cdot\vec{F}$, la divergecia, se desconoce, se le puede asignar cualquier valor escalar K, por lo cual se obtiene

$$\nabla^2\vec{F}=\nabla K-\nabla\times\vec{V}$$

La cual es la ecuación de Poisson, y se puede resolver usando la función de Green:

$$F(\mathbf{r})=-\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{g(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

Siendo $g=\nabla K-\nabla\times\vec{V}$. [26]
Si se hace la suposición adicional de que el fluido en estudio es incompresible y de que el campo F sea solenoidal, es decir, que la divergencia del campo F es 0, $\nabla\cdot F=0$, la solución será única. [42]

3.6. Aseveración de Juhlin

La proposición dice:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega_\epsilon}\hat{e}_z\cdot\nabla\times f(r)dS\right)=\int_{\substack{r\cdot w=s\\ z=0}}\hat{e}_z\cdot\nabla\times f(r)dl \tag{3-10}$$

Sea $F(x,y,z)=F_1(x,y,z)\vec{i}+F_2(x,y,z)\vec{j}+F_3(x,y,z)\vec{k}$.
Para obtener una primera aproximación a la demostración de la proposición, supóngase que el rectángulo de integración tiene sus lados paralelos a los ejes coordenados y un vértice en el origen: $\Omega_\epsilon=\{(x,y):0\le x\le a,\ 0\le y\le\epsilon\}$.

$$\begin{aligned}\widehat{e}_z\cdot\nabla\times f(r)=&\vec{k}\cdot\nabla\times f(r)=\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0)-\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0)\\ \int_{\Omega_\epsilon}\widehat{e}_z\cdot\nabla\times f(r)dS=&\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0)-\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0)dS\\ =&\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0)dS-\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0)dS\\ =&\int_0^\epsilon\int_0^a\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0)dxdy-\int_0^a\int_0^\epsilon\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0)dydx\\ =&\int_0^\epsilon F_2(a,y,0)-F_2(0,y,0)dy-\int_0^a F_1(x,\epsilon,0)-F_1(x,0,0)dx\end{aligned}$$

Para realizar el límite se aplicará L'hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0}\frac{\int_0^\epsilon F_2(a,y,0)-F_2(0,y,0)dy}{\epsilon}&=\lim_{\epsilon\to0}\left(F_2(a,e,0)-F_2(0,e,0)\right)\\ &=F_2(a,0,0)-F_2(0,0,0)\\ \lim_{\epsilon\to0}\frac{\int_0^a F_1(x,\epsilon,0)-F_1(x,0,0)dx}{\epsilon}&=\int_0^a\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,0,0)dx\end{aligned}$$

$$\therefore\int_{\Omega_\epsilon}\widehat{e}_z\cdot\nabla\times f(r)dS=F_2(a,0,0)-F_2(0,0,0)-\int_0^a\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,0,0)dx \tag{3-11}$$

Para calcular el segundo miembro de 3-10. $\gamma(t) = t\vec{i}$, $t \in [0, a] \Rightarrow \gamma'(t) = \vec{i}$

$$\begin{aligned}\int_{\substack{r\cdot w=s\\ z=0}} \widehat{e}_z \cdot \nabla \times f(r)dl &= \int_{\substack{r\cdot w=s\\ z=0}} \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0)dl \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial x}F_2(t,0,0) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(t,0,0)dt \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial t}F_2(t,0,0) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(t,0,0)dt \\ &= F_2(t,0,0)\big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,0,0)dx \\ &= F_2(a,0,0) - F_2(0,0,0) - \int_0^a \frac{\partial}{\partial y}F_1(t,0,0)dx \end{aligned} \tag{3-12}$$

$\therefore$ como las ecuaciones 3-11 y 3-12 son iguales queda, demostrada la igualdad 3-10. $\square$

Con la idea de la demostración anterior, se repetirá la demostración anterior, pero en el caso general, rotando los ejes para que quede un rectángulo con ejes paralelos a los ejes coordenados.

La proposición dice:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega_\epsilon} \hat{e}_z \cdot \nabla \times f(r)dS\right) = \int_{\substack{r\cdot w=p\\ z=0}} \hat{e}_z \cdot \nabla \times f(r)dl \tag{3-13}$$

Sea $f(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$

$$\widehat{e}_z \cdot \nabla \times f(r) = \vec{k} \cdot \nabla \times f(r) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,0) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,0) \tag{3-14}$$

Supongamos un rectángulo definido por las rectas $\begin{cases} x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p \\ x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p + \epsilon \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) - y\cos(\theta) = q \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) - y\cos(\theta) = q + L \end{cases}$.

Sea (x_0, y_0) el punto de intersección de $x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = p$ y $x\,\mathrm{sen}(\theta) - y\cos(\theta) = q$, tenemos que $(x_0, y_0) = (p\cos(\theta) + q\,\mathrm{sen}(\theta), p\,\mathrm{sen}(\theta) - q\cos(\theta))$
$u = x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) - p$;
$v = x\cos(\theta - \pi/2) + y\,\mathrm{sen}(\theta - \pi/2) - q = x\,\mathrm{sen}(\theta) - y\cos(\theta) - q$

$$\begin{cases} x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) = u + p \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) - y\cos(\theta) = v + q \end{cases} \Rightarrow \Delta_S = -1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} u+p & \mathrm{sen}(\theta) \\ v+\rho & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = -(u+p)\cos(\theta) - (v+q)\,\mathrm{sen}(\theta) \quad x = (u+p)\cos(\theta) + (v+q)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & u+p \\ \mathrm{sen}(\theta) & v+\rho \end{vmatrix} = (v+\rho)\cos(\theta) - (u+p)\,\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow y = -(v+\rho)\cos(\theta) + (u+p)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

$$\int_{\Omega_\epsilon} \widehat{e}_z \cdot \nabla \times f(r) dS = \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,0) dS$$

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,0) dS = \int_{\Omega_\epsilon^*} \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) dS^*$$

$$T_x(u,v) = (u+p)\cos(\theta) + (v+q)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$T_y(u,v) = -(v+q)\cos(\theta) + (u+p)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^L\int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) du dv\right)$$

$$= \int_0^L \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(u,v), T_y(u,v), 0) du\right) dv$$

$$= \int_0^L \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(\epsilon,v), T_y(\epsilon,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(\epsilon,v), T_y(\epsilon,v), 0)\right) dv$$

$$= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(0,v), T_y(0,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(0,v), T_y(0,v), 0) dv$$

$$T_x(0,v) = p\cos(\theta) + (v+q)\,\mathrm{sen}(\theta) = v\,\mathrm{sen}(\theta) + x_0$$

$$T_y(0,v) = -(v+q)\cos(\theta) + p\,\mathrm{sen}(\theta) = -v\cos(\theta) + y_0$$

$$\int_{\Omega_\epsilon} \widehat{e}_z \cdot \nabla \times f(r) dS = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(0,v), T_y(0,v), 0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(0,v), T_y(0,v), 0) dv \tag{3-15}$$

Para calcular el segundo miembro de 3-13 se usará la parametrización:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y(t) = y_0 - t\cos(\theta) \end{cases} \quad t \in [0,\, L] \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} x(t) = \mathrm{sen}(\theta) \\ y(t) = -\cos(\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow |\gamma'(t)| = 1.$$

Nótese adicionalmente que $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = T_x(0,t) \\ y(t) = T_y(0,t) \end{cases} \quad t \in [0,\, L]$

$$\begin{aligned} \int_{\substack{r\cdot w=s \\ z=0}} \widehat{e}_z \cdot \nabla \times f(r) dl &= \int_{\substack{r\cdot w=p \\ z=0}} \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,0) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,0) dl \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(0,t), T_y(0,t)) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(0,t), T_y(0,t), 0) dt \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} F_2(T_x(0,v), T_y(0,v)) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} F_1(T_x(0,v), T_y(0,v), 0) dv \end{aligned} \tag{3-16}$$

$\therefore$ Como las ecuaciones 3-15 y 3-16 son iguales, queda demostrada la igualdad 3-13. $\square$

4. Reconstrucción de una función a partir de sus integrales

4.1. Introducción

Si para cada pareja de números reales se conoce $\int_a^b f(t)dt$, ¿cómo se puede calcular $f(x)$? Para acotar las soluciones de este problema, se supondrá que f es continua.
Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que si f es continua

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Los anterior significa que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \qquad (4\text{-}1) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \qquad (4\text{-}2) \end{aligned}$$

Entonces, usando 4-2, podemos obtener los valores de f, o al menos, una buena aproximación. En la misma demostración se puede observar que no es necesario tener todas las integrales de todas las parejas, sólo se necesitan las parejas de la forma (a, x), y si se estuviera en ese caso utilizamos la expresión 4-1.
¿Qué hacer si sólo se tiene una cantidad finita de integrales? Es decir, se tiene que resolver el problema:

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2 \ldots n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Encontrar una función $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Lo que presentará a continuación es la solución de dicho problema, aumentado las condiciones sobre la función a encontrar.

4.2. Problemas

Un primer problema digno de atacar es el siguiente:

Problema 0

Si $U = \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]$, ¿$U$ es conexo?

La solución a este problema está dada en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1 Decide si una colección de intervalos cerrados es conexo.

Entrada Conjunto de parejas x_k, y_k, representando $U = \{[x_k, y_k] \mid k = 1 \ldots n\}$
Salida Mensaje "Es conexo" o "Es disconexo" según sea el caso.

```
Ordenar U con respecto a x_k de forma creciente
b ← mínimo{y_k | [x_k, y_k] ∈ U}
m ← 0
for k:=1 to n do
  if x_k ≤ b then
    m ← m + 1
    b ← máximo{b, y_k}
  else
    break
  end if
end for
if n = m then
  Salida ← "Es conexo"
else
  Salida ← "Es disconexo"
end if
```

Problema 1

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2 \ldots n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Encontrar una función $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Considérese la siguiente función:

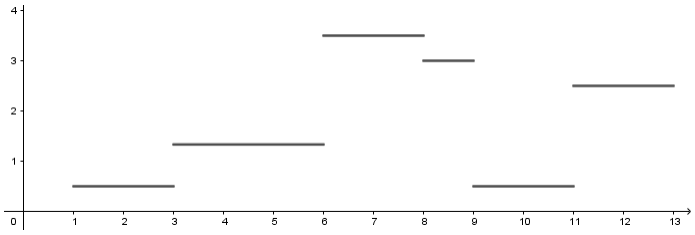
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} & \text{si } x \in [x_{k-1}, x_k) \\ \frac{a_n}{x_n - x_{n-1}} & \text{si } x = x_n \end{cases}$$

El cálculo de la integral:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} dt = \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} \cdot (x_k - x_{k-1}) = a_k$$

Por lo cual queda demostrado que la función propuesta cumple con lo requerido. □

Figura 4-1.: Solución al Problema 1 con $P = \{1, 3, 6, 8, 9, 11, 13\}$ y $A = \{1, 4, 7, 3, 1, 5\}$



La solución propuesta al problema está formada por segmentos paralelos al eje X, ver figura **4-1**, por lo cual no es necesariamente continua. Ahora se complicará un poco más el problema pidiendo continuidad de la función:

Problema 2

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2 \ldots n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Encontrar una función continua en (x_0, x_n), $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Al igual que para el problema anterior, se definirá una función f definida a trozos. Para ello se definirán n funciones f_k:
$f_1(x) = \frac{a_1}{x_1 - x_0}$
$f_k(x) = 2\frac{a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2}(x - x_{k-1}) + f_{k-1}(x_{k-1})$, $k = 2, \ldots, n$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ f_k(x) & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k] \end{cases}$$

Se demostrará que cumple con el valor de la integral y que es continua:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \frac{a_1}{x_1 - x_0} dt & \text{si } k = 1 \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} 2\frac{a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2}(t - x_{k-1}) + f_{k-1}(x_{k-1})dt & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Si $k = 1$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{a_1}{x_1 - x_0} dt = \frac{a_1}{x_1 - x_0} t \Big|_{t=x_0}^{x_1} = \frac{a_1}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = a_1$$

Si $k > 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \\ =&\int_{x_{k-1}}^{x_k} 2\frac{a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2}(t - x_{k-1}) + f_{k-1}(x_{k-1})dt \\ =&\left(2\frac{a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2} \cdot \frac{(t - x_{k-1})^2}{2} + f_{k-1}(x_{k-1})t\right)\Big|_{t=x_{k-1}}^{x_k} \\ =&2\frac{a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2} \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} + f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ =&a_k - f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f_{k-1}(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ =&a_k \quad \square \end{aligned}$$

Por ser un conjunto de segmentos de recta, sólo basta demostrar la continuidad en sus extremos, es decir, en los números x_k.
Se debe demostrar que $f(x_k) = \lim_{x \to x_k} f(x)$.

$$f(x_k) = f_k(x_k) \tag{4-3}$$

Para calcular $\lim_{x\to x_k} f(x)$ se calculará el límite por la derecha y el límite por la izquierda de f en x_k, $k = 1, \ldots, n-1$

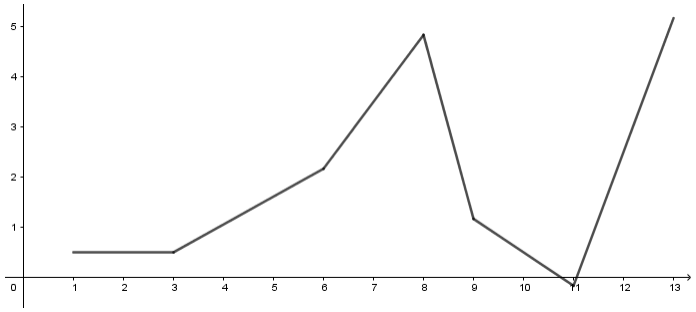
$$\lim_{x\to x_k^-} f(x) = \lim_{x\to x_k^-} f_k(x) = f_k(x_k) \tag{4-4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_k^+} f(x) &= \lim_{x\to x_k^+} f_{k+1}(x) \\ &= \lim_{x\to x_k^+} \left(2\frac{a_{k+1} - f_k(x_k)(x_{k+1} - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)^2}(x - x_k) + f_k(x_k)\right) \\ &= f_k(x_k)\end{aligned} \tag{4-5}$$

$$\text{Por 4-4 y 4-5 } \lim_{x\to x_k^+} f(x) = \lim_{x\to x_k^-} f(x) = f_k(x_k) \Rightarrow \lim_{x\to x_k} f(x) = f_k(x_k) \tag{4-6}$$

$$\text{Por 4-3 y 4-6 } \lim_{x\to x_k} f(x) = f_(x_k) \quad \therefore \quad f \text{ es una función continua. } \square \tag{4-7}$$

Figura 4-2.: Solución al Problema 2 con $P = \{1, 3, 6, 8, 9, 11, 13\}$ y $A = \{1, 4, 7, 3, 1, 5\}$



En la figura **4-2** se puede observar un ejemplo de una función continua construida con la función propuesta. Nótese que la función no es derivable en todos sus puntos, así pues, se resolverá a continuación el siguiente problema:

Problema 3

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2 \ldots n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Encontrar una función $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ y sea derivable en (x_0, x_n).

Al igual que en Problema 2 se definirá f a con n funciones f_k:

$f_1(x) = \frac{a_1}{x_1 - x_0}$

$f_k(x) = \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1})\right) \operatorname{sen}\left(\pi\frac{2x - x_k - x_{k+1}}{2(x_k - x_{k-1})}\right) + \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}}$, $k = 2, \ldots, n$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ f_k(x) & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k] \end{cases} \tag{4-8}$$

Por lo visto en los problemas anteriores:

$$I_1(k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} dx = a_k \tag{4-9}$$

Ahora se obtendrá la integral del término que contiene al seno.

$$\begin{aligned} I_2(k) =& \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1}) \right) \operatorname{sen}\left(\pi \frac{2x - x_k - x_{k-1}}{2(x_k - x_{k-1})} \right) dx \\ I_2(k) =& - \frac{(x_k - x_{k-1})}{\pi} \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1}) \right) \cos\left(\pi \frac{2x - x_k - x_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})} \right) \Bigg|_{x=x_{k-1}}^{x_k} \\ I_2(k) =& - \frac{2(x_k - x_{k-1})}{2\pi} \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1}) \right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \right) \\ & + \frac{2(x_k - x_{k-1})}{2\pi} \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1}) \right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ I_2(k) =& 0 \end{aligned} \tag{4-10}$$

Ahora se comprobará que cumple con el valor de la integral pedida usando 4-9 y 4-10:
$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(t)dt = \begin{cases} I_1(1) & \text{si } k = 1 \\ I_1(k) + I_2(k) & \text{si } k > 1 \end{cases} = \begin{cases} a_1 & \text{si } k = 1 \\ a_k + 0 & \text{si } k > 1 \end{cases} = a_k$
Como f es una función formada por curvas sinusoidales, las cuales son derivables, sólo basta comprobar que f es derivable en x_k para $k = 1, \ldots, n-1$.
Primero se calculará $f(x_k) = f_k(x_k)$:

Si $k = 1$:

$$f_1(x_1) = \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} \tag{4-11}$$

Si $k > 1$:

$$f_k(x_k) = \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1})\right) \operatorname{sen}\left(\pi \frac{2x_k - x_k - x_{k-1}}{2(x_k - x_{k-1})}\right) + \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f_k(x_k) = \left(\frac{a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1})\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{a_k}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f_k(x_k) = \frac{2a_k}{x_k - x_{k-1}} - f_{k-1}(x_{k-1}) \tag{4-12}$$

Ahora se calculará la derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} \tag{4-13}$$

La derivada por la izquierda:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} = f_k'(x_k) = 0 \tag{4-14}$$

La derivada por la derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{k+1}(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} \tag{4-15}$$

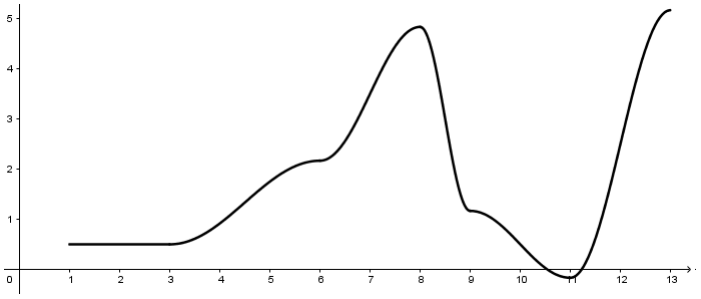
Sea $\Delta y = f_{k+1}(x_k) - f_k(x_k)$

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x_k + h) &= \left(\frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - f_k(x_k)\right) \operatorname{sen}\left(\pi \frac{2(x_k + h) - x_{k+1} - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)}\right) \\
&\quad + \frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \\
&= \left(\frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - f_k(x_k)\right) \operatorname{sen}\left(\pi \frac{2h - (x_{k+1} - x_k)}{2(x_{k+1} - x_k)}\right) + \frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \\
&= \left(\frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - f_k(x_k)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{h\pi}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \\
&= -\left(\frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - f_k(x_k)\right) \cos\left(\frac{h\pi}{x_{k+1} - x_k}\right) + \frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \\
&= \frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}\left(1 - \cos\left(\frac{h\pi}{x_{k+1} - x_k}\right)\right) + f_k(x_k) \cos\left(\frac{h\pi}{x_{k+1} - x_k}\right) \\
\Delta y &= \left(\frac{a_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - f_k\right)\left(1 - \cos\left(\frac{h\pi}{x_{k+1} - x_k}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{h\pi}{x_{k+1}-x_k}\right)}{h}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_{k+1}(x_k+h)-f_k(x_k)}{h}=0$$

Al ser la derivada por la derecha y por la izquierda iguales en x_k, resulta que f es derivable en x_k, por lo cual es derivable en (x_0, x_n). Por lo tanto, la función sugerida 4-8, cumple los requerimientos del problema. □

Figura 4-3.: Solución al Problema 3 con $P = \{1, 3, 6, 8, 9, 11, 13\}$ y $A = \{1, 4, 7, 3, 1, 5\}$



Problema 4

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{k-1} < x_k$, $k = 1, 2 \ldots n$ y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Encontrar un polinomio $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_jx^j$

$$a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j dt = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x^{j+1}}{j+1}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_k^{j+1}}{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_{k-1}^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{x_k^{j+1} - x_{k-1}^{j+1}}{j+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j-1} \frac{x_k^j - x_{k-1}^j}{j}$$

Si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ y $M = (m_{i,j})$, $m_{i,j} = \frac{1}{j}\left(x_i^j - x_{i-1}^j\right)$

$$M = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) & \cdots & \frac{1}{n}(x_1^n - x_0^n) \\ x_2 - x_1 & \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) & \cdots & \frac{1}{n}(x_2^n - x_1^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_{n-1} & \frac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2) & \cdots & \frac{1}{n}(x_n^n - x_{n-1}^n) \end{pmatrix}$$

Se obtiene la ecuación: $MB = A$

Para que la ecuación anterior tenga solución única, basta demostrar que el determinante de M es distinto de cero. A continuación se obtendrá el determinante de M. Sea $D = \det(M)$.

Cada columna j, C_j tiene de factor a $\frac{1}{j}$, por lo cual

$$D = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_{n-1} & x_n^2 - x_{n-1}^2 & \cdots & x_n^n - x_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

D se puede ver como una función polinómica de $n+1$ variables, $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y es de grado $\frac{n(n+1)}{2}$.

Como la suma de renglones no altera el determinante, si $j > i$, al renglón j se le pueden sumar todos los renglones desde el i hasta el $j-1$ obteniendo el renglón:

$$\begin{pmatrix} x_j - x_{i-1} & x_j^2 - x_{i-1}^2 & \cdots & x_j^n - x_{i-1}^n \end{pmatrix}$$

Lo anterior demuestra que $x_j - x_{i-1}$ es un factor del polinomio D. Por lo tanto

$$D = \frac{k}{n!} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{4-16}$$

El producto 4-16 tiene tantos factores como parejas (i, j) existen $0 \leq i < j \leq n$, es decir $\frac{n(n+1)}{2}$, por lo cual k debe ser una constante.
Para obtener el valor exacto de k nótese que el coeficiente de $x_n^n \cdot x_{n-1}^{n-1} \cdot x_{n-2}^{n-2} \cdots x_2^2 \cdot x_1$ en el producto 4-16 es $\frac{k}{n!}$.
Por otra parte, para obtener ese término en el determinante se deben multiplicar los términos de la diagonal, los cuales todos tienen coeficiente 1, por lo cual $\frac{k}{n!} = \pm\frac{1}{n!}$, de aquí que $k = \pm 1$.
Por último, por la definición del determinante,

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i} \right)$$

donde la suma se calcula sobre todas las permutaciones σ del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. σ_i es la imagen de i en la permutación σ y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es 1 si la permutación es par y -1 si la permutación es impar.
En el caso de la diagonal $\sigma(i) = i$, la cual es una permutación par, por lo cual $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, por lo tanto $k = 1$ y el sistema $MB = A$ tiene solución única, por lo cual se puede concluir la siguiente proposición:

Proposición 4.1. Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, $x_{k-1} < x_k$, $\forall\, k = 1, 2 \ldots n$ y $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.
Existe un único polinomio p de grado a lo más $n - 1$ tal que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(t)dt = a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Anexos

A. Implementación del algoritmo de aproximación de ART

```
#include <stdio.h>
using namespace std;
class recta{
public:
    double a[100],b;
}rec[100];
double pto[100][100][100],xy[100];
int i,j,n,m,veces;
double x,y;
int main(){
   printf("Escribe la cantidad de rayos (n)\n");
   scanf("%d",&n);
   printf("Escribe la cantidad de variables (m)'\n");
   scanf("%d",&m);
   printf("Escribe la matriz de n renglones por  m+1 columnas '\n");
   for(i=0;i<n;i++){
      for(j=0;j<m;j++){
         scanf("%lf",&rec[i].a[j]);
      }
      scanf("%lf",&rec[i].b);
   }
   printf("Cantidad la cantidad de iteraciones\n");
   scanf("%d",&veces);
   printf("Punto inicial\n");
}

   for(i=0;i<m;i++)
```

```
      scanf("%lf",&xy[i]);
   for(int k=1;k<=veces;k++)
      for(i=0;i<n;i++){
         double aux=0,norma=0;
         for(j=0;j<m;j++){
            aux+=rec[i].a[j]*xy[j];
            norma+=rec[i].a[j]*rec[i].a[j];
         }
         for(j=0;j<m;j++){
            pto[k][i][j]=xy[j]+(rec[i].b-aux)*rec[i].a[j]/norma;
            xy[j]=pto[k][i][j];
     }
      }
      for(int k=1;k<=veces;k++){
         printf("%d\n",k);
         for(i=0;i<n;i++){
            for(j=0;j<m;j++)
               printf("%.5lf ",pto[k][i][j]);
               printf("\n");
         }
     }
}
```

B. Código de la Transformada rápida de Fourier

```
#include <stdio.h>
#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <vector>
using namespace std;
class complejo{
public:
    double a,b;
};
complejo operator + (complejo z,complejo w){
    complejo r;
    r.a=z.a+w.a;
    r.b=z.b+w.b;
    return r;
}
complejo operator - (complejo z,complejo w){
    complejo r;
    r.a=z.a-w.a;
    r.b=z.b-w.b;
    return r;
}
complejo operator * (complejo z,complejo w){
    complejo r;
    r.a=z.a*w.a-z.b*w.b;
    r.b=z.a*w.b+z.b*w.a;
    return r;
}
```

```
complejo operator * (int z,complejo w){
    complejo r;
    r.a=z*w.a;
    r.b=z*w.b;
    return r;
}
double pi=acos(-1.0);
complejo arr[2000],p[2000];
long long N=32,i;
std::vector<complejo> fft(int k,int r,int n,complejo w){
vector<complejo> par,impar,y,dos;
complejo a,rc;
    if (n==1){
        //return y;
        printf("%d ",r);
        a.a=r;
        a.b=0;
        y.push_back(p[r]);
        return y;
    }
    else{
     //  w.a=cos(2*pi/N);
     //  w.b=sin(2*pi/N);
       a.a=1;
       a.b=0;
       par=fft(2*k,r,n/2,w*w);
       impar=fft(2*k,k+r,n/2,w*w);
       int j=0;
       y.resize(n+1);
       for(int i=0;i<n/2;i++){
           y[i]=par[i]+a*impar[i];
           y[i+n/2]=par[i]-a*impar[i];
           a=a*w;
           j=j+2;
       }
      // for(int i=0;i<j;i++)
```

```
      //     printf("%.0lf ",y[i].a);
      //  printf("\n");
        /*
           y.push_back(par[i]+impar[i]*a);
       for(int i=0;i<n/2;i++)
              y.push_back(par[i]-impar[i]*a);     */
       return (y);
    }
}
complejo pol(complejo x){
complejo r;
r.a=0; r.b=0;
for(i=N-1;i>=0;i--)
   r=p[i]+r*x;
return r;
}
int main(){
    char car='1';
    int t=0;

    complejo z,w,r;
    vector<complejo> res;

    arr[0].a=1.0;
    arr[0].b=0.0;
N=16;
    for(i=1;i<=N;i++){
       p[i-1].a=i;
       p[i-1].b=0;
    }
    //for(i=0;i<N;i++)
        //printf("%.4lf %.4lf\n",arr[i].a,arr[i].b);

    //while(N<130)
    {
        z.a=cos(2.0*pi/N);
```

```
        z.b=sin(2.0*pi/N);
w.a=1;
w.b=0;
       res=fft(1,0,N,z);
   printf("\n");
       for(int i=0;i<N;i++){
            printf("%2d %.3lf+ %.3lf ",i,res[i].a,res[i].b);
r=pol(w);
printf("     %.3lf+ %.3lf \n",r.a,r.b);
w=w*z;
       }
      // printf("N=%.2lld: %.4lf %.4lf\n",N,z.a,z.b);
       N=2*N;
    }
}
```

C. Función Beta

Se define para $x > 0$ y $y > 0$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

La función anterior es comúnmente conocida como la función Beta.
Propiedades:

- $B(u, v) = B(v, u)$

  Demostración. Se hará la sustitución $u = 1 - t \Rightarrow du = -dt$.

  $$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = B(y, x) \end{aligned}$$

  □

- $$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{C-1}$$

  Demostración.
  $$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \int_0^\infty e^{-r}r^{y-1}dr = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-r}t^{x-1}r^{y-1}dtdr$$

  Se hará el cambio de variable $t = uv$ y $r = u(1-v)$.
  $u = r + t$ y $v = \frac{t}{r+t}$, como $0 < r < \infty$ y $0 < t < \infty$, se obtiene $0 < u < \infty$ y $0 < v < 1$.

El Jacobiano del cambio para el cambio de variable es:

$$\left|\frac{\partial(t,r)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left| \begin{array}{cc} v & u \\ 1-v & -u \end{array} \right|\right| = |v(-u) - u(1-v)| = |-u| = u$$

La última igualdad es debido a que $u \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}(uv)^{x-1}(u(1-v))^{y-1}ududv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}u^{x+y-1}v^{x-1}(1-v)^{y-1}dudv \\ &= \int_0^\infty e^{-u}u^{x+y-1}du \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv = \Gamma(x+y)B(x,y)\end{aligned}$$

Por lo tanto $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ □

- $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}dt$

  Demostración. Se hará el cambio de variable $t = \frac{u}{u+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{(u+1)^2}du$

$$\begin{aligned}B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{u+1}\right)^{y-1}\frac{1}{(u+1)^2}du \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1}\frac{1}{(u+1)^2}du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}dt\end{aligned}$$

□

- $\int_a^b (b-t)^{x-1}(t-a)^{y-1}dt = (b-a)^{x+y-1}B(x,y)$

  Demostración. Se hará el cambio de variable $t = \frac{u-a}{b-a} \Rightarrow dt = \frac{1}{b-a}du$

$$\begin{aligned} B(x,y) =& \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{y-1}\frac{1}{b-a}du \\ =& \int_a^b \frac{(u-a)^{x-1}}{(b-a)^{x-1}}\frac{(b-u)^{y-1}}{(b-a)^{y-1}}\frac{1}{b-a}du \\ =& \frac{1}{(b-a)^{x+y-1}}\int_a^b (u-a)^{x-1}(b-u)^{y-1}du \end{aligned}$$

  Como $B(x,y) = B(y,x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} B(x,y) =& \frac{1}{(b-a)^{x+y-1}}\int_a^b (u-a)^{y-1}(b-u)^{x-1}du \\ \therefore \quad & \int_a^b (b-t)^{x-1}(t-a)^{y-1}dt = (b-a)^{x+y-1}B(x,y) \end{aligned}$$

  □

- $$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(u)\,\mathrm{sen}^{2y-1}(u)du \tag{C-2}$$

  Demostración. Se hará el cambio de variable $t = \cos^2(u) \Rightarrow dt = -2\,\mathrm{sen}(u)\cos(u)du$

$$\begin{aligned} B(x,y) =& \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ =& \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos^2(u)\right)^{x-1}\left(1-\cos^2(u)\right)^{y-1}(-2\,\mathrm{sen}(u)\cos(u)du) \\ =& -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2x-2}(u)\,\mathrm{sen}^{2y-2}(u)\,\mathrm{sen}(u)\cos(u)du \\ =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(u)\,\mathrm{sen}^{2y-1}(u)du \end{aligned}$$

  □

- $$B\left(x,\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2x-1}(u)du \tag{C-3}$$

  Demostración. Se aplicará la igualdad C-2:

  $$\begin{aligned}B\left(x,\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},x\right)=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\frac{1}{2}-1}(u)\operatorname{sen}^{2x-1}(u)du\\ =&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2x-1}(u)du\end{aligned}$$

  □

- $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$

  Demostración. Por la igualdad C-2:

  $$\begin{aligned}B(x,x)&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}(u)\operatorname{sen}^{2x-1}(u)du\\ &=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}(u)\cos(u)\right)^{2x-1}du\\ &=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen}(2u)}{2}\right)^{2x-1}du=\frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2x-1}(2u)du\end{aligned} \tag{C-4}$$

  Se hará el cambio de variable $u=\frac{t}{2}\Rightarrow du=\frac{1}{2}dt$

  $$\begin{aligned}B(x,x)&=\frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2x-1}(t)\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2x-1}(t)dt\\ &=\frac{1}{2^{2x-1}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2x-1}(t)dt\end{aligned}$$

  Aplicando C-3 se obtiene:

  $$B(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\cdot B\left(x,\frac{1}{2}\right) \tag{C-5}$$

Aplicando C-1:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

□

■

$$\int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\lambda-1} dt = a^{2\lambda-1} B\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) \tag{C-6}$$

Haciendo uso la propiedad anterior y haciendo $x = y = \lambda$, con límites de la integral $-a$ y a obtenemos:

$$\int_{-a}^{a} (a-t)^{\lambda-1} (t+a)^{\lambda-1} dt = (a+a)^{\lambda+\lambda-1} B(\lambda, \lambda)$$
$$\int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\lambda-1} dt = (2a)^{2\lambda-1} B(\lambda, \lambda) =$$

Por la ecuación C-5

$$\int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\lambda-1} dt = (2a)^{2\lambda-1} \frac{1}{2^{2\lambda-1}} \cdot B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)$$
$$\int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\lambda-1} dt = 2^{2\lambda-1} a^{2\lambda-1} \cdot \frac{1}{2^{2\lambda-1}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)$$
$$\int_{-a}^{a} \left(a^2 - t^2\right)^{\lambda-1} dt = a^{2\lambda-1} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \quad \square$$

D. Funciones vectoriales

D.1. Definiciones preliminares

El símbolo nabla (∇ [1]) se usa como un operador diferencial, el cual se define formalmente como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Hay tres operaciones esenciales con este operador:

- ∇f, gradiente.
- $\nabla \cdot f$, divergencia .
- $\nabla \times f$, rotacional

El gradiente se define como $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{f\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

D.1.1. Laplaciano ∇^2

El operador ∇^2 puede operar sobre un vector o un escalar.
El Laplaciano sobre un vector v se define como:

$$\nabla^2 v = (\nabla \cdot \nabla)v \tag{D-1}$$

[1] El símbolo ∇ se llama nabla, por ser muy parecido al instrumento que lleva este nombre.

Así pues, si $v = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 v =&(\nabla \cdot \nabla)v = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right) v \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) a\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) b\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) c\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{D-2}$$

El Laplaciano sobre un escalar F se define como

$$\nabla^2 F = \nabla \cdot (\nabla F) \tag{D-3}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla F) =& \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
=& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{D-4}$$

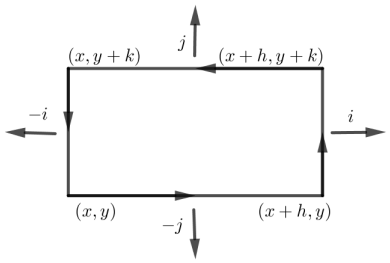
A continuación se tratará la divergencia y el rotacional.

D.1.2. Divergencia

Supongamos $F(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial de un gas y queremos calcular la densidad del fluido de un pequeño rectángulo R que se encuentra dentro del dominio de F. Eso lo podemos calcular con la operación

$$\frac{\text{Flujo a través de la frontera de la región1}}{\text{área de la región}}$$

Supongamos que los vértices del rectángulo son (x, y), $(x+h, y)$, $(x+h, y+k)$, $(x, y+k)$ por lo que su área será hk.



El flujo que atraviesa verticalmente aproximadamente es:

$$\begin{aligned} F(x, y+k)h \cdot \mathbf{j} + F(x, y)h \cdot (-\mathbf{j}) =& F_2(x, y+k)h - F_2(x, y)h \\ =& \frac{F_2(x, y+k)h - F_2(x, y)}{k} hk \\ \approx& \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} hk \end{aligned}$$

El flujo que atraviesa horizontalmente aproximadamente es:

$$\begin{aligned} F(x+h, y)k \cdot \mathbf{i} + F(x, y)k \cdot (-\mathbf{i}) =& F_1(x+h, y)h - F_1(x, y)h \\ =& \frac{F_1(x+h, y)h - F_1(x, y)}{h} hk \\ \approx& \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} hk \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Flujo a través de la frontera de la región}}{\text{área de la región}} =& \frac{\left(\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y}\right) hk}{hk} \\ =& \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

En un punto P la expresión anterior nos indica la tendencia del fluido de alejarse o aproximarse a P, por lo que se llamaría a P fuente o sumidero según corresponda, respectivamente.
A la densidad del flujo se le da el nombre de **divergencia** y su definición formal es:

La divergencia de un campo vectorial $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ (div$F$) se define como: $\text{div}F = \nabla \cdot F = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

Si la divergencia de un campo F es 0, se le llama *incompresible* o *solenoidal*.
Ahora definamos la densidad de circulación para el mismo rectángulo como

$$\frac{\text{Circulación alrededor del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}}$$

La suma de la circulación de la parte inferior y superior es:

$$\begin{aligned} F(x,y)\cdot \mathbf{i}h + F(x,y+k)\cdot -\mathbf{i}h =& h(F_1(x,y) - F_1(x,y+k)) \\ =& hk\frac{F_1(x,y) - F_1(x,y+k)}{k} \\ \approx& -hk\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

La suma de la circulación de la parte izquierda y derecha es:

$$\begin{aligned} F(x,y)\cdot \mathbf{\text{-}j}k + F(x+h,y)\cdot \mathbf{j}k =& k(F_2(x+h,y) - F_2(x,y)) \\ =& hk\frac{F_2(x+h,y) - F_2(x,y)}{h} \\ \approx& hk\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} \end{aligned}$$

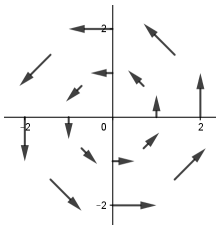
$$\frac{\text{Circulación alrededor del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} = \frac{\left(-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\right)hk}{hk} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}$$

A la densidad de la circulación se le da el nombre de **Rotacional** o **Rotor**, el cual se puede extender a $\mathbb{R}^3$:
$F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, (**rot**$F$[2]) se define como:

$$\mathbf{rot}F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \nabla \times F$$

[2]En algunos libros lo simbolizan como **curl**F, por el verbo en habla inglesa *curl* que significa enroscar.

El rotacional (**rot**F) de un campo F en un punto P, da por resultado un vector paralelo al eje de rotación de las líneas del flujo.
Por ejemplo, para el campo vectorial $F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, el cual se ve en la figura.

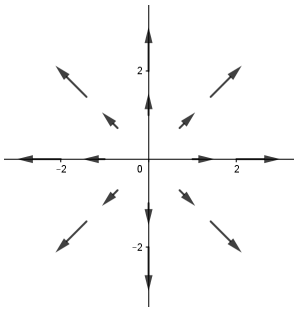


Las líneas del flujo para el campo son circulares, y presentan una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. El eje de rotación debe ser un vector perpendicular al plano XY, cual se verifica al obtener su rotacional:

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{k}$$

Por otra parte, para el campo vectorial $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, el cual se ve en la figura, son rectas, por lo cual no hay rotación en algún punto. El rotacional de este campo es 0:

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}y\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}x\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x\right)\mathbf{k} = \vec{0}$$



Cuando se tiene que para algún punto **rot**$F = 0$, se dice que el campo vectorial es **irrotacional** en ese punto, lo cual quiere decir que el fluido no tiende a rotar en ese

punto. Si para todo punto se tiene que el rotacional es cero, se dice que el campo es irratocional. Es decir:

$$F \text{ es un campo irrotacional } \Leftrightarrow \nabla \times F = 0$$

Algunas propiedades

Propiedad 1

$$\nabla^2 F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) \tag{D-5}$$

Demostración. Sea $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot F) =& \nabla\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
=& \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{D-6}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla \times \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} & -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\right) \\
&- \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\right) \\
&+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times F) = &\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(-\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{D-7}$$

Al restar a la ecuación D-6 la ecuación D-7 se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) = &\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k} = \nabla^2 F\end{aligned}$$

□

Propiedad 2:

$$F \cdot \nabla G = -G(\nabla \cdot F) + \nabla \cdot (GF) \tag{D-8}$$

Demostración. Sea $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (GF) =& \nabla \cdot (GF_1\mathbf{i} + GF_2\mathbf{j} + GF_3\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial GF_1}{\partial x} + \frac{\partial GF_2}{\partial y} + \frac{\partial GF_3}{\partial z}\right) \\ =& \left(G\frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \left(G\frac{\partial F_2}{\partial y} + F_2\frac{\partial G}{\partial y}\right) + \left(G\frac{\partial F_3}{\partial z} + F_3\frac{\partial G}{\partial z}\right) \\ =& \left(G\frac{\partial F_1}{\partial x} + G\frac{\partial F_2}{\partial y} + G\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(F_1\frac{\partial G}{\partial x} + F_2\frac{\partial G}{\partial y} + F_3\frac{\partial G}{\partial z}\right) \\ =& G\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\ &+ (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ =& G(\nabla \cdot F) + F \cdot \nabla G \\ \therefore \quad & F \cdot \nabla G = -G(\nabla \cdot F) + \nabla \cdot (GF)\end{aligned}$$

□

Propiedad 3:

$$F \times \nabla G = G(\nabla \times F) - \nabla \times (GF) \tag{D-9}$$

Demostración. Sea $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (GF) =& \nabla \times (G(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})) = \nabla \times (GF_1\mathbf{i} + GF_2\mathbf{j} + GF_3\mathbf{k}) \\
&= \left(\frac{\partial GF_3}{\partial y} - \frac{\partial GF_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial GF_3}{\partial x} - \frac{\partial GF_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial GF_2}{\partial x} - \frac{\partial GF_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(G\frac{\partial F_3}{\partial y} - G\frac{\partial F_2}{\partial z} + F_3\frac{\partial G}{\partial y} - F_2\frac{\partial G}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\
&\quad - \left(G\frac{\partial F_3}{\partial x} - G\frac{\partial F_1}{\partial z} + F_3\frac{\partial G}{\partial x} - F_1\frac{\partial G}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(G\frac{\partial F_2}{\partial x} - G\frac{\partial F_1}{\partial y} + F_2\frac{\partial G}{\partial x} - F_1\frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
=& G\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(F_3\frac{\partial G}{\partial y} - F_2\frac{\partial G}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\
&\quad - G\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} - \left(F_3\frac{\partial G}{\partial x} - F_1\frac{\partial G}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + G\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} + \left(F_2\frac{\partial G}{\partial x} - F_1\frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
=& G\left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right) \\
&\quad - \left(\mathbf{i}\left(F_2\frac{\partial G}{\partial z} - F_3\frac{\partial G}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(F_1\frac{\partial G}{\partial z} - F_3\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right. \\
&\quad \left. +\mathbf{k}\left(F_1\frac{\partial G}{\partial y} - F_2\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right) \\
=& G\left(\nabla \times F\right) - \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} = G\left(\nabla \times F\right) - F \times (\nabla G) \\
\therefore & \qquad F \times (\nabla G) = G\left(\nabla \times F\right) - \nabla(GF)
\end{aligned}$$

□

Proposiciones

Proposición 1:
Si $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$, $(x,y,z) \neq (x_0,y_0,y_0)$, entonces $\nabla \cdot \nabla F = 0$.

Demostración. Por simplicidad sea $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} =& -\frac{x-x_0}{r^3} = -A;\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{y-y_0}{r^3} = -B;\ \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{z-z_0}{r^3} = -C \Rightarrow \\
\nabla F =& -\left(\frac{x-x_0}{r^3}\mathbf{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\mathbf{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\mathbf{k}\right) \\
\frac{\partial A}{\partial x} =& \frac{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-2(x-x_0)^2}{r^5}; \\
\frac{\partial B}{\partial y} =& \frac{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2-2(y-y_0)^2}{r^5}; \\
\frac{\partial C}{\partial z} =& \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2(z-z_0)^2}{r^5} \Rightarrow \\
\nabla \cdot \nabla F =& \frac{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-2(x-x_0)^2}{r^5} + \frac{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2-2(y-y_0)^2}{r^5} \\
&+ \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-2(z-z_0)^2}{r^5} = 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 2: $\nabla \times \nabla F = \vec{0}$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla F =& \nabla \times \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \\
=& \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = \vec{0}
\end{aligned}$$

□

Proposición 3: $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$

Demostración. Sea $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \times F =& \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \\ =& \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{k}\right) \\ =& \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

□

Teorema de Gauss (Teorema de la divergencia)

Primero se ilustrará con dos ejemplos el Teorema:
Se tiene un contenedor lleno con algún tipo de gas. Si el gas se empieza a expandir pero el contenedor no se expande, ¿qué sucederá? Al ser el contenedor rígido el gas debe escapar del contenedor de alguna forma.
Se tiene una llanta de acero y se introduce aire a la llanta, ¿qué pasa con el aire dentro de la llanta? El aire dentro de la llanta se comprimirá.
Si un campo vectorial F representa el flujo del fluido, entonces la divergencia de F representa la expansión o comprensión del fluido. El Teorema de la divergencia dice que la expansión total del fluido en el interior de una región tridimensional E es igual al flujo en la frontera del E.

Sea F un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a V.
El Teorema de la Divergencia aplicado a un campo vectorial F es:

$$\int_V \nabla \cdot F \, dV = \int_S F \cdot \mathbf{n} \, dS$$

donde V es una región sólida simple y S la superficie frontera de V, y $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario de S apuntando hacia afuera.

Se estudiará ahora la expresión

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \tag{D-10}$$

Sea S es una superficie esférica, de radio R, centrada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Haciendo uso de la definición de $\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$, así como del teorema de la divergencia se puede escribir:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = \int_S qq \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot n \, d\mathbf{S}$$

Por D.1.2 se sabe que $div \, \frac{1}{|r - r_0|} = -\left(\frac{x - x_0}{R^3}\mathbf{i} + \frac{y - y_0}{R^3}\mathbf{j} + \frac{z - z_0}{R^3}\mathbf{k} \right)$

además $n = \frac{x - x_0}{R}\mathbf{i} + \frac{y - y_0}{R}\mathbf{j} + \frac{z - z_0}{R}\mathbf{k} \Rightarrow \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot n = -\frac{1}{R^2} \therefore$

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV = \int_S \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot n \, d\mathbf{S}$$

$$= -\frac{1}{R^2} \int_S d\mathbf{S} = -\frac{1}{R^2}(4\pi R^2) = -4\pi \tag{D-11}$$

Pero por D.1.2 se tiene que

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = 0 \text{ para } r \neq r_0 \tag{D-12}$$

Lo cual implicaría que $\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) dV = 0$, pero por lo que se mostró en el párrafo anterior tenemos $\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) dV = -4\pi$ lo cual lleva a la contradicción $0 = -4\pi$. La aparente contradicción se resuelve al observar que no es posible aplicar el Teorema de la Divergencia, ya que en r_0 es un punto singular de la función $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$. Lo anterior alienta a definir $\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)$ de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq r_0 \\ -4\pi & \text{si } r = r_0 \end{cases} \tag{D-13}$$

Una función que cumple la anterior ecuación es $-4\pi\delta(r - r_0)$, por lo cual se define

$$\delta^3(r) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \tag{D-14}$$

D.2. Un poco sobre la medida

El concepto de medida fue desarrollado a finales de siglo XIX y principios del siglo XX, es una extensión de la noción de área desarrollado por los griegos.
Para extender el concepto de área, se quieren conservar algunas propiedades:
Si A es el área de un conjunto E, $A(E)$, se quiere que $A \geq 0$.
Si E y F son conjuntos disjuntos $A(E \cup F) = A(E) + A(F)$.
En la teoría de la medida lo anterior se extiende para conjuntos numerables:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k\right), \qquad E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall i \neq j \tag{D-15}$$

Sea $P(X)$ el conjunto potencia de X
Definición: Sea X un conjunto y $M \subset P(X)$ una colección de conjuntos de X. Una función μ definida son M se dice que es una medida si $\mu \geq 0$ y cumple D-15.
Definición: Una σ-álgebra M es una colección de subconjuntos que es cerrado bajo uniones numerables y complementos.
Definición La función característica χ se define de como: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.
Definición: Una función simple es aquella que solamente toma una cantidad finita de valores.
Una función simple f es combinación lineal de funciones características:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x), \qquad A_k = \{\, x \,|\, f(x) = a_k \,\}$$

Si $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$ entonces se define

$$\int f\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

Ejemplos

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 8 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 9 \\ 6 & \text{si } 9 < x < 14 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1

$\mu(A)$ es la longitud del intervalo A.

$\int f\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mu(A_k) = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 3 + 16 + 12 + 30 = 61.$

Ejemplo 2

$\mu(A)$ es la cantidad de enteros en el intervalo A.

$\int f\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mu(A_k) = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 4 = 6 + 8 + 14 + 24 = 52.$

Ejemplo 3

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{si } 0 \notin A \end{cases}.$$

$\int f\mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mu(A_k) = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 3.$

La integral de una función no negativa f, es el supremo de todas las integrales de funciones simples s, tales que $0 \leq s \leq f$. Es decir:

$$\int f\mu(dx) = \sup\left\{ \int s\,\mu(dx) \,\middle|\, \quad s \text{ simple}, \quad 0 \leq s \leq f \right\}$$

Sea $f^+ = \text{máx}(f(x), 0)$ y $f^- = \text{máx}(-f(x), 0)$. Tanto f^+ como f^- son no negativas. Entonces, se puede definir para cualquier función f su integral como:

$$\int f\mu(dx) = \int f^+\mu(dx) - \int f^-\mu(dx)$$

A un espacio medible se simboliza como (X, M, μ) donde X es el espacio de puntos, M es la σ-álgebra y μ es la medida definida en M.

Sea (X, M, μ) un espacio medible. La integral de una función simple se define como

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

Bibliografía

[1] Altamirano-Santillán, Edwin V. ; Vallejo-Vallejo, Geovanny E. ; Cruz-Hurtado, Juan C.: Diseño de vibrómetro con Arduino y Simulink. En: *Interfases* (2016), Nr. 009, p. 11–30

[2] Anton, Howard ; Rorres, Chris ; Lay, David C.: *Elementary linear algebra with supplemental applications*. 10. John Wiley & Sons, 2011. – 1270 p.

[3] Aristóteles: *Acerca del alma*. 1. El cid editor, 2009

[4] Asimov, Isaac ; Cortina, Lorenzo: *El monstruo subatómico*. 1. Plaza & Janés, 1986

[5] Balázs, Péter ; Balogh, Emese ; Kuba, Attila: Reconstruction of 8-connected but not 4-connected hv-convex discrete sets. En: *Discrete Applied Mathematics* 147 (2005), Nr. 2-3, p. 149–168

[6] Bannon, Mike ; Kaputa, Frank: The Newton–Laplace Equation and Speed of Sound. En: *Thermaxx Jackets.–2014* (2015)

[7] Barcat, Juan A.: Lazzaro Spallanzani y la inseminación artificial. En: *Medicina* 69 (2009), Nr. 4, p. 483–486

[8] Barcucci, Elena ; Del Lungo, Alberto ; Nivat, Maurice ; Pinzani, Renzo: Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. En: *Theoretical computer science* 155 (1996), Nr. 2, p. 321–347

[9] Barker, John L. ; Midlock, Bernard J.: Apparatus for detecting and measuring the speed of moving objects by means of radio waves. (1959), März 17. – US Patent 2,878,467

[10] Batenburg, Kees J. ; Kosters, Walter A.: Solving Nonograms by combining relaxations. En: *Pattern Recognition* 42 (2009), Nr. 8, p. 1672–1683

[11] Beyer, Robert T. ; Raichel, Daniel R. *Sounds of our times, two hundred years of acoustics*. 1999

[12] Boone: Tomografía Computarizada (TC), National Institute of Biomedical

Imaging and Bioengineering. . – https://www.nibib.nih.gov/espanol/temas-cientificos/tomografia-computarizada-tc, [Web; accedido el 2018-09-26]

[13] Brianne, Christopher: What Is the Doppler Effect? (2018). – https://www.comsol.com/blogs/what-is-the-doppler-effect, [Web; accedido el 2019-10-3]

[14] Campbell, Stuart: History of ultrasound in obstetrics and gynecology. (2000)

[15] Cinthya, María ; Hrescak, Ortega ; Socolsky, Gustavo A.: Historia Godfrey Newbold Hounsfield: historia e impacto de la tomografía computada. En: *Revista Argentina de Radiología 76 (4): 331-341* 76 (2012), p. 331–341

[16] Coman, Ioan M. ; Popescu, Bogdan A.: Shigeo Satomura: 60 years of Doppler ultrasound in medicine. En: *Cardiovascular ultrasound* 13 (2015), Nr. 1, p. 48

[17] Cormack, Allan M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. En: *Journal of applied physics* 34 (1963), Nr. 9, p. 2722–2727

[18] Cormack, Allan M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II. En: *Journal of Applied Physics* 35 (1964), Nr. 10, p. 2908–2913

[19] Cox, Trevor: *The sound book: The science of the sonic wonders of the world*. 1. WW Norton & Company, 2014

[20] Cúpich Rodríguez, Miguel ; Elizondo Garza, Fernando J.: Actuadores piezoeléctricos. En: *Ingenierías* 3 (2000), Nr. 6, p. 22–28

[21] Dastur Adi, E ; Tank, PD: Ian Donald: the pioneer of ultrasound in medicine.

[22] De Régules, Sergio: *Las Orejas de Saturno: Y Otras Crónicas de la Ciencia*. Vol. 9. 1. Grupo Planeta (GBS), 2003

[23] Deans, Stanley R.: *The Radon transform and some of its applications*. 1. Courier Corporation, 2007

[24] Fang, ZhaoBao: Sonar. En: *International Encyclopedia of Geography: People, the Earth, Environment and Technology: People, the Earth, Environment and Technology* (2016), p. 1–7

[25] Filkin, David: *Stephen Hawking's universe: the cosmos explained*. 1. BasicBooks, 1997. – 65 p.

[26] Fitzpatrick, Richard: Classical electromagnetism. En: *The University of Texas*

at Austin, Austin 149 (2006)

[27] Física con ordenador: Efecto Doppler acústico. (2011). – http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/doppler/doppler.html, [Web; accedido el 2019-10-3]

[28] Física lab: Efecto Doppler. . – https://www.fisicalab.com/apartado/efecto\protect\discretionary{\char\hyphenchar\font}{}{}doppler#contenidos, [Web; accedido el 2019-10-3]

[29] Ganot, A: *Tratado de Física experimental y aplicada y de meteorología con una numerosa colección de problemas*. 1. Libreria Maxtor, 2012

[30] Gerhard J. Woeginger: The reconstruction of polyominoes from their orthogonal projections. En: *Information Processing Letters* 77 (2001), p. 225–229. ISBN 9783540429128

[31] Goldsmith, Mike: *Discord: The story of noise*. 1. Oxford University Press, 2012

[32] Gordon, Richard ; Bender, Robert ; Herman, Gabor T.: Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography. En: *Journal of theoretical Biology* 29 (1970), Nr. 3, p. 471–481

[33] Graff, Karl F.: A history of ultrasonics. En: *Physical acoustics* Vol. 15. Elsevier, 1981, p. 1–97

[34] Greitz, Torgny: Award ceremony speech. . – https://www.nobelprize.org/prizes/medicine/1979/ceremony-speech, [Web; accedido el 2018-09-26]

[35] Griffin, Donald R.: Return to the magic well: echolocation behavior of bats and responses of insect prey. En: *Bioscience* 51 (2001), Nr. 7, p. 555–556

[36] Grünschläger, Gustavo: Armas de Energía. El Futuro a la Vuelta de la Esquina. (2016)

[37] Henricksen, Clifford A.: Unearthing the mysteries of the leslie cabinet. En: *Recording Engineer/Producer Magazine* (1981), p. 130–134

[38] Herman, Gabor T.: *Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections*. 2. Springer Science & Business Media, 2009

[39] Hounsfield, Godfrey N.: Godfrey N. Hounsfield - Biographical. (1979). – https://www.nobelprize.org/prizes/medicine/1979/hounsfield/auto-biography/, [Web; accedido el 2018-09-26]

[40] Howard, John N.: John William Strutt, third Baron Rayleigh. En: *Applied Optics* 3 (1964), Nr. 10, p. 1091–1101

[41] Juhlin, Peter: Principles of Doppler tomography / Lund Univ.(Sweden). Dept. of Mathematics. 1992. – Informe de Investigación

[42] Juhlin, S P.: Doppler tomography. En: *Proceedings of the 15th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Societ* IEEE, 1993, p. 212–213

[43] Kaczmarz. S.: Angenaeherte aufloesung von systemen linearer gleichungen. En: *Information Processing Letters* 35 (1937), p. 355–357

[44] Kaharl, Victoria A.: *Sounding Out the Ocean's Secrets*. 1. National Academey of Sciences, 1999

[45] Kaproth-Joslin, Katherine A. ; Nicola, Refky ; Dogra, Vikram S.: The history of US: from bats and boats to the bedside and beyond: RSNA centennial article. En: *Radiographics* 35 (2015), Nr. 3, p. 960–970

[46] Khan Academy: Doppler effect introduction. (2019). – `https://www.khanacademy.org/science/ap-physics-1/ap-mechanical-waves-and-sound/doppler-effect-ap/v/introduction-to-the-doppler-effect`, [Web; accedido el 2019-10-3]

[47] Kuba, Attila: The reconstruction of two-directionally connected binary patterns from their two orthogonal projections. En: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 27 (1984), 9, Nr. 3, p. 249–265. – ISSN 0734–189X

[48] Kuba, Attila ; Nagy, Antal ; Balogh, Emese: Reconstruction of hv-convex binary matrices from their absorbed projections. En: *Discrete Applied Mathematics* 139 (2004), Nr. 1-3, p. 137–148

[49] Llor, Jesús ; Malumbres, Manuel P.: Modelling underwater wireless sensor networks. En: *Wireless Sensor Networks: Application-Centric Design, Ed. InTech Education and Publishing* (2010), p. 185–203

[50] Madjar, H ; Prömpeler, HJ ; Del Favero, C ; Hackelöer, BJ ; Llull, JB: A new Doppler signal enhancing agent for flow assessment in breast lesions. En: *European journal of ultrasound* 12 (2000), Nr. 2, p. 123–130

[51] Magnin, PA: Doppler-Effect-History and Theory. En: *Hewlett-Packard Journal* 37 (1986), Nr. 6, p. 26–31

[52] Martínez Medina, Nuria: Lazzaro Spallanzani, biólogo de biólo-

gos. (2010). – http://www.rtve.es/noticias/20101022/lazzaro-spallanzani-biologo-biologos/364121.shtml, [Web; accedido el 2019-04-25]

[53] Nobel Foundation, Archive: cormack-13315-portrait-mini-2x.jpg. . – https://www.nobelprize.org/images/cormack-13315-portrait-mini-2x.jpg, [Web; accedido el 2019-10-3]

[54] Nobel Foundation, Archive: hounsfield-13316-portrait-mini-2x.jpg. . – https://www.nobelprize.org/images/hounsfield-13316-portrait-mini-2x.jpg, [Web; accedido el 2019-10-3]

[55] Norton, Stephen J.: Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging. En: *Geophysical Journal International* 97 (1989), Nr. 1, p. 161–168

[56] Physics, Isaac: Doppler Effect Physics Concept. . – https://isaacphysics.org/concepts/cp_doppler_effect, [Web; accedido el 2019-10-3]

[57] Pierce, Allan D. ; Beyer, Robert T. *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications. 1989 Edition.* 1990

[58] Cienciaes.com: Pulgarcito y el sonar. Ecolocalización Podcasts de Ciencia. (2019). – http://cienciaes.com/ulises/2010/02/13/sonar-ecolocalizacion, [Web; accedido el 2019-04-25]

[59] Radon, Johann: 1.1 über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. En: *Classic papers in modern diagnostic radiology* 5 (2005), p. 21

[60] Ratcliffe, John A. *Robert Alexander Watson-Watt, 13 April 1892-5 December 1973.* 1975

[61] Shampo, Marc A. ; Kyle, Robert A.: Karl Theodore Dussik—pioneer in ultrasound. En: *Mayo Clinic proceedings* Vol. 70 Elsevier, 1995, p. 1136

[62] Stockmann, Jason P.: *New Strategies for Accelerated Spatial Encoding with Quadratic Fields in Magnetic Resonance Imaging*, Yale University, Tesis de Grado, Mayo 2012

[63] Tremblay, Luc: Waves, Optics and Modern Physics (203-NYC-05). (2018). – http://physique.merici.ca/ondes.html, (accedido el 2019-10-3)

[64] Tweedley, Hayden: Initial Technology Review. (2012)

[65] Vacca, Harold: Johann karl august radon, el nómada académico precursor matemático de la tomografía. En: *Visión electrónica* 7 (2013), Nr. 1, p. 194. – `https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/visele/article/view/4402/6787`, [Web; accedido el 2018-08-27]

[66] Wells, PNT ; Halliwell, M ; Skidmore, R ; Woodcock, JP ; Webb, AJ: Tumour detection by ultrasonic Doppler blood-flow signals. En: *Ultrasonics* 15 (1977), Nr. 5, p. 231–232

Índice alfabético

4-adyacentes, 8
8-adyacentes, 8

Algebraic Reconstruction Technique, 9
ART, 9

Beta, 84

Divergencia, 89, 91

Frecuencia de onda, 42
Frente de onda, 42

Gradiente, 89

Incompresible, 92
Irrotacional, 93

Longitud de onda, 42

Matriz binaria
    Convexa
      h-convexa, 7
      Horizontalmente , 7
      hv-convexo, 8
      v-convexa, 7
      Verticalmente, 7
      h-convexa, 7
      hv-convexa, 8
    Poliminó, 9

Nabla, 89

Rotacional, 89, 92
Rotor, 92

Solenoidal, 92

TDF, 34
Teorema de Gauss, 98
Teorema de la divergencia, 98
Transformada de Radon, 19
Transformada Discreta de Fourier, 34
Trayectoria
    4-conexa , 8
    8-conexa , 8