



UNIVERSIDAD
Panamericana

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE MECANISMOS PARA EL
BALANCEO DINÁMICO UTILIZANDO COORDENADAS
NATURALES”**

TESIS

P R E S E N T A
MARÍA TERESA ORVAÑANOS GUERRERO

**PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA**

CON RECONOCIMIENTO DE VALIDEZ OFICIAL DE ESTUDIOS DE LA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA, SEGÚN ACUERDO CON EL No. 20171659
DE FECHA 12 DE MAYO 2017

DIRECTORES DE TESIS:
DR. MARIO ACEVEDO ALVARADO
DR. RAMIRO VELAZQUEZ GUERRERO

AGUASCALIENTES, AGS., ENERO 2022



Aguascalientes, Ags., 24 de noviembre del 2021

LIBERACIÓN DE TESIS

Por medio de la presente, certificamos en nuestra calidad de directores de tesis, que el trabajo de María Teresa Orvañanos Guerrero, que lleva como título: **ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE MECANISMOS PARA EL BALANCEO DINÁMICO UTILIZANDO COORDENADAS NATURALES** cumple con los requisitos establecidos por el reglamento vigente de la Facultad de Ingeniería para presentarse en Examen de Titulación del programa de Doctorado en Ingeniería.

De resultar aprobado, podrá efectuar el trámite para la obtención del grado de Doctor en Ingeniería.

Atentamente,

Dr. Mario Acevedo Alvarado
Director de tesis

Dr. Ramiro Velázquez Guerrero
Director de tesis

A mi mamá, por su apoyo incondicional,
paciencia y cariño.

A Jimena Mariel, por ser mi alegría más grande.

Agradecimientos

A Dios, quien me ha dado todo.

Al Dr. Ramiro Velazquez y al Dr. Mario Acevedo por haber confiado en mi aceptándome en el doctorado y por impulsarme en todo momento.

Al Dr. Mariano Rivera por haberme apoyado para realizar mi estancia de investigación, por sus siempre pacientes asesorías y ayuda incondicional.

A la Universidad Panamericana por haber confiado siempre en mi, por haberme formado profesionalmente y por brindarme el espacio en el que puedo desarrollarme en la labor docente que tanto disfruto.

A la Dra. Claudia Nayelly Sanchez, por las horas de investigación compartidas, sacando tiempo de donde no lo teníamos, por su apoyo, su asesoría, su paciencia y su presencia constante impulsándome y animándome para perseverar.

Al maestro Óscar Dávalos Orozco, por su ayuda incondicional cada vez que necesité entender algún concepto matemático o de programación, gracias por toda la paciencia.

Al maestro Juan Carlos García, director de la Facultad de Ingeniería y al maestro Ricardo Macías Quijas, director de posgrados de la Facultad de Ingeniería, por su ayuda para lograr cerrar este ciclo.

A mis maestros, que me han formado a lo largo de todas las etapas, ayudándome a adquirir conocimientos pero también brindándome grandes enseñanzas para la vida.

Para mi hija, Jimena Mariel. Eres lo mejor que me ha pasado en la vida y tu presencia me impulsa a tratar de ser mejor. ¡Gracias por estar en mi vida!

Para mi mamá María de los Ángeles, por su comprensión y paciencia en todo momento, por creer en mi y ayudarme con su cariño y su tiempo para poder alcanzar mis metas. Tú me has dado todo y me has formado como soy. Te agradezco de corazón todos tus esfuerzos, ¡te quiero mucho!.

A mis amigos de la Sierra Tarahumara, al padre Kiko, al padre Lupe, al Hermano Kike, a Jorge Ayala, a las comunidades maristas y redentoristas con las que compartí la vida en la sierra y a todas las personas de Bawinokachi y de las comunidades rarámuri, rarámuri-mestizas y mestizas de Carichí, que me permitieron y siguen permitiendo compartir la vida,

marcándome de una forma especial. Las enseñanzas que me dejaron vivirán conmigo siempre. ¡Muchas gracias!

A mis familiares y amigos, sería difícil nombrarlos a todos, pero agradezco entrañablemente su cercanía en mi vida, su apoyo y su confianza, no puedo decir más que de corazón: ¡Gracias!

A mis alumnos, esas mentes inquietas que con sus preguntas y su alegría me motivan a seguir preparándome.

Contenido

Agradecimientos	vii
1. Introducción	3
1.1. Justificación y objetivos	4
1.2. Principales Aportaciones	7
1.3. Estructura de la tesis	9
2. Fundamentos	11
2.1. Tipos de coordenadas para el análisis de mecanismos	11
2.1.1. Coordenadas completamente cartesianas (naturales)	13
2.2. Optimización	18
2.2.1. Tipos de soluciones	19
2.2.2. Identificación de mínimos locales	20
2.2.3. Algoritmos de optimización	21
2.2.4. Análisis de resultados de una optimización multiobjetivo	26
2.3. Conclusión	29
3. Estado del arte	31
4. Balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado mediante re-distribución de masa por optimización	39
4.1. Introducción	39
4.2. Análisis Mecánico	40
4.2.1. Matriz de masas de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado utilizando FCC	43
4.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento	46
4.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento	49
4.3. Función objetivo y límites de optimización	53
4.4. Algoritmo de optimización	55
4.5. Ejemplo numérico	55
4.5.1. Características mecánicas y límites de optimización	56
4.5.2. Optimización	58
4.5.3. Análisis de los resultados numéricos	60
4.6. Conclusiones	63

5. Optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras utilizando descenso de gradiente simplificado	65
5.1. Introducción	65
5.2. Análisis mecánico	67
5.2.1. Matriz de masas un mecanismo de cuatro barras utilizando FCC	67
5.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento	71
5.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento	73
5.3. Función objetivo y límites de optimización	75
5.4. Algoritmo de optimización	76
5.5. Ejemplo numérico	78
5.5.1. Características mecánicas y límites de optimización	78
5.5.2. Optimización usando tres contrapesos	80
5.5.3. Análisis de los resultados numéricos usando tres contrapesos	81
5.5.4. Método de análisis de restricciones para la optimización del balanceo basado en diagramas de caja	84
5.5.5. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos	85
5.5.6. Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos	87
5.5.7. Análisis de los resultados numéricos usando dos contrapesos	89
5.5.8. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos	90
5.5.9. Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso	92
5.5.10. Análisis de resultados numéricos usando un contrapeso	94
5.5.11. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando un contrapeso	95
5.5.12. Expansión de los límites de optimización para el espesor del tercer contrapeso.	96
5.6. Conclusiones	98
6. Análisis y optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras	101
6.1. Introducción	101
6.2. Matriz de masas en coordenadas naturales de un elemento definido por tres puntos básicos	102
6.3. Mecanismo de seis barras	107
6.3.1. Adición de contrapesos	109
6.3.2. Matrices de masas de elementos individuales	110
6.3.3. Matriz de masas del mecanismo completo	114
6.3.4. Momento lineal y fuerza de sacudimiento	116
6.3.5. Momento angular y momento de sacudimiento	116
6.4. Función objetivo y límites de optimización	117

6.5.	Algoritmo de optimización	118
6.6.	Ejemplo numérico	120
6.6.1.	Características mecánicas y límites de optimización	121
6.6.2.	Cinco contrapesos	121
6.6.3.	Cuatro contrapesos	128
6.6.4.	Tres contrapesos	132
6.6.5.	Dos contrapesos	136
6.6.6.	Un contrapeso	139
6.6.7.	Comparación de los PF al reducir el número de contrapesos	142
6.7.	Conclusiones	144
7.	Conclusiones	146
7.0.1.	Trabajo futuro	148
7.0.2.	Artículos de revista	149
7.0.3.	Capítulos de libro	149
7.0.4.	Congresos	150
A.	Anexo: Ecuaciones correspondientes al ShF y ShM de un mecanismo de seis barras obtenidas mediante Python	151
	Bibliografía	163

Lista de Figuras

1-1. ABB IRB760 en el que se observa con claridad el contrapeso utilizado para llevar a cabo el balanceo estático del mecanismo [1].	5
1-2. Cámara aérea que consiste en un sistema de cámara posicionado mediante un manipulador paralelo dirigido por cables [2].	6
1-3. Procedimiento propuesto para el balanceo de mecanismos 3D	8
2-1. Puntos básicos de un elemento en el plano utilizando FCC	15
2-2. Ejemplos de mínimos	19
2-3. Ejemplo de una función compleja para minimizar	20
2-4. Fases del Algoritmo de Evolución Diferencial.	22
2-5. Espacio de decisión y espacio objetivo [3].	27
2-6. Ejemplo con tres soluciones	27
2-7. Soluciones óptimas del Frente de Pareto	28
4-1. Mecanismo manivela-biela-corredera en locomotora. [4]	39
4-2. Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	41
4-3. Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado con contrapesos para balanceo.	41
4-4. Cinemática directa del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	57
4-5. Objetivos optimizados β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	59
4-6. Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	59
4-7. Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	61
4-8. Implementación de la segunda solución seleccionada en el PF para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.	62
5-1. Mecanismo de cuatro barras	67
5-2. Mecanismo de cuatro barras con contrapesos	68
5-3. Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo de cuatro barras.	80
5-4. Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.	82

5-5. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando tres contrapesos.	83
5-6. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.	86
5-7. Análisis de dimensiones cuando se utilizan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.	87
5-8. Comparación del PF al utilizar diferente número de contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.	88
5-9. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando dos contrapesos.	90
5-10. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.	92
5-11. Análisis de dimensiones cuando se utilizan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.	93
5-12. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando un contrapeso.	95
5-13. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras.	96
5-14. Relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 cuando se utiliza solamente un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras	96
5-15. Comparación de los PF al cambiar los límites del espesor del contrapeso 3 del mecanismo de cuatro barras.	98
6-1. Elemento 2D con tres puntos básicos.	103
6-2. Mecanismo de seis barras	107
6-3. Contrapesos para el balanceo del mecanismo de seis barras	108
6-4. Ubicación de las dimensiones para elementos definidos por tres puntos básicos	111
6-5. Mecanismo de seis barras empleado para el ejemplo numérico.	120
6-6. Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo de seis barras.	123
6-7. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cinco contrapesos.	125
6-8. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.	126
6-9. Análisis de dimensiones cuando se utilizan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.	127

6-10. Comparación de los PF al utilizar cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.	129
6-11. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cuatro contrapesos.	130
6-12. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.	131
6-13. Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan cuatro de ellos en el mecanismo de seis barras.	132
6-14. Comparación de los PF al utilizar tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.	133
6-15. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando tres contrapesos.	134
6-16. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.	135
6-17. Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan tres de ellos en el mecanismo de seis barras.	136
6-18. Comparación de los PF al utilizar dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.	137
6-19. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando dos contrapesos.	138
6-20. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.	139
6-21. Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan dos de ellos en el mecanismo de seis barras.	139
6-22. Comparación de los PF al utilizar un contrapesos en el mecanismo de seis barras.	140
6-23. Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando un contrapeso.	141
6-24. Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapesos en el mecanismo de seis barras.	142
6-25. Relación entre área y espesor, cuando se implementan sólo el contrapeso 3 en el mecanismo de seis barras.	142
6-26. Comparación de los PF utilizando diferente cantidad de contrapesos en el mecanismo de seis barras.	144

Lista de Tablas

3-1. Algunos métodos para el balanceo mecánico de mecanismos.	35
3-2. Propuestas para el análisis matemático del balanceo de mecanismos	36
4-1. Parámetros de cada eslabón de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado	56
4-2. Comparación de resultados de optimización del mecanismo manivela-biela-corredera	64
5-1. Parámetros de cada eslabonamiento de un mecanismo de cuatro barras.	79
5-2. Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.	91
5-3. Comparación entre los resultados de optimización al expandir el límite del espesor del contrapeso tres del mecanismo de cuatro barras.	98
6-1. Distribución de puntos para el mecanismo de seis barras	108
6-2. Parámetros de cada eslabón de un mecanismo de seis barras	122
6-3. Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras.	143

Glosario

- CAD** Computer Aided Design - Diseño asistido por computadora. 78
- CoM** Center of Mass - Centro de Masa. 11, 42
- DE** Differential Evolution - Evolución Diferencial. 9, 10, 22–24, 29, 40, 58, 63, 101, 118, 119, 121, 144, 146
- FCC** Fully Cartesian Coordinates - Coordenadas completamente cartesianas. 6, 7, 9, 11–13, 29, 37, 49, 63, 65, 67, 73, 98, 99, 102, 116, 144, 146, 148
- KKT** Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker - son los requerimientos necesarios y suficientes para que la solución de un problema de programación matemática sea óptima.. 84
- PF** Pareto Front - Frente de Pareto. 10, 26, 28, 29, 58, 60, 66, 80, 81, 83, 87, 89, 94, 97, 99, 120, 123, 124, 128, 131–133, 136, 139–142, 145, 147, 148
- PGD** Projected Gradient Descent - Descenso de gradiente proyectado. 9, 10, 29, 66, 76, 77, 80, 99, 146
- RMS** Root Mean Square - Raíz cuadrática media. 32, 53, 75, 117
- RSSP** Es un eslabonamiento con un par cinemático revolutivo (R), dos esféricos (S) y uno prismático (P). 34
- RSSR** Es un eslabonamiento con dos pares cinemáticos revolutivos (R) y dos esféricos (S). 34
- ShF** Shaking Force - Fuerza de sacudimiento. 3, 4, 6, 9, 10, 14, 18, 31–34, 37, 40, 42, 48, 53, 54, 58, 60, 63, 65–67, 71, 75, 81, 83, 89, 90, 94, 97, 99, 101, 109, 117, 123, 124, 129, 130, 133, 134, 136, 137, 140, 141, 144–147
- ShM** Shaking Moment - Momento de sacudimiento. 3, 6, 9, 10, 14, 18, 31–35, 37, 40, 42, 51, 53, 54, 58, 60, 63, 65–67, 73, 75, 81, 83, 89, 90, 94, 97, 99, 101, 109, 117, 123, 124, 129, 130, 133, 134, 137, 140, 141, 144–147

Resumen

Esta tesis explora la optimización del balanceo dinámico en diferentes tipos de mecanismos en el plano para lograr la reducción máxima de las reacciones correspondientes a la Fuerza de Sacudimiento y al Momento de Sacudimiento a través de la redistribución de masas.

Las expresiones que definen las reacciones dinámicas en la base del mecanismo se obtienen de manera analítica, gracias al modelado realizado en coordenadas completamente cartesianas. Esto permite ensamblar una matriz de masas constante para todo el mecanismo, en donde además pueden identificarse fácilmente las condiciones de balanceo dinámico.

La optimización se lleva a cabo mediante contrapesos calculados utilizando los algoritmos de Descenso de Gradiente y Evolución Diferencial, y se analizan utilizando Frentes de Pareto. En la mayoría de los casos se realizan análisis de sensibilidad, empleando también Frentes de Pareto, que permiten conocer la importancia que cada contrapeso tiene para el balanceo general. Además se presenta una propuesta para el análisis de las restricciones de la optimización, empleando diagramas de caja.

Usando las técnicas propuestas es posible lograr mejoras de hasta el 99.70 % en la Fuerza de Sacudimiento y de hasta un 97.56 % en el Momento de Sacudimiento, o incluso mayores al 50 % en ambos casos cuando se utiliza únicamente un contrapeso.

Palabras clave: Mecanismos, Balanceo, Fuerza de Sacudimiento, Momento de Sacudimiento, Coordenadas Completamente Cartesianas, Coordenadas Naturales, Matriz de Masas, Optimización, Descenso de Gradiente Proyectado, Evolución Diferencial, Análisis de Sensibilidad, Frentes de Pareto.

Abstract

This thesis explores the dynamic balancing optimization of different types of mechanisms on the plane to achieve the maximum reduction of the Shaking Force and the Shaking Moment reactions through the redistribution of masses.

The expressions that define the dynamic reactions at the base of the mechanism are obtained with an analytic method, using fully cartesian coordinates. This allows to assemble a constant mass matrix for all the mechanism where the conditions of the dynamic balance can be easily identified.

Optimization is carried out using counterweights calculated by implementing the Gradient Descent and Differential Evolution algorithms. Results are then analyzed using Pareto Fronts. In most cases, sensitivity analyzes were carried out to highlight the importance that each counterweight has in the overall balance. In addition, a proposal for the analysis of the optimization constraints is presented, using box diagrams.

Using the proposed techniques it is possible to achieve improvements up to 99.70% in the Shaking Force and up to 97.56% in the Shaking Moment, or even greater than 50% in both cases when only one counterweight is used.

Keywords: Mechanisms, Balancing, Shaking Force, Shaking Moment, Fully Cartesian Coordinates, Natural Coordinates, Mass Matrix, Optimization, Projected Gradient Descent, Differential Evolution, Sensitivity Analysis, Pareto Front.

1. Introducción

Regresar al índice

El movimiento a altas velocidades de los eslabones de un mecanismo provoca reacciones que se transmiten a su base, causando con ello efectos indeseados como son el ruido, la fatiga y el desgaste. Además de los problemas técnicos que estas reacciones provocan, vale la pena considerar los efectos sociales puesto que, en las máquinas industriales, las vibraciones provocan a su vez contaminación de ambientes y pérdidas de energía que pueden derivar en problemas de salud para los trabajadores[5]. Resulta entonces de suma importancia el poder minimizar las reacciones derivadas del movimiento de los mecanismos para así prevenir los problemas técnicos [6] y sociales en los cuales tienen repercusión.

Entre las posibles reacciones que se transmiten a la base del mecanismo, se consideran principalmente las fuerzas que se aplican externamente y las fuerzas de inercia que se deben en su mayoría al movimiento con aceleraciones grandes [5]. Algunos métodos para resolver las reacciones dinámicas en un mecanismo pueden encontrarse en [7, 8]. Las fuerzas de inercia pueden ser representadas como una fuerza en torno al centro de masa [9]. En el ámbito de los mecanismos en movimiento, la fuerza que se produce sobre la base del mecanismo se conoce como Fuerza de Sacudimiento (ShF, por sus siglas en inglés provenientes de Shaking Force), mientras que el momento que se produce en la base es llamado Momento de Sacudimiento (ShM, por sus siglas en inglés provenientes de Shaking Moment).

En relación a las fuerzas externas, por ejemplo los pares motores de entrada producidos por motores, en la mayoría de los casos se transforman en fuerzas internas. Por lo tanto, si todas las fuerzas externas aplicadas a un eslabonamiento se convierten en fuerzas internas del mecanismo en conjunto, entonces el balanceo de un mecanismo puede lograrse mediante la cancelación de la fuerza de sacudimiento y del momento de sacudimiento [9]. Por estas razones, el balanceo de un mecanismo consiste precisamente en reducir, o en el mejor de los casos en eliminar, las reacciones que se tienen en la base del mismo, es decir la ShF y el ShM.

El balanceo ha sido un problema ampliamente estudiado en ingeniería mecánica. Antes de este siglo, el balanceo de mecanismos era llevado a cabo en forma intuitiva y en muy pocos casos se utilizaban cálculos aritméticos simples[10]. En aquel tiempo los mecanismos se

movían en su mayoría mediante la fuerza física del ser humano, es decir que las velocidades que se alcanzaban eran relativamente pequeñas y por lo tanto el balanceo necesario podría ser considerado como básico y se concentraba principalmente en eliminar las fuerzas en la base del mecanismo provocadas en su mayoría por el peso. Sin embargo esta situación comenzó a cambiar a principios de este siglo cuando el movimiento de los elementos de máquinas comenzó a realizarse a mayores velocidades principalmente gracias al uso de motores de combustión interna [10]. Surgió entonces la necesidad de establecer principios teóricos para llevar a cabo el balanceo de mecanismos, el balanceo gravitacional dejó de ser la prioridad y el interés se centró en la reducción de la ShF.

En la actualidad, la mayoría de la literatura habla de dos tipos de balanceo de mecanismos. Se considera que un mecanismo se encuentra balanceado por fuerzas cuando la fuerza total aplicada por el mecanismo a la base fija es constante, sin importar cualquier movimiento del sistema, es decir que el centro de masas del mecanismo permanece estacionario. Este tipo de balanceo es conocido también con el nombre de balanceo estático [11]. Sin embargo, vale la pena destacar que a pesar del uso del término ‘estático’, cualquier des-balance es en realidad el resultado de un movimiento acelerado de los eslabones del mecanismo, pero el balanceo se denomina así pues es sencillo detectarlo en condiciones estáticas[5].

Por otra parte se encuentra el balanceo dinámico [12], que es aquel en el que la base del mecanismo no experimenta variación en fuerzas ni momentos. Es decir que el balanceo dinámico de un mecanismo abarca también el balanceo estático. Un mecanismo se encuentra balanceado dinámicamente cuando el centro de masas global permanece estacionario (es decir cuando el momento lineal es cero) y al mismo tiempo el momento angular permanece constante (es cero) con respecto a un punto fijo.

1.1. Justificación y objetivos

Regresar al índice

En la actualidad, los mecanismos paralelos son ampliamente utilizados en aplicaciones que van desde manipuladores industriales, hasta aplicaciones de cirugía laparoscópica [13]. La mayoría de los telescopios terrestres usan mecanismos paralelos, ya sea como sistema secundario para la alineación del espejo, o como sistema primario del dispositivo apuntador. El balanceo de este tipo de mecanismos resulta de especial interés puesto que ello permite, entre otras cosas, disminuir costos de mantenimiento, alargando la vida útil de sus piezas.

Un ejemplo en donde es posible apreciar la importancia del balanceo dinámico se encuentra en aquellos mecanismos con eslabonamientos pesados, por ejemplo en un simulador de vuelos

en donde usualmente la masa total de la plataforma móvil es bastante grande, ello conlleva que los actuadores necesarios para moverla requieran de gran potencia. En este tipo de sistemas, el balanceo estático elimina la necesidad de utilizar actuadores tan potentes. Lo mismo ocurre con simuladores de conducción [14] .

Otro ejemplo se encuentra en los manipuladores seriales como es el caso del ABB IRB 760, que incorpora un contrapeso para contrarrestar los efectos de las fuerzas de inercia (figura 1-1).

Por su parte, la importancia del balanceo dinámico de un mecanismo se hace notar, por ejemplo, en una base móvil ubicada en un vehículo espacial o satélite, evitando con ello que el movimiento del mecanismo genere desviaciones en la trayectoria, las cuales tendrían que ser corregidas constantemente generando con ellos un aumento en gasto de combustible.

También se puede hacer mención de las cámaras áreas (figura 1-2) para la grabación de películas, que son posicionadas mediante un mecanismo paralelo dirigido mediante cables. Este tipo de cámaras requieren estar balanceadas para dar estabilidad a la imagen.

Las cadenas cinemáticas de lazo cerrado [14] siguen siendo muy utilizadas para la creación de nuevos dispositivos, mismos que cada vez trabajan a mayores velocidades al tiempo que requieren ser cada vez más precisos. La teoría del balanceo sigue siendo entonces vigente y requiere seguir avanzando, pues en tanto se propongan nuevos métodos que faciliten el balanceo de los mecanismos, será posible su mejora en forma general.



Figura 1-1.: ABB IRB760 en el que se observa con claridad el contrapeso utilizado para llevar a cabo el balanceo estático del mecanismo [1].

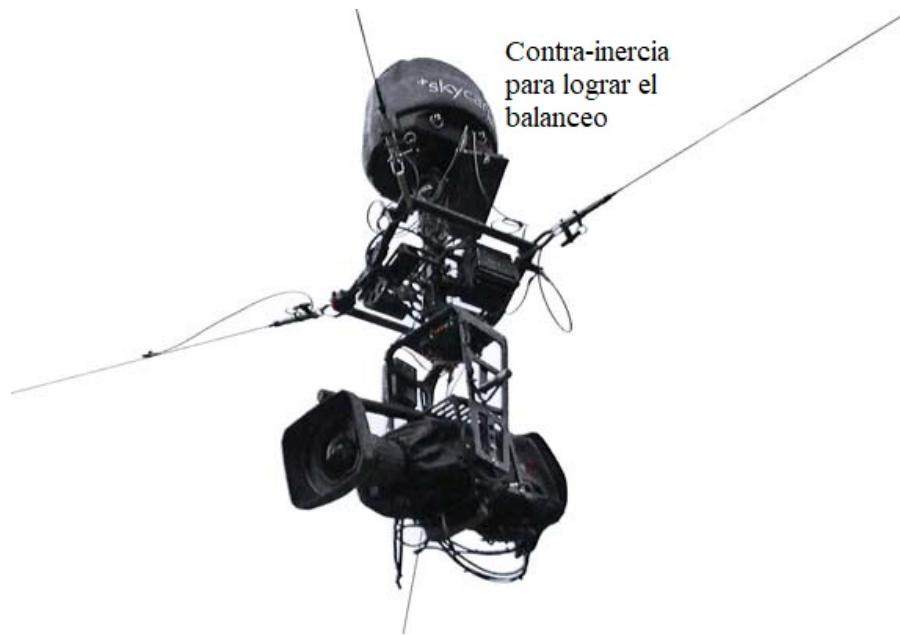


Figura 1-2.: Cámara aérea que consiste en un sistema de cámara posicionado mediante un manipulador paralelo dirigido por cables [2].

En la actualidad, uno de los retos más importantes del balanceo de mecanismos es la obtención de soluciones que puedan ser aplicadas eficientemente en la práctica. En forma general, muchas de las soluciones de balanceo conducen a mecanismos que incrementan enormemente la masa total del mismo así como su complejidad reduciendo de esta forma el desempeño [15, 16].

El presente trabajo de investigación, propone un método basado en el uso de coordenadas completamente cartesianas (FCC) y de algoritmos simples de optimización, para la obtención de las condiciones de balanceo de mecanismos a través de la adición de contrapesos cuyas dimensiones pueden ser restringidas con claridad desde el planteamiento del problema.

El uso de FCC para la obtención del ShF y del ShM disminuye la complejidad matemática de las ecuaciones correspondientes al evitar el uso de coordenadas angulares, dado que al utilizar FCC las relaciones cinemáticas se encuentran en su totalidad definidas dentro de la matriz de masas del mecanismo, que son multiplicadas posteriormente por coordenadas absolutas; resguardando de esta forma la complejidad del problema dentro de la matriz de masas, que además puede ser planteada en una forma tan sencilla que podría automatizarse mediante software. De esta forma, se elimina la necesidad de establecer relaciones con ecuaciones de lazo vectorial y el uso de ángulos que se ocupan en los planteamientos tradicionales.

Vale la pena destacar que, sin importar la complejidad del mecanismo, ni el número de eslabones por el que esté compuesto, el uso de FCC permite mantener las ecuaciones simples,

ya que al definir la matriz de masas del mecanismo en función de los puntos básicos de cada eslabonamiento, y considerando que estos puntos están compartidos entre los diferentes sólidos que los conforman, las ecuaciones no crecen tanto como cuando se usan coordenadas de punto de referencia, en donde cada sólido implica necesariamente el uso de tres coordenadas más (en dos dimensiones) o seis coordenadas más (en tres dimensiones).

Es bien sabido que el balanceo dinámico de mecanismos tridimensionales supone una mayor complejidad para la obtención de las expresiones que permitan definir las reacciones en la base del mecanismo (ShF y ShF). La solución del problema tridimensional de balanceo ha sido tratada en Acevedo [17]. Es una extensión del método planteado en este trabajo, para el cual es posible aplicar los mismos métodos que se utilizaron en esta investigación. El procedimiento propuesto se muestra a detalle en la figura **1-3**. En los mecanismos tridimensionales, los pasos que son necesarios resultan idénticos a los presentados en esta investigación, al definir a cada uno de los eslabones del mecanismo utilizando los puntos básicos que García de Jalón presenta en [18], con la única diferencia de que al tratarse de mecanismos tridimensionales, cada eslabón estará formado por cuatro puntos básicos (en lugar de estar formado por dos o tres puntos como en los ejemplos anteriores). Sin embargo la aplicación concreta del método para mecanismos tridimensionales queda fuera del marco del presente trabajo, por lo cuál será considerada dentro del trabajo a futuro.

Dado lo anterior, los principales objetivos de este trabajo son:

- Presentar una metodología simple, que a través del uso de coordenadas completamente cartesianas (FCC, por sus siglas en inglés), permita la obtención de las condiciones de balanceo de un mecanismo.
- Resolver el balanceo dinámico de distintos mecanismos empleando contrapesos, calculando sus dimensiones y su posición mediante la optimización, logrando soluciones con mejores características.
- Proponer metodologías que faciliten el modelado y el cálculo de las reacciones dinámicas usadas en la optimización, logrando el balanceo de mecanismos completos de forma mas eficiente.

1.2. Principales Aportaciones

Regresar al índice

Las principales aportaciones que se podrán encontrar a lo largo de este trabajo son:

- Se presentará en forma detallada el uso de FCC, también conocidas como coordenadas naturales, para el modelado de diversos tipos de mecanismos, buscando demostrar la

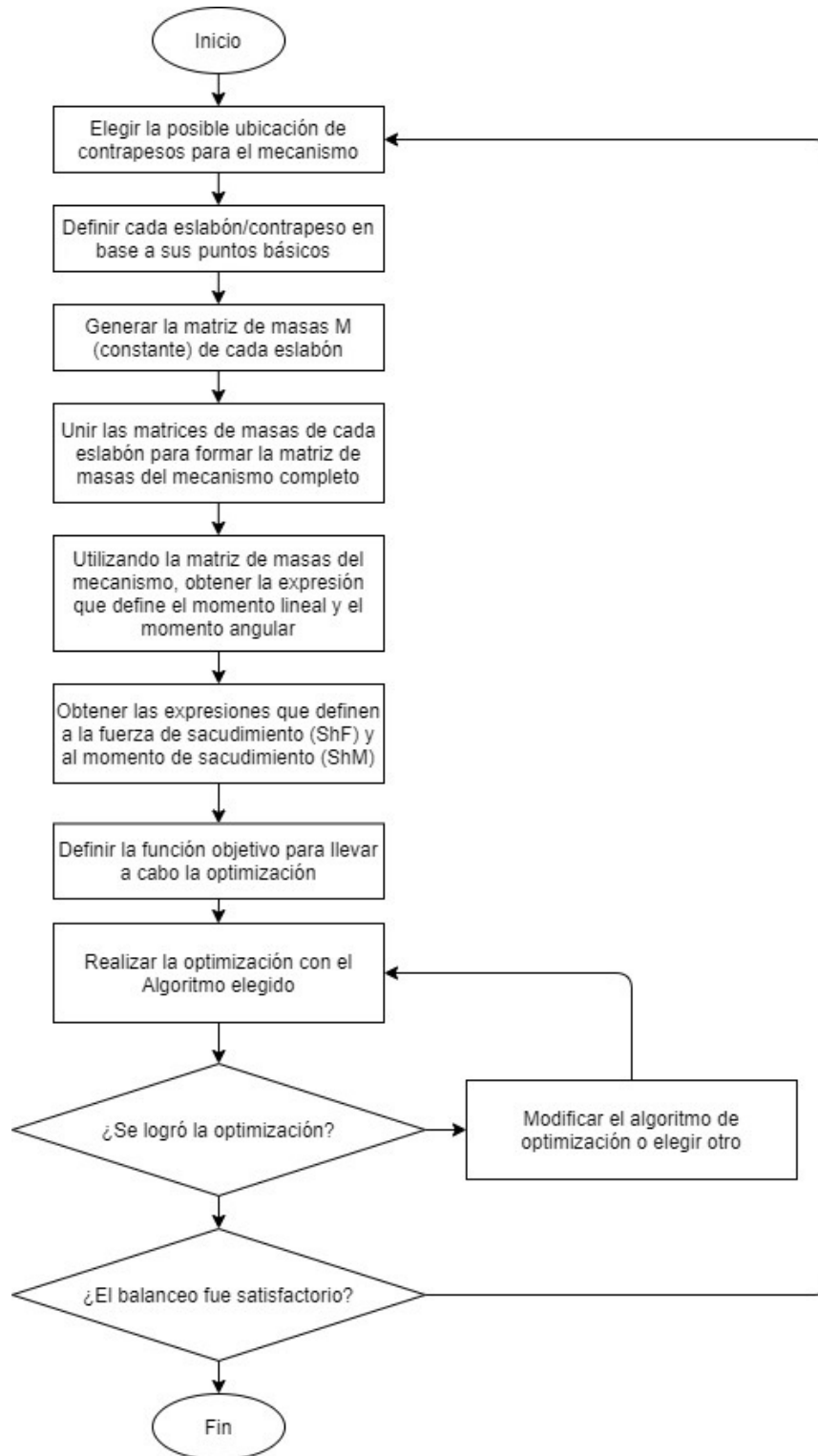


Figura 1-3.: Procedimiento propuesto para el balanceo de mecanismos 3D

simplicidad para la obtención de las ecuaciones que definen las condiciones de balanceo de cada mecanismo en forma particular.

- Se presentará el desarrollo para la obtención de la matriz de masas utilizando FCC en elementos formados por tres puntos básicos. El planteamiento de esta matriz es original y, hasta donde se ha podido indagar, no ha sido previamente expuesto en forma detallada en ningún otro trabajo de la literatura. Se utilizará esta matriz para la obtención de las condiciones de balanceo de un mecanismo que emplee este tipo de elementos.
- Se presentará la optimización del balanceo de un mecanismo de cuatro barras por medio de un algoritmo de optimización simple, basado en gradiente (Descenso de Gradiente Proyectado PGD), dicho algoritmo ha sido simplificado para esta aplicación, al corregir los límites de la optimización cuando los resultados salen del rango permitido.
- Se utilizará el algoritmo de Evolución Diferencial (DE) para la optimización de otros ejemplos, comprobando que permite obtener disminuciones considerables tanto en la ShF como en la ShM, teniendo control sobre los parámetros de optimización y garantizando de esta forma que la masa final del mecanismo se mantenga dentro de los límites razonables pudiendo ser llevados a la práctica. Este algoritmo ha sido empleado ya con anterioridad para el balanceo de mecanismos, sin embargo se comprobará su eficacia al utilizarlo con ecuaciones obtenidas a través del uso de FCC.
- Se realizará una propuesta para el análisis de los límites mecánicos sugeridos para la optimización, de forma que resulte posible conocer si es recomendable modificarlos (en caso de ser mecánicamente posible) para obtener mejores resultados.
- Se propondrá una metodología que permitirá conocer la importancia que cada uno de los contrapesos propuestos tiene en relación al balanceo de un mecanismo, de tal forma que, con base en este análisis de sensibilidad, sea posible reducir el número de contrapesos cuando la aplicación lo requiera.

1.3. Estructura de la tesis

Regresar al índice

Este trabajo está organizada de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se encuentra un breve resumen de los principales fundamentos teóricos en los que se sustenta este trabajo, centrándose principalmente en las características de las FCC, presentando además, en forma detallada, el método para la obtención de la matriz de masas de un elemento en dos dimensiones definido mediante dos puntos básicos. Por otra parte se

abordan también algunos conceptos básicos de optimización, centrándose en los algoritmos que se emplean en este trabajo.

En el Capítulo 3 se presenta una breve revisión de la historia del balanceo de mecanismos, desde las primeras publicaciones relacionadas con el tema en 1902 hasta la actualidad.

En el Capítulo 4 se lleva a cabo la optimización del balanceo de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado, explicando con detalle el método para la obtención de las ecuaciones que definen tanto a la ShF como al ShM del eslabonamiento, e implementando posteriormente una optimización de los mismos utilizando el algoritmo de Evolución Diferencial (DE por sus siglas en inglés) para lograr el mejor balanceo posible a través de la adición de contrapesos.

En el Capítulo 5 puede encontrarse la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras a través de una versión simplificada del algoritmo de descenso de gradiente proyectado (PGD por sus siglas en inglés). Se propone también el análisis de las derivadas parciales de la función objetivo evaluadas en las soluciones óptimas con la finalidad de lograr definir los límites idóneos para la optimización, además se presenta una propuesta de análisis de sensibilidad para la reducción de la cantidad de contrapesos a utilizar basado en Frentes de Pareto (PF por sus siglas en inglés).

En el Capítulo 6 se lleva a cabo el análisis y la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras, debido a la complejidad de este mecanismo, se introduce por primera vez en forma detallada la obtención de una matriz de masas general de un elemento definido por tres puntos básicos. Posteriormente se desarrolla la obtención de las ecuaciones que definen tanto a la ShF como al ShM y se lleva a cabo su optimización a través del algoritmo de DE, así como el análisis numérico del mismo de acuerdo a la propuesta planteada con anterioridad en el capítulo 4. Se utiliza también el método propuesto para el ajuste de los límites de la optimización, así como el análisis de los PF para lograr la reducción de contrapesos.

Finalmente, en el capítulo 7 se concluye con un breve resumen de los resultados obtenidos, así como con las líneas de trabajo futuro.

2. Fundamentos

Regresar al índice

Este capítulo tiene como objetivo presentar los conceptos fundamentales en los que se basa este trabajo. En la sección 2.1 se presenta un breve resumen sobre los tipos de coordenadas que se emplean para el análisis de mecanismos, haciendo especial hincapié en las Coordenadas Completamente Cartesianas (FCC por sus siglas en inglés), ya que en ellas se basarán los métodos presentados en los siguientes capítulos y resulta importante entenderlas a detalle.

En la sección 2.2 es posible encontrar algunos conceptos de optimización que se utilizan en este trabajo, así como la descripción general de los algoritmos que se emplean para la optimización del balanceo de mecanismos. Además, debido a que se abordará la optimización de problemas multiobjetivo, se presenta un resumen del concepto de Frentes de Pareto, una herramienta de mucha utilidad para encontrar las soluciones no dominadas y poder elegir de entre ellas las que resultan más adecuadas para los fines concretos que se busquen en cada caso.

2.1. Tipos de coordenadas para el análisis de mecanismos

Regresar al índice

Con la finalidad de llevar a cabo el análisis de un mecanismo es necesario elegir una serie de parámetros que describan a la perfección su posición, velocidad, aceleración, ubicación del centro de masa (CoM por sus siglas en inglés provenientes de Center of Mass), etc.

En los sistemas multicuerpo, las coordenadas independientes únicamente determinan la ubicación (y por ende también la velocidad y la aceleración) de los eslabones de entrada. Los parámetros relacionados con el resto de los eslabones pueden ser determinados al resolver el problema de posiciones, velocidades y aceleraciones, sin embargo surgen dificultades cuando se trata de problemas no-lineales de forma que existen múltiples soluciones. Es por ello que resulta importante utilizar las coordenadas dependientes que determinan sin ninguna ambigüedad las posiciones y orientaciones de cada uno de los cuerpos que forman un mecanismo [19].

En tanto mayor es el número de coordenadas dependientes que se emplean para definir un mecanismo, mayor será la complejidad de las ecuaciones que lo definan. El análisis dinámico de un mecanismo conlleva normalmente la formulación e integración numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales bastante complejas [20], de ahí la necesidad de optimizar la formulación de estas ecuaciones para facilitar su análisis posterior. Es en este punto en donde las FCC juegan un papel determinante.

Para el análisis de mecanismos, en forma general se definen tres tipos de coordenadas: coordenadas relativas, coordenadas de punto de referencia (también conocidas como coordenadas cartesianas) y coordenadas completamente cartesianas (FCC también conocidas como coordenadas naturales).

En las coordenadas relativas, la posición de cada elemento se determina con respecto a la posición del elemento anterior de la cadena cinemática. Estas coordenadas fueron utilizadas por primera vez por Paul y Krajcinovic [21, 22], Sheth y Uicker [23] y Smith et.al. [24]. Entre sus ventajas puede mencionarse que reducen el número de coordenadas y son ideales para mecanismos de cadena abierta, sin embargo debe considerarse que la formulación matemática resulta compleja y las ecuaciones que se obtienen de su uso para el análisis cinemático también lo son, requiriendo por ello un mayor tiempo de procesamiento.

Por otra parte, las coordenadas de punto de referencia ubican la posición de un punto de cada elemento (llamado precisamente "punto de referencia", y que usualmente es el centro de gravedad) mediante el uso de dos coordenadas Cartesianas y determinando el ángulo de orientación del elemento en relación un sistema de ejes de inercia. Entre las ventajas de utilizar este tipo de coordenadas se encuentran que la posición de cada elemento está determinada directamente, de ahí que el procesamiento matemático requerido para llevar a cabo la mayoría de los análisis es menor); sin embargo el número de variables que se utiliza para definir un mecanismo es mayor que el empleado con coordenadas relativas.

En algunas ocasiones es posible utilizar en conjunto coordenadas relativas y coordenadas cartesianas, resultando un sistema que se conoce como coordenadas mixtas, esto es posible apreciarlo en el trabajo de autores como Kim et Vanderploeg [25] y Attia [26].

Por su parte, las FCC resultan ser una opción interesante al momento de describir un mecanismo para su posterior análisis, y dado que el presente trabajo se basa en este tipo de coordenadas, éstas serán explicadas con mayor detalle.

2.1.1. Coordenadas completamente cartesianas (naturales)

Regresar al índice

Las coordenadas completamente cartesianas (FCC) se encuentran definidas en [18, 27] y se caracterizan por tener la capacidad de describir un sistema mecánico sin la necesidad de utilizar variables angulares.

A principios de los años 80's García de Jalón et.al. presentaron los primeros artículos [28, 29, 30] en los que se hacían referencia a un nuevo método para la obtención de las ecuaciones de restricción de un mecanismo a partir de las cuales se llevaba a cabo el análisis cinemático. El primer artículo relacionado con simulación cinemática en 3D fue presentado por el mismo autor en 1982 [31].

Las coordenadas naturales no requieren el uso de variables angulares para definir la orientación del eslabonamiento, en cambio se utilizan las coordenadas cartesianas de algunos puntos y vectores unitarios. Estos puntos y vectores se localizan normalmente en las uniones del mecanismo (de forma que estos puntos están compartidos entre los diferentes eslabonamientos).

García de Jalón y Bayo en [18] presentaron una explicación extremadamente completa y detallada de las FCC, que son llamadas también coordenadas naturales.

En [32] García de Jalón resumió las principales características de las FCC de la siguiente forma:

1. Están constituidas únicamente por variables cartesianas, son sencillas de visualizar y de entender.
2. Los puntos principales y los vectores unitarios pueden ser ubicados en las uniones, de esta forma pueden compartirse entre cuerpos contiguos, contribuyendo a la definición de las uniones y manteniendo moderado el número de variables.
3. Al utilizar coordenadas naturales, un conjunto de variables simples define la posición y geometría de todos los cuerpos en relación a un sistema global de referencia.
4. Las ecuaciones de restricción se obtienen directamente de las características de cada cuerpo rígido y de las características de las uniones, estas ecuaciones se caracterizan por ser sencillas y fácilmente derivables para obtener la matriz Jacobiana.
5. En caso de que sea necesario es posible agregar con mucha facilidad coordenadas relativas siendo éstas, en algunas ocasiones, útiles para definir fuerzas en los actuadores.

6. Son muy versátiles para la síntesis y optimización de mecanismos, debido a que en las variables quedan explícitamente definidos los parámetros de diseño (por ejemplo las longitudes).
7. Cuando todos los cuerpos contienen al menos dos puntos y dos vectores unitarios, la matriz de inercia es una constante y en ella no existen fuerzas dependientes de la velocidad, esto se puede aprovechar para mejorar la eficiencia de las simulaciones mecánicas.
8. El análisis de mecanismos utilizando coordenadas naturales puede ser automatizado en forma simple mediante software.

Matriz de masas empleando FCC

Regresar al índice

Para poder llevar a cabo el análisis dinámico de un mecanismo, en este caso particular el análisis del balanceo estático y dinámico, resulta de suma importancia el poder formular ecuaciones que definan tanto la ShF como el ShM en términos de la posición, velocidad y aceleración de las coordenadas dependientes. A continuación se resume la teoría que García de Jalón presenta en [18] para la obtención de la matriz de masas de elementos en el plano (2D), resulta de suma importancia entender a detalle esta información pues en ella está la base de las formulaciones que se presentan más adelante en este trabajo.

Considere el elemento de la figura **2-1**, su movimiento puede ser definido completamente mediante los puntos básicos i y j . El sistema de coordenadas (x,y) constituye un sistema global de referencia, en tanto que el sistema (\bar{x},\bar{y}) es móvil y tiene su origen ubicado en el punto i con su eje \bar{x} en dirección a j . Se considera un punto cualquiera \mathbf{P} del elemento, que se encuentra definido mediante el vector \mathbf{r} en relación al sistema de coordenadas global y por el vector $\bar{\mathbf{r}}$ en relación al sistema de coordenadas local. De forma que se cumple la ecuación 2-1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} \quad (2-1)$$

En donde \mathbf{A} representa a la matriz de rotación. En tanto se consideran elementos rígidos, la posición local del vector $\bar{\mathbf{r}}$ permanece constante sin importar el movimiento al que esté sujeto el elemento. Por lo que la posición del punto \mathbf{P} se define como se muestra en la ecuación 2-2.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i + c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{n}) \quad (2-2)$$

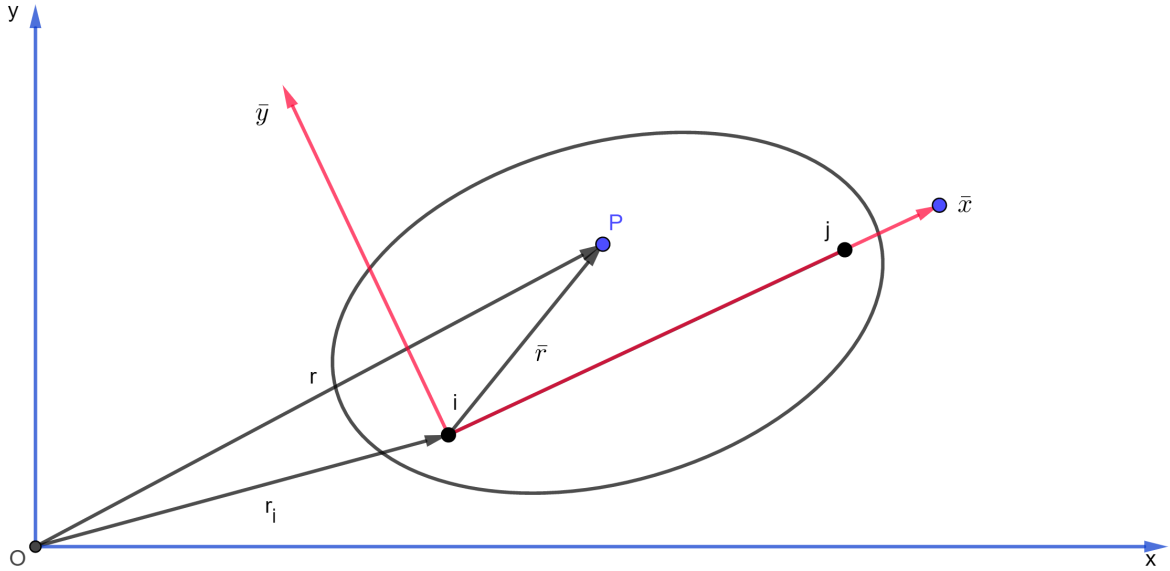


Figura 2-1.: Puntos básicos de un elemento en el plano utilizando FCC

En donde c_1 y c_2 son las componentes del vector $\bar{\mathbf{r}}$ en el sistema de coordenadas locales. Las componentes del vector \mathbf{r} quedan definidas entonces como se muestra en las ecuaciones 2-3.

$$\begin{aligned} x &= x_i + c_1(x_j - x_i) - c_2(y_j - y_i) \\ y &= y_i + c_1(y_j - y_i) + c_2(x_j - x_i) \end{aligned} \quad (2-3)$$

La ecuación 2-3 puede ser expresadas de forma matricial de acuerdo a la ecuación 2-4.

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & c_2 & c_1 & -c_2 \\ -c_2 & 1 - c_1 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (2-4)$$

En donde $\mathbf{q}^T = \{x_i \ y_i \ x_j \ y_j\}$ es el vector que contiene las coordenadas del elemento. La matriz \mathbf{C} es constante para un punto dado P y no cambia con el movimiento del sistema, por lo tanto puede derivarse tal como se muestra en las ecuaciones 2-5 y 2-6.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} \quad (2-5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} \quad (2-6)$$

Los coeficientes c_1 y c_2 que definen a la matriz \mathbf{C} pueden ser expresados en función de las coordenadas de los puntos i y j en el marco de referencia local quedando tal como se muestra en la ecuación 2-7

$$\bar{\mathbf{r}} = c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\bar{\mathbf{n}}) \quad (2-7)$$

Pero, debido a que $\bar{\mathbf{r}}_i = 0$ al encontrarse en el origen de referencia local, la ecuación 2-7 puede expresarse como se muestra en la ecuación 2-8

$$\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{n}}] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \quad (2-8)$$

En donde el vector \mathbf{c} contiene los coeficientes c_1 y c_2 , y la matriz $\bar{\mathbf{X}}$ tiene como columnas los componentes de los vectores $\bar{\mathbf{r}}_j$ y $\bar{\mathbf{n}}$.

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{n}}] = \begin{bmatrix} x_j & -y_j \\ y_j & x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ij} & 0 \\ 0 & L_{ij} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Donde L_{ij} corresponde a la distancia entre los puntos i y j . La matriz $\bar{\mathbf{X}}$ será siempre invertible, por lo tanto la ecuación 2-8 puede utilizarse para conocer el valor de \mathbf{c} al resolver la ecuación 2-10

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}} \quad (2-10)$$

Al resolver la ecuación 2-10, los términos de \mathbf{c} quedan definidos básicamente mediante tres integrales (ecuaciones 2-11 - 2-13).

$$\int_A \rho dA = m \quad (2-11)$$

$$\int_A \rho \mathbf{c} dA = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \int_A \rho \bar{\mathbf{r}} dA = m \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}}_G \quad (2-12)$$

$$\int_A \rho \mathbf{c} \mathbf{c}^T dA = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left(\int_A \rho \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T dA \right) \bar{\mathbf{X}}^{-T} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

En donde m es la masa total del elemento, $\bar{\mathbf{r}}$ representa las coordenadas locales del centro de gravedad e I_x , I_y , I_{xy} son los momentos y productos de inercia con respecto a las coordenadas locales cuyo origen se encuentra en el punto básico i . Ahora bien, el trabajo virtual W^* generado por las fuerzas de inercia en el elemento puede definirse mediante la integral sobre la superficie Ω del trabajo virtual de las fuerzas de inercia de una masa diferencial localizada en el punto P (ecuación 2-14).

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^{*T} \ddot{\mathbf{r}} d\Omega \quad (2-14)$$

Donde ρ corresponde a la densidad del material del elemento. Sustituyendo las ecuaciones 2-5 y 2-6, el trabajo virtual (ecuación 2-14) queda definido tal como se muestra en la ecuación 2-15.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} d\Omega \quad (2-15)$$

Y debido a que los vectores $\dot{\mathbf{q}}^{*T}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$ son independientes de Ω pueden salir de la integral, quedando la ecuación 2-16.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \left(\rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (2-16)$$

Por otra parte, conforme a la definición de trabajo virtual que se plantea en [18], se sabe que el trabajo virtual también puede ser definido de acuerdo a la ecuación 2-17.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2-17)$$

Y relacionando la ecuación 2-16 con la ecuación 2-17 es posible definir la matriz de masas \mathbf{M} (ecuación 2-18) de un elemento formado por dos puntos básicos.

$$\mathbf{M}_{2P} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \quad (2-18)$$

La ecuación 2-19 se obtiene desarrollando el producto de $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ en la ecuación 2-18.

$$\mathbf{M}_{2P} = \rho \int_{\Omega} \left[\begin{array}{cccc} (1-c_1)^2 & 0 & (1-c_1)c_1 - c_2^2 & -c_2 \\ 0 & (1-c_1)^2 + c_2^2 & c_2 & (1-c_1)c_1 - c_2^2 \\ (1-c_1)c_1 - c_2^2 & c_2 & c_1^2 - c_2^2 & 0 \\ -c_2 & (1-c_1)c_1 - c_2^2 & 0 & c_1^2 + c_2^2 \end{array} \right] d\Omega \quad (2-19)$$

Y sustituyendo en la ecuación 2-19 los valores que se obtuvieron a partir de la ecuación 2-10 con las integrales resueltas de acuerdo a las ecuaciones 2-11,2-12 y 2-13 se obtiene la matriz de masas \mathbf{M}_{2P} para elementos en dos dimensiones definida a partir de dos puntos básicos y un vector unitario (ecuación 2-20).

$$\mathbf{M}_{2P} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & a & -c & b \\ b & c & d & 0 \\ -c & b & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

En donde:

$$a = \frac{Iz}{l_{ij}^2} + m - \frac{2m\bar{x}}{l_{ij}} \quad (2-21)$$

$$b = -\frac{Iz}{l^2} + \frac{m\bar{x}}{l_{ij}} \quad (2-22)$$

$$c = \frac{m\bar{y}}{l_{ij}} \quad (2-23)$$

$$d = \frac{Iz}{l_{ij}^2} \quad (2-24)$$

Esta matriz, al ser constante para eslabones rígidos, permitirá la definición de la ShF y el ShM de cada elemento, de una forma sencilla; haciendo a su vez posible obtener las condiciones de balanceo del sistema mecánico de manera directa.

2.2. Optimización

Regresar al índice

La optimización es una herramienta importante en la toma de decisiones y en el análisis de sistemas físicos. Para hacer uso de esta herramienta, primero es necesario identificar un objetivo, es decir una medida cuantitativa del rendimiento del sistema en estudio. Esta medida dependerá de ciertas características del sistema conocidas como variables y lo que se busca es encontrar los valores de las variables que optimizan el objetivo, resultando común que estas variables estén restringidas de alguna manera.

El proceso de identificar el objetivo, las variables y las restricciones de un problema se conoce como modelado [33]. Una vez que se tiene definido el modelo, es posible utilizar un algoritmo de optimización para que encuentre su solución. No hay un algoritmo universal de optimización sino que existen muchas propuestas.

El tipo de modelos [33] que se abordarán en este trabajo son de tipo continuo, con restricciones, no convexos y no lineales. A continuación explica en forma breve en qué consisten dichas características:

1. Continuo: significa que la función objetivo está definida en los números reales.
2. Con restricciones: debido a que se busca optimizar sistemas mecánicos, existen restricciones que no permiten a los elementos el exceder determinadas dimensiones, éstas características son incluidas en el modelado del sistema.
3. No convexo: un problema convexo únicamente tiene un mínimo global, sin embargo los problemas que se abordan en este trabajo tienen siempre múltiples mínimos locales.
4. No lineal: esto se debe a que las funciones objetivo que buscan optimizarse no son ecuaciones lineales (es decir que su grado es mayor a uno).

2.2.1. Tipos de soluciones

Regresar al índice

Generalmente, al buscar minimizar un problema, el mejor resultado sería poder encontrar un mínimo global, es decir un punto en el cuál la función encuentra su valor mínimo:

Un punto x^* es un mínimo global de una función f si $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \mathfrak{R}$

Este valor mínimo global (figura 2-2) normalmente es muy difícil de obtener debido a que usualmente se realizan búsquedas locales y no existe entonces la seguridad de que la función f pudiera tener otro mínimo en otra región que no ha sido muestreada dentro del algoritmo [33]. Es por ello que la mayoría de los algoritmos son capaces de encontrar mínimos locales, que corresponden al valor más pequeño de una función f en una región dada.

Un punto x^* es un mínimo local de una función f si existe una región N_{x^*} de x^* tal que $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in N$.

Sin embargo, de acuerdo a la definición anterior, si se tiene la función constante $f(x) = 2$, cada punto x corresponde a un mínimo (figura 2-2), conociéndose entonces como mínimos locales débiles, que deben ser diferenciados de los mínimos locales estrictos.

Un punto x^* es un mínimo local estricto de una función f si existe una región N_{x^*} de x^* tal que $f(x^*) < f(x) \forall x \in N$ con $x \neq x^*$ (figura 2-2).

La figura 2-3 muestra un ejemplo de una función con muchos mínimos locales (no convexa) que puede resultar difícil de minimizar debido a los algoritmos tienden a quedar ‘atrapados’ en mínimos locales.



Figura 2-2.: Ejemplos de mínimos

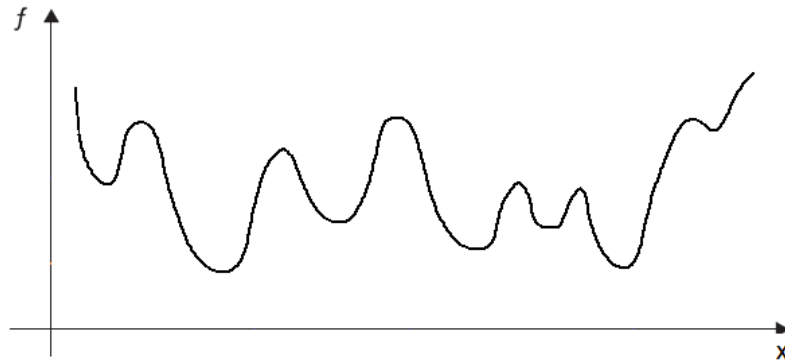


Figura 2-3.: Ejemplo de una función compleja para minimizar

2.2.2. Identificación de mínimos locales

Regresar al índice

Cuando una función f es suave (como es el caso de las funciones analizadas en este trabajo), una forma eficiente y práctica de identificar mínimos locales es a través del vector gradiente (∇f) y la matriz Hessiana ($\nabla^2 f$).

A continuación se definen matemáticamente el Gradiente, el Hessiano y los mínimos locales.

Definición de Vector Gradiente

Regresar al índice

El gradiente es un vector denotado ∇f de un campo escalar f , que representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de una función, es decir que apunta hacia los lugares en donde la gráfica de f tiene un mayor incremento [34].

$$\nabla f(X) = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

Definición de Matriz Hessiana

Regresar al índice

La matriz Hessiana [34] de una función f de n variables es una matriz cuadrada ($n \times n$) formada por las segundas derivadas parciales de f con la forma:

$$\nabla^2 f(X) = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

Mínimos locales

Regresar al índice

Siempre que f sea dos veces diferenciable, se sabe que x^* es un mínimo local si:

1. $\|\nabla f(x^*)\| = 0$
2. $\nabla^2 f(x^*)$ es positivo semidefinido, esto es si $v^T \nabla^2 f(x^*) v \leq 0 \forall v$

Una función f es diferenciable si todas sus derivadas existen, es continuamente diferenciable si todas las segundas derivadas parciales son funciones continuas de x y es dos veces diferenciable si todas las segundas derivadas parciales existen y a su vez son continuamente diferenciables.

2.2.3. Algoritmos de optimización

Regresar al índice

Para llevar a cabo la optimización de una función, se han propuesto gran cantidad de algoritmos, algunos de ellos con un número finito de pasos, otros siguiendo métodos iterativos que convergen a una solución y algunos otros metaheurísticos que permiten la obtención de soluciones aproximadas a algunos problemas.

Para la realización de este trabajo se implementaron el algoritmo de Evolución Diferencial, y una versión simplificada del algoritmo de Descenso de Gradiente Proyectado, siendo el primero un método metaheurístico y el segundo un método determinístico.

A continuación se explican ambos métodos:

Evolución Diferencial

Regresar al índice

El método de Evolución Diferencial (DE por sus siglas en inglés) consiste en un algoritmo de optimización estocástico (metaheurístico), basado en poblaciones. Fue desarrollado por Rainer Storn y Kenneth Price en 1997 [35]. Al ser un algoritmo evolutivo utiliza mecanismos inspirados en la teoría de la evolución, donde los individuos más aptos de una población (los que tienen las características que les permiten sobrevivir más tiempo) son los que tienen más descendencia, heredando así las buenas características de sus padres. Esto hace que la nueva generación tenga mayores oportunidades de sobrevivir mejorando generación tras generación. Para lograr esta evolución se utilizan mecanismos semejantes a los que existen en la naturaleza, como son la mutación, la recombinación y la selección.

En la figura 2-4 es posible observar las fases necesarias para llevar a cabo la DE, mismas se explican brevemente a continuación:

1. Inicialización

Se genera una población aleatoria inicial S conformada por N individuos, todos ellos ubicados dentro de la región factible.

$$S = \{X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}\} \quad (2-27)$$

Cada individuo es un vector de D dimensiones (elementos de la función objetivo) definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_{ik} &= [X_{ik1}, X_{ik2}, \dots, X_{ikD}] \quad \forall \quad k, i, \quad k = 1, 2, \dots, k_{max} \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ L &\leq X_{ikj} \leq U \quad \forall \quad j, \quad j = 1, 2, \dots, D \end{aligned} \quad (2-28)$$

Donde i es el número de individuo, k es el número de generación (iteración), k_{max} es el máximo número de generaciones, L es el límite inferior del parámetro, U es el límite superior y j es el número de elemento del individuo.

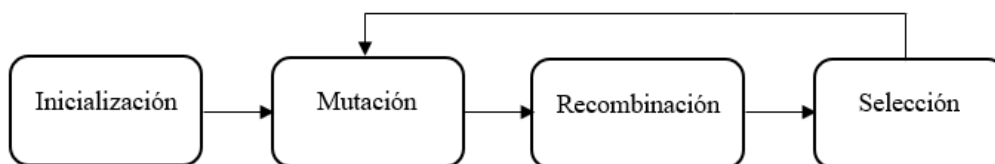


Figura 2-4.: Fases del Algoritmo de Evolución Diferencial.

La función objetivo evalúa qué tan apto es cada individuo, en este caso el individuo más apto es aquel que provoca un valor más cercano a cero al ser evaluado en la función objetivo.

2. Mutación

Para cada individuo de la población inicial se obtiene un vector mutado \hat{X}_{ik} mediante

$$\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k}) \quad (2-29)$$

donde γ, δ, η son individuos aleatorios mutuamente distintos y diferentes al individuo actual i . Por tanto el tamaño de la población N debe ser mayor o igual a cuatro. El parámetro de mutación F es una constante definida entre 0 y 2 para controlar la amplificación de la variación diferencial [35].

3. Recombinación

Se mezclan los elementos del individuo inicial y del individuo mutado para obtener un nuevo individuo y_{ik} utilizando la constante de cruce $CR \in [0.1, 1]$. Para cada elemento del individuo se genera un valor aleatorio R entre 0 y 1, si este valor es menor a CR , se reemplaza el elemento inicial por el mutado; en caso contrario se mantiene el original.

$$y_{ikj} = \begin{cases} \hat{X}_{ikj} & \text{si } R < CR \\ X_{ikj} & \text{si } R \geq CR \end{cases} \quad (2-30)$$

Este proceso se realiza para cada individuo de la población inicial, obteniendo así N vectores de prueba y_{ik} .

4. Selección

Se aplica el criterio (2-31) para reemplazar o conservar a los individuos en la nueva generación.

$$X_{ik+1} = \begin{cases} y_{ik} & \text{si } f(y_{ik}) < f(X_{ik}) \\ X_{ik} & \text{si } f(y_{ik}) \geq f(X_{ik}) \end{cases} \quad (2-31)$$

Una vez generada la nueva población, la mutación, recombinación y selección, éstas se repiten hasta alcanzar el número máximo de generaciones G o algún otro criterio de paro.

El proceso iterativo llevado a cabo para encontrar un punto óptimo a través del algoritmo de DE requiere contar con un criterio que permita determinar en qué momento se ha alcanzado un mínimo local satisfactorio. Éste criterio de paro puede estar determinado por el número de generaciones, sin embargo con frecuencia se implementan además otro tipo de criterios. En este caso se abordarán los criterios utilizados por el algoritmo DE que se encuentra en la librería SciPy de Python.

Algoritmo 1: Criterios de paro para DE implementado en la librería SciPy de Python.

```

1 Inicialización;
2 repeat
3   | Mutación;
4   | Recombinación;
5   | Selección;
6 until ( $\sigma \leq (T * (Prom))$ ) || ( $maxiter = 1000$ );

```

El algoritmo 1 muestra los criterios de paro implementados en la librería SciPy de Python, en donde la mutación, recombinación y selección se repiten hasta el momento en que la desviación estándar (σ) entre los resultados de evaluar la función es menor o igual a la tolerancia (T) multiplicada por el promedio de las evaluaciones de la función, o bien hasta que el número de generaciones ($maxiter$) llega a 1000.

Al comenzar la optimización empleando el algoritmo de DE con una población inicial generada aleatoriamente, los valores de la desviación estándar (σ) serán altos al evaluar estos puntos en la función, lo mismo que el valor del promedio de los valores obtenidos al evaluar la función objetivo en esos puntos ($Prom$), sin embargo conforme las iteraciones van avanzando los puntos que forman la población se van acercando hacia el mínimo, lo cual provoca que tanto la σ como el $Prom$ vayan disminuyendo. De esta forma, aún cuando el número de generaciones no haya llegado a 1000, en el momento que la σ resulta igual o menor al porcentaje del $Prom$ indicado a través de la T el algoritmo se detiene. El valor para T se encuentra definido por default como 0.10, es decir que el algoritmo de DE se detiene cuando la desviación estándar es menor al 10% del valor correspondiente al promedio de los resultados de la evaluación de la función objetivo o, si esta condición no se alcanza, se detiene cuando el número de generaciones llega a 1000.

Este algoritmo ha sido elegido para el balanceo de dos de los mecanismos que se proponen a lo largo de este trabajo, debido a que al tratarse de un algoritmo basado en poblaciones no es tan sensible a las condiciones iniciales, es menos propenso a quedar atascado en mínimos locales y pueden ser empleados en múltiples problemas (lineales, no lineales, etc.) [35, 36].

Descenso de Gradiente Projectado

Regresar al índice

El descenso de gradiente es un algoritmo iterativo que puede encontrar un mínimo local en una función [37, 33, 38]. Para ello se comienza en un punto aleatorio y se continua la optimización hasta que se alcanza el mínimo de la función. Esta técnica está basada en el uso del vector gradiente para calcular cada nuevo punto puesto que, como es sabido, el vector gradiente $\nabla f(X)$ evaluado en un punto X apunta hacia la dirección máximo ascenso,

de ahí que el método de Descenso de Gradiente mueve el punto en la dirección opuesta a dicho vector. El problema comienza con el vector de solución X_0 , y en cada iteración X_k es modificada de acuerdo a la ecuación 2-32.

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k \quad (2-32)$$

Donde k es la iteración actual, α_k es la longitud del paso y P_k es la dirección calculada como un vector unitario como se muestra en la ecuación 2-33.

$$P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|} \quad (2-33)$$

La longitud del paso α_k se optimiza de acuerdo con la aproximación del Teorema de Taylor (ecuación 2-34), asegurando de esta manera el descenso máximo. Cada término en el Teorema de Taylor se divide entre el número de derivada factorial, es decir que entre mayor sea el número de la derivada, el término tendrá un menor aporte en la función. En optimización multivariable, resulta común el utilizar hasta la segunda derivada del Teorema de Taylor, la tercera derivada y siguientes provocarían un incremento en la complejidad del cálculo y por lo tanto en el tiempo del procesamiento, mismo que normalmente no es necesario debido que al truncarla en la segunda derivada se logra una buena aproximación.

$$f(X_k + \alpha_k P_k) \approx f(X_k) + \alpha_k P_k^T \nabla f(X_k) + \frac{\alpha_k^2}{2} P_k^T \nabla^2 f(X_k) P_k \quad (2-34)$$

El valor del tamaño de paso α_k (ecuación 2-35) se obtiene derivando la ecuación 2-34 con respecto de α .

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P_k}{P_k^T \nabla^2 f(X) P_k} \quad (2-35)$$

Hay ocasiones en que el cálculo de derivadas de manera simbólica puede resultar complejo, el método de Diferencias Finitas [33] se puede usar para obtener una aproximación del vector gradiente y de la matriz Hessiana.

Matemáticamente, el vector gradiente $\nabla f(X)$ está formado por las primeras derivadas de la función con respecto de todas las variables (ecuación 2-25) y la matriz Hessiana $\nabla^2 f(X)$ está compuesta por las segundas derivadas (ecuación 2-26).

Para aproximar las primeras derivadas parciales se usa la ecuación (2-36). En donde ϵ es una constante escalar con un valor pequeño ($\epsilon = 1e - 5$), e_k es un vector unitario con el tamaño de X que contiene ceros en todas sus posiciones excepto en la posición k a la cual se le asigna el valor de 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{f(X + \epsilon e_k) - f(X)}{\epsilon} \quad (2-36)$$

Dado que la matriz Hessiana se multiplicará por un vector, se usa una aproximación finita como se muestra en la ecuación 2-37, en donde V corresponde al vector que será multiplicado.

$$\nabla^2 f(X) * V = \frac{\nabla f(X + \epsilon V) - \nabla f(X)}{\epsilon} \quad (2-37)$$

2.2.4. Análisis de resultados de una optimización multiobjetivo

Regresar al índice

Cuando los problemas de optimización buscan optimizar más de una sola función objetivo son conocidos como problemas multiobjetivo puesto que optimizan ambos objetivos en forma simultánea. Es común que estos objetivos estén en conflicto es decir que, al momento de mejorar uno de ellos, se empeore otro y viceversa. Por esta razón no se puede considerar que exista una única solución óptima con respecto a todas las funciones objetivo, en lugar de eso existe un conjunto de soluciones óptimas, conocidas como Frente de Pareto (PF por sus siglas en inglés) [39].

Frentes de Pareto

Regresar al índice

En la optimización multiobjetivo se utiliza con frecuencia el concepto de soluciones dominadas, éste se basa en comparar dos soluciones para determinar si una domina a la otra o no. Se dice que un vector $U[u_1, u_2, \dots, u_k] \in R^k$ domina a otro vector $V[v_1, v_2, \dots, v_k] \in R^k$ (denotado por $U \prec V$) si y sólo si U es parcialmente menor que $V \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, u_i \leq v_i \wedge j \in \{1, 2, \dots, k\} : u_j < v_j$. En otras palabras, existe al menos una u_j que es más pequeña que v_j , mientras que las restantes u_s son menores o iguales a las correspondientes v_s [3].

Considere por ejemplo un problema de optimización de dos objetivos con tres soluciones diferentes tal como se muestra en la figura 2-5, en el que se busca maximizar tanto a la función 1 (f_1) como a la función 2 (f_2). Resulta entonces complicado el poder encontrar las mejores soluciones, y es entonces cuando las soluciones dominantes cobran importancia para poder elegir cuál es la mejor de dos soluciones conocidas en términos de ambos objetivos.

Observe la figura 2-6 en la que se muestran tres posibles soluciones. Si se desean minimizar ambas funciones objetivo, al comparar la solución 1 (azul) y la solución 2 (verde) es posible notar que la solución 1 es mejor que la solución 2 para f_2 y la solución 2 es mejor que la

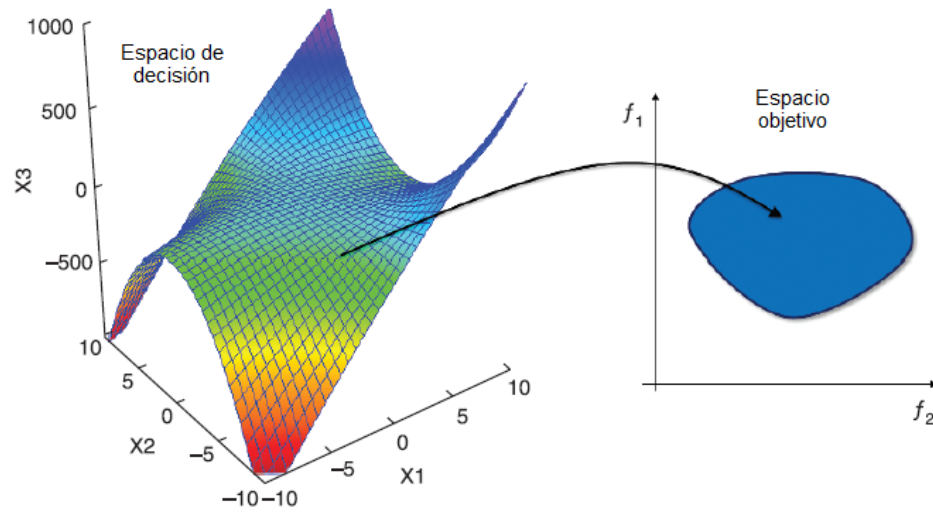


Figura 2-5.: Espacio de decisión y espacio objetivo [3].

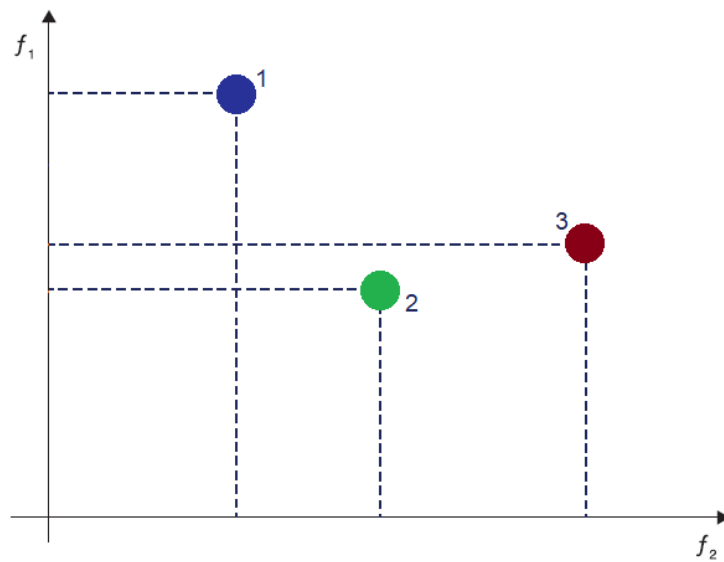


Figura 2-6.: Ejemplo con tres soluciones

solución 1 para f_1 por lo tanto la solución 1 es una solución no-dominada por la solución 2. Por otra parte, si se comparan las soluciones 2 (verde) y 3 (roja), se percibe que la solución 2 es mejor que la solución 3 tanto para la función f_1 como para la función f_2 , cumpliendo de esta forma las dos condiciones necesarias para ser considerada como una solución dominante.

Cuando se tiene un número finito de soluciones es posible llevar a cabo las comparaciones entre cada una de ellas para determinar cuáles son las dominadas y cuales son las no-dominadas (conocidas también como dominantes). El conjunto de las soluciones no dominadas por alguna otra se conoce como el PF.

La figura 2-7 muestra, en color rojo los PF para los cuatro posibles escenarios que podrían presentarse al llevar a cabo la optimización multiobjetivo de dos funciones, en donde cada una de ellas puede ser maximizada o minimizada. En la figura 2-7(a) se aprecia el PF cuando se desea minimizar ambos objetivos, por su parte la figura 2-7(b) corresponde al PF cuando se desea

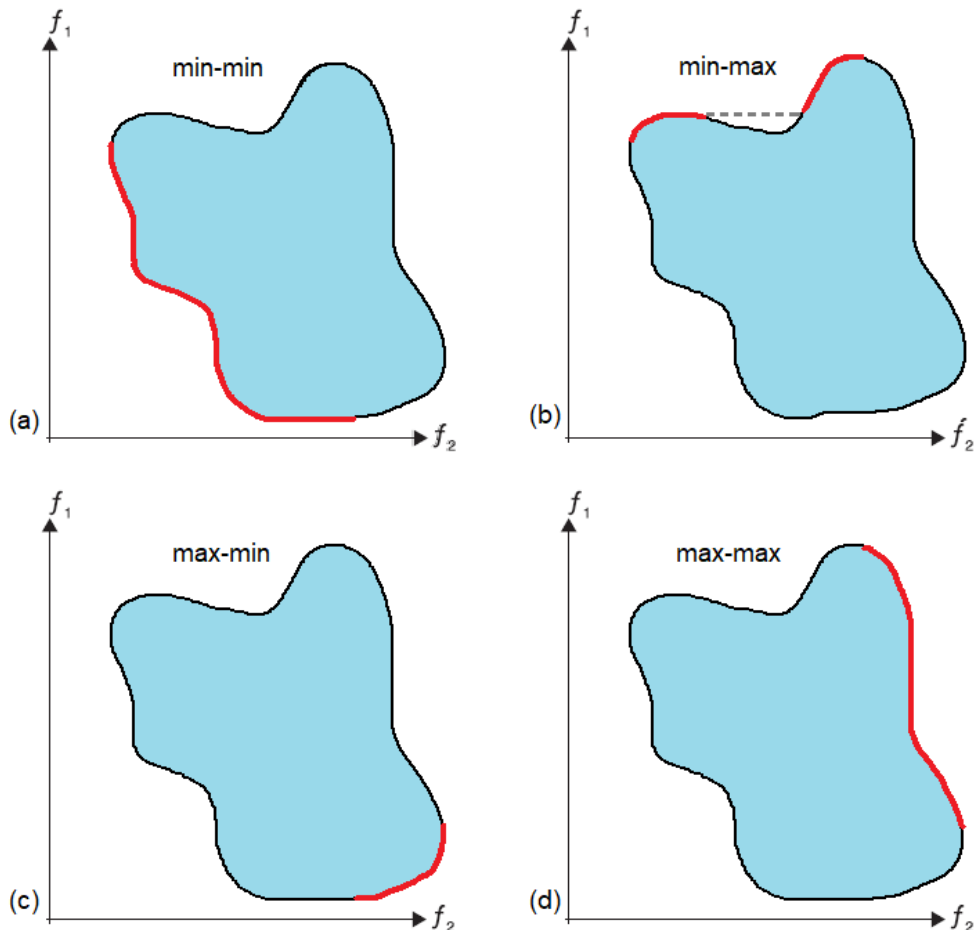


Figura 2-7.: Soluciones óptimas del Frente de Pareto

se busca minimizar la función 2 y maximizar la función 1; en la figura **2-7(c)** se observa el PF cuando se busca maximizar la función 2 y minimizar la función 1, por último en la figura **2-7(d)** se marca el PF cuando lo que se busca es maximizar ambas funciones.

2.3. Conclusión

Regresar al índice

En este capítulo se presentaron las bases para comprender el uso de las FCC, así como el procedimiento detallado para la definición de la matriz de masas de un eslabón.

También se recordaron las bases necesarias para optimización, haciendo especial hincapié en los algoritmos DE y PGD, así como en el análisis de los resultados de optimización para problemas de optimización multiobjetivo a través del uso del PF.

3. Estado del arte

Regresar al índice

En este capítulo se presenta, en forma breve, un recorrido a lo largo de la historia del balanceo de mecanismos, en donde es posible encontrar referencias en artículos de investigación desde el año de 1902 [40] pero manteniéndose como un tema vigente e importante aún hasta nuestros días.

Un análisis histórico muy completo concerniente al balanceo de mecanismos puede encontrarse en [6, 41] y más recientemente en [10, 5], sin embargo con la finalidad de conocer un panorama general y poder plantear los principales aportes de este trabajo, se presenta a continuación un breve resumen destacando las principales propuestas a lo largo de la historia para llevar a cabo el balanceo ya sea completo o parcial de las ShF y los ShM.

Entre las primeras publicaciones relacionadas con el tema se encuentra en 1902 el trabajo de O. Fischer [40] quien presenta un método denominado 'vectores principales'. Este método permite el balanceo de la ShF, para ello se analiza cada uno de los eslabones que componen un mecanismo y se determina aquellos puntos en donde se alcanza el balanceo estático. Estos puntos se conocen como 'puntos principales'. El trabajo de O. Fischer proporcionó las bases para la creación de dispositivos que permitieron el estudio del movimiento de los centros de masas de los eslabones en un mecanismo.

El método de los vectores principales fue utilizado posteriormente por V. P. Goryachkin [42], por V. A. Yudin [43] y por Kreutzinger [44]. También ha sido empleado por Shchepetilnikov [45] que propone un método para minimizar el ShM a través del uso de un contrapeso montado en la manivela de entrada sobre un eje diferente al eje de entrada pero que gira con la misma velocidad angular, de esta forma logra eliminar el primer armónico del ShM. Y fue empleado nuevamente por él para balancear mecanismos con eslabones asimétricos [46]. Más recientemente en 2013 Van der Wijk [47] y Van der Wijk y Herder [48] lo emplearon para el balanceo del ShM de tres elementos en serie.

Otro de los primeros métodos utilizados para lograr el balanceo fue el método de la sustitución estática de masas que se basa en sustituir estáticamente la masa del acoplador por masas concentradas para lograr el equilibrio en los enlaces rotativos. Este método fue utilizado en

los trabajos de F.R.Grossley [49], R.L. Maxwell [50], M.R. Smith [51] y G.J Talbourdet [52].

Los años en torno a 1920 se vieron marcados por un especial interés en el balanceo de motores [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59] así como de máquinas relacionadas con la agricultura [60, 61]. De estas publicaciones destaca [58] en donde se utiliza el balanceador Lanchester, que sigue siendo un método vigente en la actualidad para el balanceo de motores de cuatro tiempos.

El método del mecanismo duplicado [56, 62, 63] se basa en la adición de un mecanismo duplicado con simetría axial, haciendo estacionario el centro de masas del mecanismo en conjunto y logrando así un balanceo completo.

Kamenskii [64] fue el primero en utilizar un mecanismo de levas para llevar a cabo el balanceo, de esta forma a través de una leva con un contrapeso es posible eliminar tanto la ShF como el ShM.

También vale la pena destacar el trabajo de Hilpert [65] que utilizó un mecanismo de pantógrafo para llevar a cabo el desplazamiento de los contrapesos, logrando así el balanceo del mecanismo. Este método también se empleó posteriormente en [66, 67] en donde se presentó un estudio de las condiciones para el balanceo completo de mecanismos con un pequeño incremento en la masa total de los eslabonamientos móviles implementando un contrapeso engranado ubicado en la base del mecanismo.

En los años 40s se desarrollaron métodos para lograr el equilibrio parcial basados en la aproximación de funciones. Destaca el trabajo de Geronimus [68, 69] en donde las condiciones de balanceo se formulan mediante la minimización de la raíz cuadrática media (RMS) o valores máximos (enfoque de Chebichev) de la ShM.

Más adelante, Bessonov [70, 71] formuló una solución del problema de balanceo mediante eslabones de masa variable aplicando los métodos de valor RMS y mini-max para la minimización.

Los métodos de balanceo basados en el análisis de los armónicos, cobraron mayor importancia con el uso del mecanismo manivela-biela-corredera en los motores de combustión interna [72, 73, 74, 75], logrando la reducción del ShM mediante el equilibrio de ciertos armónicos de la ShF y del ShM. Para llevar a cabo este proceso, las fuerzas y momentos que no se encuentran balanceados se dividen en Series de Fourier y luego se estudian por partes.

En 1968, Berkof y Lowen [76] propusieron una nueva solución para el balanceo de fuerzas mediante un método llamado vectores linealmente independientes. Este método consiste en formular una ecuación considerando una representación vectorial que describe la posición del

centro de masa total del mecanismo en conjunto con la ecuación que representa la cadena cinemática cerrada. Se obtiene entonces un sistema de ecuaciones que contiene vectores linealmente independientes que permite obtener las condiciones de balanceo del mecanismo reduciendo a cero aquellos coeficientes que dependen del tiempo. Este método se aplicó posteriormente en [77, 78]. Especialmente en [77] se presenta el diseño de un software que permite el balanceo de un mecanismo de cuatro barras utilizando este método, además el incremento del ShM se controla de forma de que se mantiene lo más pequeño posible.

En los años 70s el balanceo dinámico de los mecanismos cobró más importancia. En 1973 Berkof [79] describió el primer método documentado para lograr el equilibrio dinámico completo. Este método está basado en sustituir la masa del acoplador por masas concentradas, de esta forma el problema se convierte en un problema de equilibrio de revolución. Este método fue aplicado también por Esat y Bahi [80] quienes propusieron ubicar contra-inercias giratorias para eliminar los momentos provocados por los eslabones móviles, al mismo tiempo que sus masas se utilizaban para realizar el balanceo de la ShF. Este método tiene como ventaja el poco incremento en la masa total del mecanismo resultante.

Bagci [81] utilizó una estructura de paralelogramo para un mejor balanceo de mecanismos. Este paralelogramo transfiere el movimiento a un engrane de contra-inercia ubicado en la base del mecanismo.

Zobairi, Rao y Sahay [82, 83, 84] estudiaron el problema de balanceo considerando la elasticidad de los elementos.

Resultó entonces claro que, el llevar a cabo el balanceo completo de mecanismos es posible mediante complejas consideraciones de diseño y a través de un inevitable incremento en la masa total del mecanismo, de ahí que comenzaron a cobrar mayor auge los métodos que proponían un balanceo parcial del mecanismo. En busca de minimizar la ShF y el ShM han surgido diferentes propuestas [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92]. En [93], Wiederrich y Roth propusieron condiciones generales simples para determinar las propiedades de inercia de un mecanismo de cuatro barras permitiendo un balanceo parcial del mecanismo. Dresig [94, 95, 96] examinó las condiciones de balanceo para varias estructuras 2D con eslabonamientos de seis y ocho barras. Elliot y Tesar [97] presentaron la optimización mediante la teoría de "last-square" para el balanceo del ShM de un mecanismo de cuatro barras con una velocidad angular de entrada constante.

En [98, 99] se sugiere una propuesta que permite la comparación de la eficiencia de los métodos de balanceo por un criterio de valor mínimo del ShM. Tepper y Lowen [98] muestran que en los mecanismos con ShF balanceada, el valor 'cuadrático medio' del principal momento de inercia es constante en relación con algunas elipses localizadas en el plano del mecanismo, y

al disminuir las dimensiones de estas elipses, el valor ‘cuadrático medio’ disminuye alcanzando un mínimo global en el centro de esta familia de elipses. Esta misma teoría, aplicada a mecanismos tridimensionales fue desarrollada por Urba [99], mostrando que las elipses se transforman en elipsoides pero que sus propiedades se mantienen.

El balanceo dinámico de mecanismos de seis barras ha sido ampliamente estudiado por diferentes autores [100, 101, 102, 103] y existen numerosas técnicas que permiten llevar a cabo el balanceo completo una vez que las condiciones de balance han sido determinadas.

Berestov [104, 105] planteó por primera vez un método para el balanceo dinámico basado en sistemas planetarios. Su trabajo sirvió de sustento para los presentados por Feng [106, 107, 108, 109], Yu y Smith [110]. En [108] se presentó el estudio del balanceo del ShM de 17 tipos de mecanismos de ocho barras.

En cuando a estudios experimentales sobre balanceo de mecanismos, vale la pena destacar [111, 112, 113]. Jacobi y Rose [111] realizaron experimentación con el balanceo de la ShF de un mecanismo de cuatro barras. Los resultados demostraron coincidencia entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante modelos computacionales. Tricamo y Lowen [114, 115] lograron reducir en más de un 50% el ShM mediante un dispositivo experimental en un mecanismo de cuatro barras.

Respecto a mecanismos espaciales, Semenov [116] obtuvo buenos resultados al demostrar que el n_{esimo} armónico del ShF de cualquier mecanismo espacial puede ser balanceado mediante tres contrapesos dispuestos en planos perpendiculares. Este mismo tipo de solución fue explorada más adelante por Chiou y Tsai [117]. Kaufman y Sandor [118] desarrollaron el método de los vectores linealmente independientes para mecanismos espaciales, mostrando el método al balancear mecanismos del tipo RSSR y RSSP. Gappoev [119] desarrolló un método generalizando las aproximaciones de Shchepetilnikov’s [45, 120] para la versión tridimensional; él eliminó el primer armónico del ShM agregando un contrapeso a través de un mecanismo que giraba a la misma velocidad que el eje de entrada. Algunos ejemplos para el balanceo de mecanismos espaciales tipo Bennett han sido estudiados en [121, 122, 123]. Yu [124, 125, 126] desarrolló un método para el balanceo de mecanismos basado en agregar diadas adicionales al mecanismo inicial.

Wawrzecki [127, 128] trabajó en relación a mecanismos espaciales en el movimiento de una aguja en máquinas de coser. En el trabajo de Belonovskaya, Dimentberg, Maysuk [129] se presentan principios para la construcción de mecanismos espaciales auto-balanceados. Zhang y Chen [130, 131] presentaron una teoría de vibraciones mecánicas para el balance del ShM, para lo cual consideraron el ‘frame’ como un sistema vibratorio de tres grados de libertad.

En años recientes, Kochev [132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144]

Tabla 3-1.: Algunos métodos para el balanceo mecánico de mecanismos.

Método	Referencias	Descripción
Sustitución de masas	[49, 50, 51, 52]	Se basa en sustituir estáticamente la masa del acoplador por las masas concentradas para lograr el equilibrio de los enlaces rotativos.
Balanceador Lanchester	[58]	Un método aún vigente utilizado en motores de cuatro tiempos.
Mecanismo duplicado	[62, 63, 56]	Adición de un mecanismo duplicado con simetría axial.
Mecanismo de levas	[64]	A través de levas y contrapesos es posible lograr el balanceo estático.
Mecanismo de pantógrafo	[65, 66, 67]	A través del desplazamiento de contrapesos y engranajes
Uso de contrapesos y contrainercias	[45, 79, 80, 79, 80]	Agregar masas concentradas que permitan lograr el equilibrio
Paralelogramo	[81]	Un paralelograma transfiere el movimiento del mecanismo a un engrane de contra-inercia ubicado en la base

desarrolló una teoría de balanceo, en su trabajo se generaliza la teoría de las elipses isomoménticas, el método de los vectores independientes y los estudios relacionados con sistemas mecánicos de doble manivela de propiedades simétricas. Kochev desarrolló un método para el balanceo activo del ShM basado en fluctuaciones en la velocidad de entrada del mecanismo y desarrolló sistemas auto-balanceados basados en ensambles óptimos y posiciones angulares de sub-eslabonamientos.

Por otra parte, en [145], Acevedo, et.al, presentan el balanceo dinámico de un mecanismo espacial de tres grados de libertad, mediante el uso de contra pesos giratorios.

En relación a las publicaciones que se han presentado anteriormente, estas pueden dividirse en dos grandes grupos, algunas de ellas se centran principalmente en el planteamiento de métodos mecánicos que permitan reducir o eliminar ya sea la ShF, el ShM o ambos; algunas otras proponen innovaciones en los métodos matemáticos para el análisis del balanceo de mecanismos. Las tablas **3-1** y **3-2** presentan un resumen de algunas de las publicaciones más representativas de acuerdo a su tipo.

Ahora bien, cuando el acceso a recursos computacionales era limitado, la optimización del balanceo de mecanismos se llevaba a cabo mediante métodos analíticos o semi-analíticos

Tabla 3-2.: Propuestas para el análisis matemático del balanceo de mecanismos

Método	Referencias	Descripción
Vectores principales	[40, 42, 43, 44] [45, 46, 47, 48]	Permite el balanceo de las ShF al analizar cada eslabonamiento conociendo así los puntos en donde se alcanza el balanceo estático.
Vectores linealmente independientes	[76, 77, 78, 77]	Se basa en la obtención de un sistema de ecuaciones linealmente independientes relacionadas con el centro de masa del mecanismo. Ahí se reducen a cero los coeficientes que tiene que ver con el tiempo.
Equilibrio de armónicos	[72, 119, 42, 73, 74] [75, 116]	Se basa en el análisis de ciertos armónicos de la ShF y el ShM.
Software para el balanceo de un mecanismo de cuatro barras	[77]	Balanceo estático que procura mantener al mínimo el incremento en el ShM.
Técnicas de minimización de reacciones	[146, 147, 148, 149, 150, 151] [152, 153, 154, 155]	Algoritmos de optimización basados en programación.
Método de Kochev	[132, 133, 134, 135, 136, 137, 138] [139, 140, 141, 142, 143, 144]	Se generaliza la teoría de las elipses iso-momenticas, el método de los vectores independientes y los estudios relacionados con sistemas mecánicos de doble manivela de propiedades simétricas.

[85, 88, 93, 97, 156, 157], pero conforme éstos han avanzado y se han hecho cada vez más potentes, ha sido posible la implementación de técnicas avanzadas de optimización numérica, consideradas complejas, que permiten la solución de este tipo de problemas no lineales.

En 1998, Segla [158] presentó la optimización de balanceo estático de un mecanismo robótico, obteniendo las condiciones de balanceo mediante coordenadas cartesianas y utilizando un algoritmo genético básico programado en lenguaje Fortran.

Actualmente, las técnicas más comunes de optimización para problemas mecánicos, se basan en métodos metaheurísticos tal como puede apreciarse en [159, 160, 36] en donde se emplean algoritmos evolutivos, evolución diferencial y algoritmos genéticos, respectivamente. También se pueden encontrar referencias [161] en donde se transforma la función objetivo para hacerla convexa, sin embargo esto implica un mayor procesamiento matemático.

En [162], Bošković propuso un método para la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras basado en un nuevo algoritmo de *sub-population firefly* teniendo como objetivo la minimización de ocho funciones relacionadas con la ShF, el ShM, el torque de entrada y las reacciones en las uniones.

Otros algoritmos de optimización basados en programación han sido también explorados en los trabajos de Salder et.al. [146, 147, 148, 149] H. Dresig y Schönfeld [150, 151], Jacobi [152], O'Leary y Gatecliff [153], Qi y Pennestri [154], Walker y Haines [155].

Por su parte Feng [163] implementó un nuevo método basado en la redistribución de masas para realizar el balanceo de un mecanismo espacial RSSR a través de algoritmos genéticos, utilizando coordenadas cartesianas para la obtención de las condiciones de balanceo.

Hasta donde ha sido posible indagar, al igual que los trabajos anteriores, todos estos trabajos relacionados con la optimización del balanceo estático y/o dinámico de mecanismos, también emplean coordenadas cartesianas para la obtención de las ecuaciones de las reacciones del mecanismo, lo cual implica una mayor complejidad matemática de las mismas al incluir funciones trigonométricas.

Esta investigación está ubicada dentro de las propuestas para el análisis matemático del balanceo de mecanismos, diferenciándose de los trabajos existentes en el tipo de coordenadas empleadas para la obtención de las ecuaciones, presentando una alternativa a las coordenadas cartesianas, al utilizar coordenadas completamente cartesianas (FCC) que permiten conocer las reacciones en la base del mecanismo mediante ecuaciones de menor complejidad (al no incluir funciones trigonométricas). También se demuestra que, a través de algoritmos simples de optimización, es posible la minimizar en forma eficaz las reacciones en la base de mecanismos bidimensionales.

4. Balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado mediante redistribución de masa por optimización

4.1. Introducción

Regresar al índice

Un mecanismo manivela-biela-corredera es aquel que se utiliza para transformar el movimiento circular en un movimiento rectilíneo, se trata de un sistema reversible, es decir que también puede convertir el movimiento lineal alternativo en un movimiento giratorio.

El ejemplo más común de este mecanismo se encuentra en las locomotoras de vapor (figura 4-1), o en los motores de combustión interna de un automóvil, en los cuales el movimiento lineal de un pistón (generado a través de la explosión de la gasolina) es transferido a una biela, convirtiéndose en movimiento rotatorio en el cigüeñal.

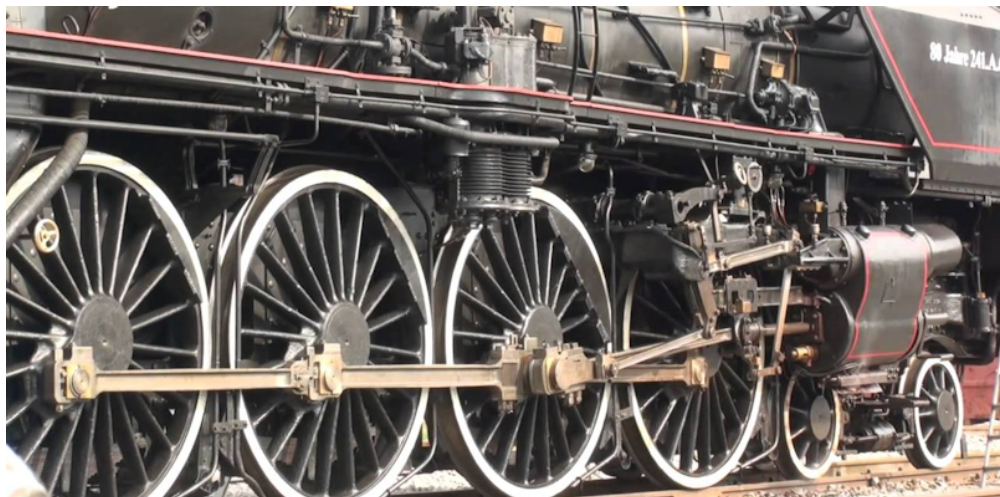


Figura 4-1.: Mecanismo manivela-biela-corredera en locomotora. [4]

En este capítulo se presenta en forma detallada el análisis llevado a cabo, utilizando coordenadas completamente cartesianas, para el de balanceo de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado a través de la redistribución de masa, añadiendo contrapesos cuyas dimensiones y localización se resuelven mediante optimización. La simplificación de mecanismo manivela-biela-corredera se llevó al cabo eliminando la corredera con el objetivo de contar con un mecanismo sencillo, formado únicamente por dos eslabones, permitiendo así introducir los detalles del método en forma más directa.

En forma general el método consiste en calcular la matriz de masas de los eslabones del mecanismo usando coordenadas naturales, considerando en cada eslabón un par de puntos. Entonces se ensambla la matriz de masas del mecanismo completo, la cual se emplea para poder calcular las reacciones dinámicas que el mecanismo transmite a la base (ShF y ShM). Las expresiones de la ShF y del ShM son obtenidas incluyendo en ellas los parámetros de los contrapesos que permitirán el balanceo. Entonces se plantea la función objetivo para la optimización, misma que se minimiza utilizando un algoritmo de DE. Los resultados de la optimización son analizados utilizando Frentes de Pareto permitiendo de esta forma identificar los más adecuados. El objetivo principal de este capítulo se centra en describir a detalle el procedimiento para la obtención de la matriz de masas M del mecanismo en su conjunto, así como en la obtención de las ecuaciones que definen tanto la ShF como el ShM de forma que estos puedan ser optimizados y llevados a su mínimo.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 4.2 presenta la obtención de la matriz de masas del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado y las ecuaciones correspondientes a la ShF y el ShM. La sección 4.3 define la función objetivo y los límites de la optimización. La sección 4.4 detalla el algoritmo empleado para llevar a cabo la optimización del balanceo. La sección 4.5 presenta la optimización numérica y los resultados obtenidos. En la sección 4.6 se encuentran las conclusiones.

4.2. Análisis Mecánico

Regresar al índice

La figura **4-2** muestra en forma general un mecanismo manivela (segmento \overline{AB}), biela (segmento \overline{BC}). El sistema de coordenadas (x,y) corresponde al sistema de referencia global del mecanismo, mientras que los sistemas (x_n,y_n) en donde $1 \leq n \leq 2$ representan los sistemas de coordenadas locales para los n eslabones del mecanismo, cada uno de los cuales tiene una masa m_n y se considera que su centro de masa se encuentra ubicado en las coordenadas (x_{Gn},y_{Gn}) con respecto al sistema de referencia local.

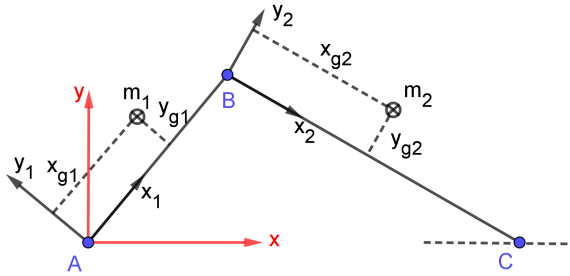


Figura 4-2.: Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

El mecanismo manivela-biela-corredera simplificado corresponde a un sistema de un grado de libertad, que es controlado en este caso mediante un motor ubicado en el punto A. l_1 y l_2 representan la longitud de cada una de las barras.

Se busca llevar a cabo la redistribución de la masa, minimizando las reacciones dinámicas que el mecanismo transmite a la base, calculando las dimensiones y la localización del centro de masas de contrapesos. El mecanismo con dos contrapesos añadidos (c_1 y c_2) puede observarse en la figura 4-3.

Los contrapesos pueden tener la forma que se desee, sin embargo, por simplicidad en cuanto a las ecuaciones se considerarán como discos. Cada uno de estos contrapesos tiene su centro de masa m_{cn} ubicado en las coordenadas (x_{cn}, y_{cn}) de su correspondiente sistema de coordenadas locales. Los contrapesos están dispuestos de forma tal que uno de sus extremos queda exactamente unido con el punto del origen del sistema de coordenadas locales, de ahí que su radio se encontrará definido por la ubicación del centro de masas (ecuación 4-1).

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (4-1)$$

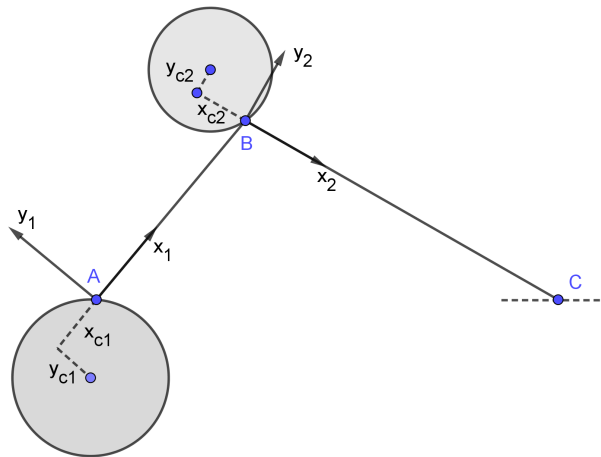


Figura 4-3.: Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado con contrapesos para balanceo.

Conociendo la densidad de cada contrapeso ρ_n es posible calcular su masa (ecuación 4-2) en función de su espesor (t_{cn}) y la ubicación de su centro de masas (x_{cn}, y_{cn}), en relación al sistema de coordenadas locales.

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} = \pi\rho_{cn}t_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \quad (4-2)$$

Es así como la masa total de cada uno de los elementos del mecanismo (ecuación 4-3) quedará definida por la masa de la barra original (m_{bn} para $n = 1, 2$) en conjunto con la masa del contrapeso que se encuentra unido a esa barra (m_{cn}).

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \quad (4-3)$$

También es posible definir la inercia total de cada elemento I_n (ecuación 4-5) que se obtiene al sumar la inercia de la barra original I_{bn} con la inercia del contrapeso correspondiente I_{cn} , ésta última puede ser calculada como se muestra en la ecuación 4-4.

$$I_{cn} = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} \quad (4-4)$$

$$I_n = I_{cn} + I_{bn} = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (4-5)$$

Se define también la nueva posición (x_{Gn}, y_{Gn}) para el CoM de cada elemento n considerado como la unión de la barra con su contrapeso correspondiente (ecuaciones 4-6 y 4-7).

$$x_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4-6)$$

$$y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4-7)$$

Donde x_{cn}, y_{cn} son las posiciones de los CoM de cada contrapeso, y x_{bn}, y_{bn} son las posiciones de los CoM para cada barra original, ambos medidos desde sus orígenes locales.

Para poder optimizar el balanceo dinámico del mecanismo en cuestión, se requiere conocer las ecuaciones que definen la ShF y el ShM del mecanismo en general, de ahí la necesidad de conocer primero la matriz de masas del mecanismo completo.

4.2.1. Matriz de masas de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado utilizando FCC

Regresar al índice

Para poder obtener la matriz de masas \mathbf{M} del mecanismo completo, es necesario primero conocer las matrices de masas correspondientes a cada uno de sus eslabones \mathbf{M}_n , éstas pueden ser calculadas mediante los puntos básicos i y j de acuerdo a la teoría presentada en [18] que se resume también en la introducción general del presente trabajo.

Considere entonces el primer eslabón correspondiente a la manivela, como aquel comprendido entre los puntos A y B, siendo A el punto i y B el punto j , con un sistema de coordenadas locales ubicado en el punto A, cuyo eje x se dirige hacia el punto B. De esta forma la matriz de masas \mathbf{M}_1 queda definida tal como se muestra en la ecuación 4-8.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & -c_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ -c_1 & b_1 & 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

Cuyos términos pueden calcularse según se definió en la ecuaciones 2-21 - 2-24:

$$\begin{aligned} a_1 = & m_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) - \frac{1}{l_{b1} (m_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} \\ & (2.0m_{b1} + 2.0\pi\rho_{c1}t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) (m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) \\ & + \frac{1}{l_{b1}^2} \left(I_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5\pi\rho_{c1}t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} b_1 = & \frac{1}{l_{b1}} (m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) \\ & - \frac{1}{l_{b1}^2} \left(I_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5\pi\rho_{c1}t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$c_1 = \frac{1}{l_{b1} (m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} \left(-m_{b1} - \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \quad (4-11)$$

$$\left(m_{b1} y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right)$$

$$d_1 = \frac{1}{l_{b1}^2} \left(I_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5 \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \quad (4-12)$$

De forma similar es posible generar la matriz de masas \mathbf{M}_2 (ecuación 4-13) de la biela, que corresponde en este caso al eslabón comprendido entre los puntos B y C, siendo B el punto i y C el punto j , con un sistema de coordenadas locales ubicado en el punto B, cuyo eje x se dirige hacia el punto C.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Donde:

$$a_2 = m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) - \frac{1}{l_{b2} (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left(2.0 m_{b2} + 2.0 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) + \frac{1}{l_{b2}^2} \left(I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \quad (4-14)$$

$$b_2 = \frac{1}{l_{b2}} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_{b2}^2} \left(I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \quad (4-15)$$

$$c_2 = \frac{1}{l_{b2} (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left(-m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left(m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \quad (4-16)$$

$$d_2 = \frac{1}{I_{b2}^2} \left(I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \quad (4-17)$$

Vale la pena destacar que en las matrices desarrolladas (ecuaciones 4-8 y 4-13), las dos primeras columnas pueden relacionarse con las coordenadas x y y del punto correspondiente a i , mientras que las dos últimas pueden relacionarse con las coordenadas x y y del punto correspondiente a j , la misma relación puede establecerse en los renglones, estando los dos primeros relacionados con las coordenadas x y y del punto i y los dos últimos relacionados con las coordenadas x y y del punto j .

Se sabe que los puntos básicos se comparten entre los eslabones, de modo que la matriz de masas \mathbf{M} correspondiente al mecanismo completo tendrá una dimensión de 6×6 (dado que el mecanismo está definido por tres puntos básicos, cada uno de ellos con dos coordenadas una x y una y). Las columnas 0 y 1 se relacionan con el punto A, las columnas 2 y 3 se relacionan con el punto B y, por último, las columnas 4 y 5 se relacionan con el punto C. De esta forma los renglones pueden relacionarse exactamente en el mismo orden de las columnas. Las matrices de masas de cada elemento se usan para ensamblar la matriz de masas del mecanismo, obteniendo la expresión que se muestra en la ecuación 4-18.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & a_2 + d_1 & 0 & b_2 & c_2 \\ -c_1 & b_1 & 0 & a_2 + d_1 & -c_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & b_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

4.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Regresar al índice

Ahora bien, para definir las características cinemáticas del mecanismo se establecen los vectores de posiciones \mathbf{q} (ecuación 4-19), velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ (ecuación 4-20) y aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ (ecuación 4-21) para cada uno de los puntos básicos utilizados en las matriz de masas (ecuación 4-18).

$$\mathbf{q} = [A_X \ A_Y \ B_X \ B_Y \ C_X \ C_Y]^T \quad (4-19)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y]^T \quad (4-20)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [AA_X \ AA_Y \ AB_X \ AB_Y \ AC_X \ AC_Y]^T \quad (4-21)$$

Ahora es posible calcular el momento lineal \mathbf{L} (ecuación 4-22) asociado a todo el sistema.

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (4-22)$$

Donde \mathbf{B} (ecuación 4-23) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos del mecanismo, en este caso se tienen tres puntos básicos, por lo tanto la matriz \mathbf{B} tendrá una dimensión de 2x6.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4-23)$$

Es posible entonces resolver la ecuación 4-22, vale la pena destacar que las velocidades relacionadas con A serán siempre cero por ser éste un punto fijo ($VA_X = 0, VA_Y = 0$), por otra parte, la velocidad en y del punto C serán también cero puesto que no existe movimiento en esta dirección ($VC_Y = 0$), se obtienen así las expresiones correspondientes al momento lineal \mathbf{L}_i (ecuación 4-24) y \mathbf{L}_j (ecuación 4-25).

$$\begin{aligned}
L_i = & VB_X \left(\frac{1}{l_1} \left(m_{b1} x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) - \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right)^2 \right) \right) \\
& + VB_X \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right) \\
& + VB_X \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \left(2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right)^2 \right) \right) \\
& + \frac{VB_Y}{l_2} \left(m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \\
& + \frac{VB_Y}{l_1 \left(m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right)} \left(-m_{b1} - \pi \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \\
& \left(m_{b1} y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \\
& + VC_X \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right) \\
& + \frac{VC_X}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4-24}$$

$$\begin{aligned}
 L_j = & \frac{VB_X}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left(-m_{b2} - \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) + \frac{VB_X}{l_1} \left(m_{b1}y_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \\
 & + VB_Y \left(\frac{1}{l_1} \left(m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \right. \\
 & - \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) + VB_Y \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \\
 & + VB_Y \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & - \frac{1}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left(2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
 & + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \\
 & + \frac{VC_X}{l_2} \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

Una vez que se conocen las expresiones del momento lineal, la ShF (ecuaciones 4-26 y 4-27) del mecanismo puede calcularse derivando las ecuaciones 4-24 y 4-25 con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}
ShF_i = & AB_X \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{1}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \left(2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \\
& \left. \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& + \frac{1}{l_1} \left(m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \left. \right) + AB_Y \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& + \frac{1}{l_1 \left(m_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right)} \left(-m_{b1} - \pi\rho_{c1}t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \\
& \left. \left(m_{b1}y_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \right) \\
& + \frac{AC_X}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4-26}$$

$$\begin{aligned}
ShF_j = & AB_X \left(\frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \left(-m_{b2} - \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) + \frac{1}{l_1} \left(m_{b1}y_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \right) \\
& + AB_Y \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{1}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \left(2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \\
& \left. \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) + \frac{1}{l_1} \left(m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right) \right) \\
& + \frac{AC_X}{l_2} \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4-27}$$

4.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento

Regresar al índice

Cuando se emplean FCC, el momento angular H correspondiente al mecanismo completo, puede encontrarse utilizando la ecuación 4-28. Vale la pena destacar que el resultado de esta operación será siempre un valor escalar, puesto que al tratarse de un mecanismo en 2D el resultado estará siempre dirigido a lo largo del eje z .

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{rM}\dot{\mathbf{q}} \tag{4-28}$$

Donde \mathbf{r} est1a dado en funci3n de las posiciones de los puntos b1asicos del sistema y puede ser expresada como se muestra en la ecuaci3n 4-29.

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X]^T \quad (4-29)$$

Es posible entonces resolver la ecuaci3n 4-28, considerando nuevamente $VA_X = 0$, $VA_Y = 0$ y $VC_Y = 0$. De esta forma la expresi3n de H queda expresada como se muestra en la ecuaci3n 4-30.

$$\begin{aligned} H = & VB_X \left(-B_Y \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \right. \right. \\ & \left. \left(2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \\ & + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right)^2 \right) \right) + \frac{C_X}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \\ & \left(-m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \left(m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \\ & + VB_Y \left(B_X \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right)} \right. \right. \\ & \left. \left(2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right. \\ & + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} \left(x_{c1}^2 + y_{c1}^2 \right)^2 \right) \right) + C_X \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right) \right) \\ & + VC_X \left(\frac{B_X}{l_2} \left(m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\ & - B_Y \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4-30)$$

El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de H con respecto al tiempo (ecuación 4-31).

$$\begin{aligned} ShM &= \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \\ ShM &= \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4-31)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \quad VA_X \quad -VB_Y \quad VB_X \quad -VC_Y \quad VC_X]^T \quad (4-32)$$

Al resolver la ecuación (4-31) y considerar $VA_X = 0$, $VA_Y = 0$ y $VC_Y = 0$, se obtiene el ShM del mecanismo completo.

$$\begin{aligned} ShM &= B_X \left(AB_Y \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \right. \\ &\quad \left(2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) + \frac{AC_X}{l_2} \left(m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\ &\quad - B_Y \left(AB_X \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{l_2 \left(m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \left(2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) + AC_X \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
& \left. + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
& + C_X \left(\frac{AB_X}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \right. \\
& \left(-m_{b2} - \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& \left. + AB_Y \left(\frac{1}{l_2} (m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \right) \\
& + VB_X \left(VB_Y \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \right. \\
& \left. \left(2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) + \frac{VC_X}{l_2} \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \\
& - VB_Y \left(VB_X \left(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left(2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_1^2} \left(Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) \\
& + VC_X \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) + VC_X \left(\frac{VB_X}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-m_{b2} - \pi\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \left(m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \\
& + V B_Y \left(\frac{1}{l_2} \left(m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left(I z 2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2 \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2} \left(x_{c2}^2 + y_{c2}^2 \right)^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4-33}$$

Obsérvese que tanto las ecuaciones correspondientes a la ShF como la correspondiente al ShM definen al mecanismo para un instante de tiempo determinado, sin embargo, para llevar a cabo el análisis del mecanismo es necesario conocer estos valores a lo largo de un ciclo completo de trabajo T . Estos valores pueden obtenerse a través del cálculo de la cinemática directa del mecanismo, en este ejemplo ello se logra empleando Solidworks, y sustituyendo los valores en las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33. De esta forma se obtienen las ecuaciones del ShF y del ShM en términos de las variables propias de los contrapesos que se buscarán optimizar.

4.3. Función objetivo y límites de optimización

Regresar al índice

Para llevar a cabo el balanceo dinámico del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado es necesario considerar un problema de optimización multiobjetivo, ya que se desea minimizar tanto la ShF como el ShM, es por ello que se emplean dos índices a-dimensionales β que permiten la combinación lineal de los valores a optimizar, dichos índices se calculan mediante el valor RMS a lo largo de un periodo de tiempo T de la reacción del mecanismo optimizado ($rms(^{\circ}Reaccion)$) con respecto al valor RMS del mecanismo sin optimizar ($rms(Reaccion)$), tal como se puede apreciar en la ecuación 4-34.

$$\beta_{Reaccion} = \frac{rms(^{\circ}Reaccion)}{rms(Reaccion)} \tag{4-34}$$

Dado que en el intervalo de tiempo T se tienen N muestras de los vectores 4-19, 4-20 y 4-21, entonces los valores RMS de las reacciones pueden ser calculados tal como se muestra de la ecuación 4-35 a la 4-38, en donde $rms(ShF)$ y $rms(ShM)$ representan las reacciones de las ShF y los ShM respectivamente del mecanismo sin optimizar. Por otra parte $^{\circ}rms(ShF)$ y $^{\circ}rms(ShM)$ representan las reacciones de las ShF y los ShM respectivamente del mecanismo con el balanceo optimizado (es decir empleando contrapesos). Los valores correspondientes a ShF_{ik} , ShF_{jk} y ShM_k son calculados mediante las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33 respectivamente, considerando todas las variables relacionados con los contrapesos como cero, de forma

que los resultados que se obtendrán en cada caso corresponderán simplemente a una escalar; mientras que ${}^oShF_{ik}$, ${}^oShF_{jk}$ y oShM_k son calculados mediante las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33 respectivamente obteniendo para cada solución una ecuación en la que permanecerán las variables relacionadas con los contrapesos que se introdujeron en el sistema original.

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (4-35)$$

$$rms({}^oShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ({}^oShF_{ik}^2 + {}^oShF_{jk}^2)} \quad (4-36)$$

$$rms(ShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ShM_k^2} \quad (4-37)$$

$$rms({}^oShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N {}^oShM_k^2} \quad (4-38)$$

De esta forma, el índice de balanceo relacionado con la ShF queda tal como se expresa en la ecuación 4-39, mientras que el índice de balanceo relacionado con la ShM se expresa de acuerdo a la ecuación 4-40.

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ({}^oShF_{ik}^2 + {}^oShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (4-39)$$

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N {}^oShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}} \quad (4-40)$$

Ambos índices de balanceo quedan expresados como ecuaciones no lineales y el problema de optimización consiste en minimizarlos, de forma que para lograrlo se implementa una combinación lineal de objetivos tal como puede apreciarse en la ecuación 4-41. Ahí $\mathbf{X} = [x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}]$ corresponde al vector que contiene las variables a ser optimizadas, y γ es un valor escalar que da importancia a cada uno de los objetivos de la optimización.

Se desea entonces realizar un proceso de optimización que permita llevar a sus valores mínimos tanto el al índice β_{ShF} como al índice β_{ShM} .

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (4-41)$$

En donde los valores de γ se generan como valores aleatorios con distribución uniforme en el rango (0,1) según lo recomendado para la búsqueda aleatoria de hiper parámetros presentada en [164].

Para llevar a cabo la optimización es necesario fijar límites a las variables a optimizar, definiéndolos de acuerdo a las expresiones 4-42 para $n=1,2$.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (4-42)$$

4.4. Algoritmo de optimización

Regresar al índice

Para la optimización de este problema se eligió el algoritmo de Evolución Diferencial, el cual se explicó a detalle en el capítulo de Fundamentos. La elección de este método se basó en el hecho de que este algoritmo es uno de los más empleados para la optimización de mecanismos [165, 166, 167, 168, 169] presentando buenos resultados, además se encuentra ya programado en la librería Scipy de Python [170], permitiendo así su implementación de una forma simple.

Los parámetros que se utilizaron en el algoritmo de Python para llevar a cabo la optimización son los propuestos por default dentro de la librería, es decir con una población inicial de $N=15$ individuos, tolerancia de 0.01, mutación (F) en el rango de [0.5,1], recombinación (CR) de 0.7 y número máximo de generaciones $G=1000$.

4.5. Ejemplo numérico

Regresar al índice

En esta sección se lleva a cabo el análisis numérico para la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado, analizando los resultados y comparándolos con los que se obtenían antes de llevar a cabo la optimización.

4.5.1. Características mecánicas y límites de optimización

Regresar al índice

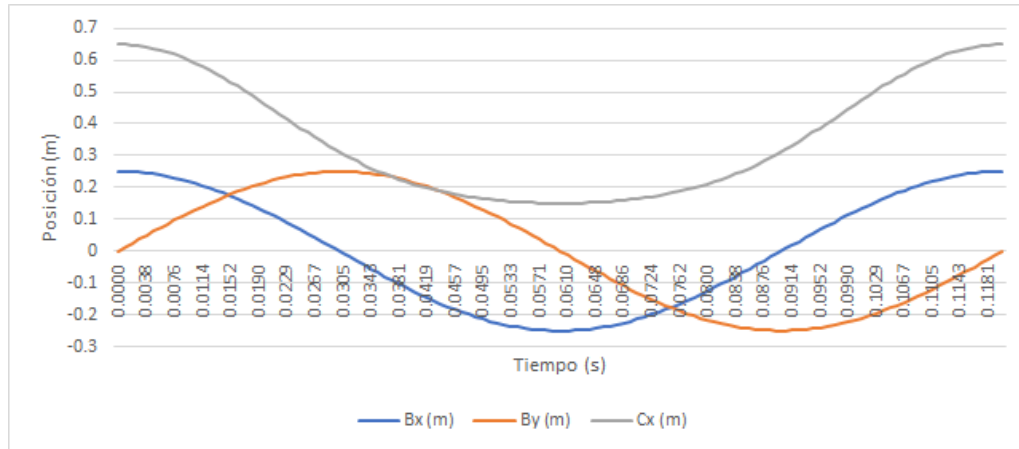
En la tabla 4-1 se presentan los parámetros correspondientes al mecanismo manivela-biela-corredera simplificado que se muestra en la figura 4-2. Todos los eslabones son de acero aleado fundido con una densidad de 7300 kg/m^3 , por su parte los contrapesos son de latón con una densidad de 8500 kg/m^3 .

Cuerpo n	1	2
Masa m_{b_n} [kg]	1.64346901	2.51946901
Longitud l_n [m]	0.250	0.400
Inercia I_{b_n} [kg · m ²]	0.03677077	0.14023528
Centro de masa x_{b_n} [m]	0.125	0.200
Centro de masa y_{b_n} [m]	0.000	0.000

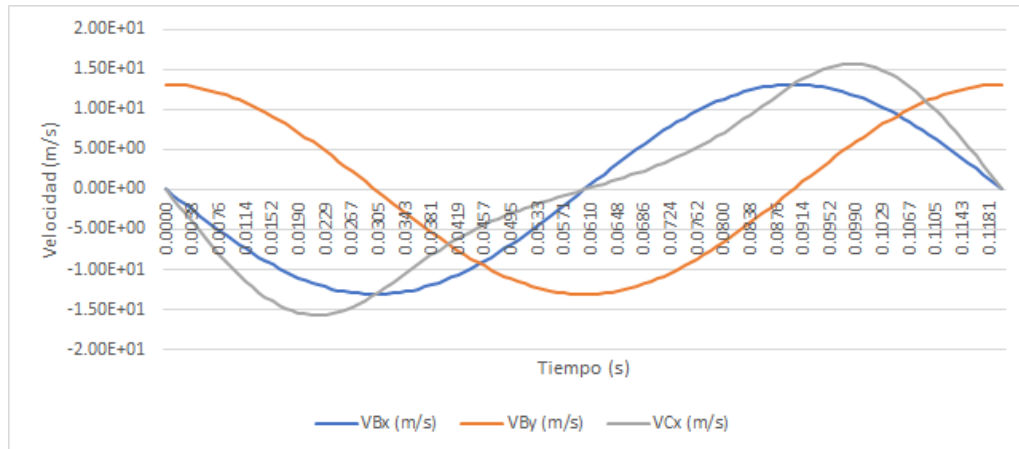
Tabla 4-1.: Parámetros de cada eslabón de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado

El mecanismo se mueve mediante un motor ubicado en el punto A, girando a una velocidad angular constante ω de 500 rpm . Utilizando cinemática directa es posible obtener N muestras correspondientes a las posiciones (ecuación 4-19), velocidades (ecuación 4-20) y aceleraciones (ecuación 4-21) que corresponden a cada uno de los puntos básicos del mecanismo. Estos valores pueden apreciarse en la figura 4-4.

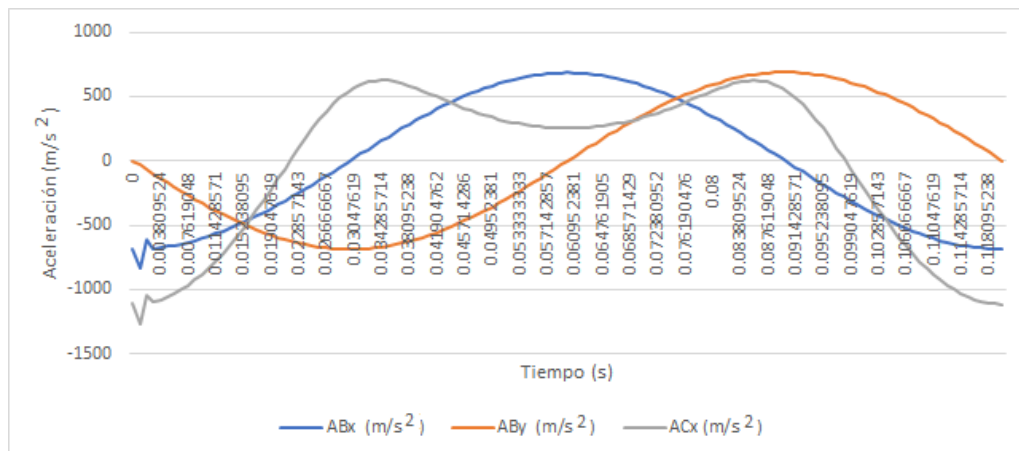
Debido a que el punto A permanece siempre estático ($Ax = 0, Ay = 0$) y el punto C solamente presentan movimiento en el eje x ($Cy = 0$), únicamente se grafican las posiciones correspondientes a Bx, By y Cx tal como puede apreciarse en la figura 4-4(a). Lo mismo ocurre con las figuras 4-4(b) y 4-4(c) donde sólo se muestran respectivamente las velocidades y las aceleraciones de los puntos B (en x y y) y C (en el eje x).



(a) Posiciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.



(b) Velocidades de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.



(c) Aceleraciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

Figura 4-4.: Cinemática directa del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

Para el ejemplo numérico propuesto y tomando en cuenta las características del mecanismo, los límites considerados para la optimización son:

$$\begin{aligned}
 -0.15m &\leq x_{cn} \leq 0.15m \\
 -0.15m &\leq y_{cn} \leq 0.15m \\
 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m
 \end{aligned}
 \tag{4-43}$$

4.5.2. Optimización

Regresar al índice

Para la solución numérica se utilizó el algoritmo de optimización DE el cual se ejecutó hasta obtener 200 soluciones válidas (es decir aquellas cuyo resultado de la optimización de la función objetivo entregan valores en el rango de (0,1)).

La figura **4-5** muestra la relación entre los valores β_{ShF} y β_{ShM} de todas las soluciones encontradas a través de la optimización. De acuerdo a estos resultados, es posible eliminar prácticamente en su totalidad la reacción correspondiente a la ShF sin embargo esto provocaría un incremento importante en el ShM del mecanismo resultante; en forma similar existe la posibilidad de eliminar casi en su totalidad el ShM del mecanismo, aunque ello implicaría que la ShF se mantuviera sin mejora alguna.

Para este trabajo se optó por enfocar aquellas soluciones en las que es posible obtener mejoras simultaneas tanto en la ShF como en el ShM, considerando la sección de la figura **4-5** que se muestra dentro del rectángulo rojo y que es posible apreciar a detalle en la figura **4-6**.

De esta forma, en la figura **4-6(a)** se emplean diferentes colores para representar el valor utilizado para γ en la función objetivo $F(X)$ (ecuación 4-41).

Por su parte, en la figura **4-6(b)** los puntos azul oscuro representan el PF mientras que los azul claro representan las soluciones dominadas.

Cuando se lleva a cabo una optimización multiobjetivo, si dos objetivos están en conflicto, el PF es una herramienta útil para analizar los resultados. Una solución X_a se considera dominada por otra X_b si sus dos valores son peores que los de la solución X_a . El PF está conformado por las soluciones dominantes.

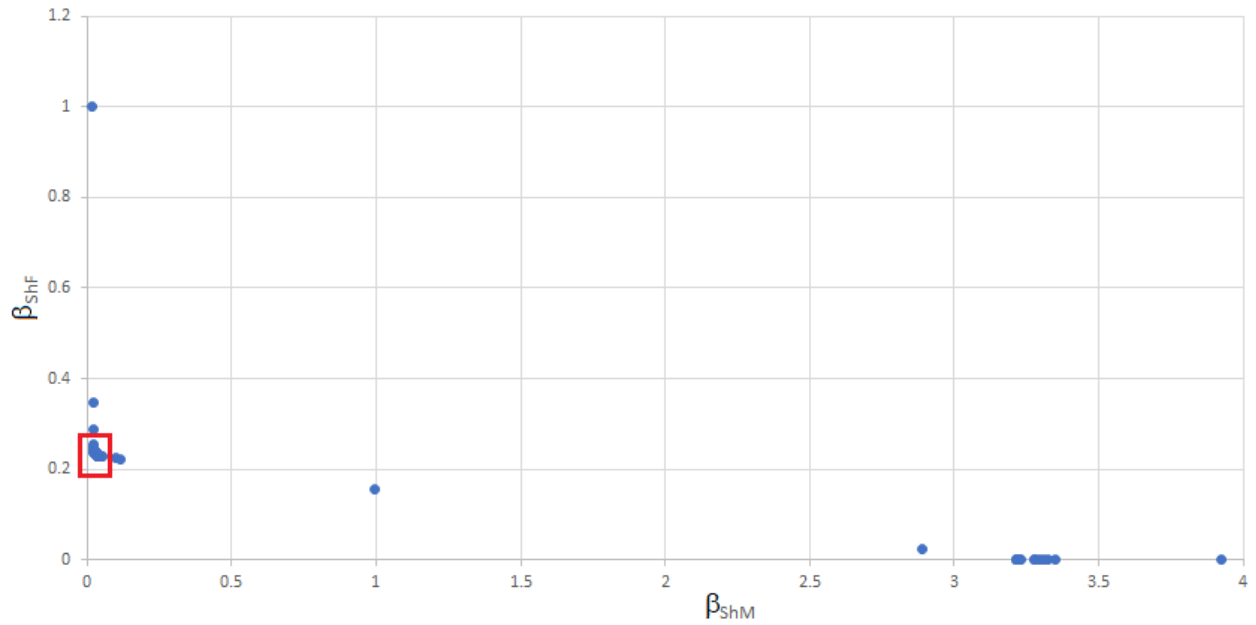
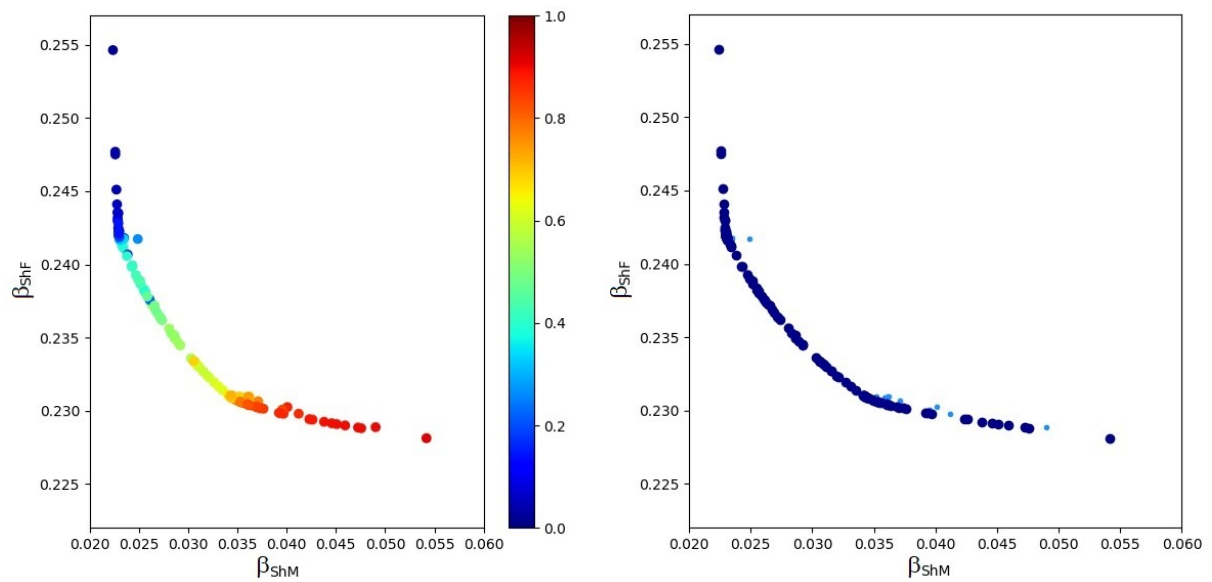


Figura 4-5.: Objetivos optimizados β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.



(a) β_{ShM} y β_{ShF} optimizados de acuerdo a γ . (b) Frente de Pareto de los resultados de optimización.

Figura 4-6.: Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

4.5.3. Análisis de los resultados numéricos

Regresar al índice

Al analizar el PF, es posible seleccionar las soluciones que resulten más apropiadas de acuerdo con el objetivo al que se quiere dar mayor importancia dentro de la optimización. De esta forma, si el interés principal consiste en minimizar la ShF entonces lo ideal es seleccionar el punto del PF que se encuentre más cercano al ShF igual a cero, por el contrario si lo que se busca es lograr minimizar el ShM entonces lo ideal es elegir el punto del PF que se encuentre más cercano al ShM igual a cero. Por otra parte, si se busca una solución en la que ambos objetivos (la ShF y el ShM) se reduzcan a sus mínimos, es posible elegir como solución un punto del PF que se encuentre cercano al cero tanto en el eje correspondiente a ShF como en el eje correspondiente al ShM (conociendo, al elegirlo, los valores de ShF y ShM que se lograrían).

Para ilustrar en forma numérica estas situaciones, se tomarán dos soluciones del PF:

1. La primera solución elegida corresponde al punto con el mejor resultado para la minimización de la ShF ($\beta_{ShF} = 0.22813353$, $\beta_{ShM} = 0.054189473$), éstos resultados se obtienen cuando los valores del vector a optimizar son:

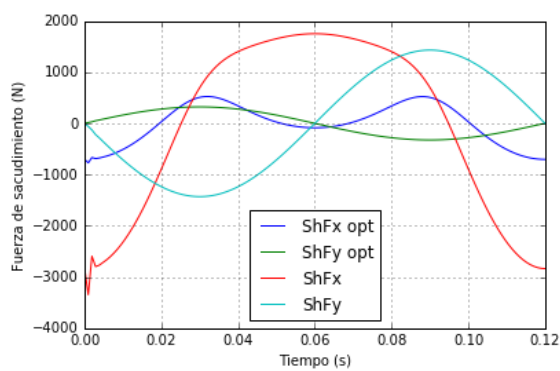
$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.109393564 & y_{c1} &= -0.0000263 & t_{c1} &= 0.04 \\ x_{c2} &= -0.050293307 & y_{c3} &= -0.00036442 & t_{c2} &= 0.04 \end{aligned}$$

En la figura 4-7(a) se muestra la comparación de la ShF (considerando tanto la componente en el eje x como la componente en el eje y) del mecanismo original con respecto al del mecanismo ya balanceado. Para esta solución la ShF presenta una mejora del 77.19%. Por su parte en la figura 4-7(b) se muestra la comparación entre el ShM del mecanismo original y la ShM del mecanismo optimizado, en este caso la mejora en el ShM es de un 94.58%.

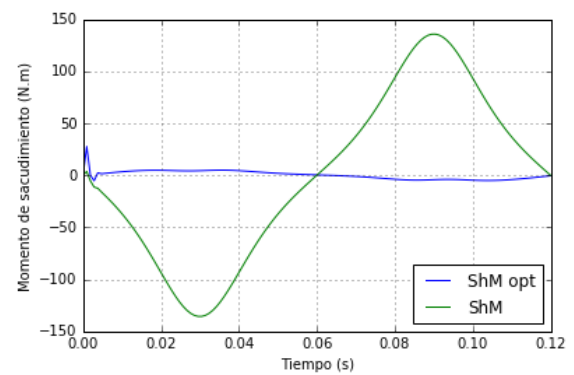
2. La segunda solución elegida es el punto con el mejor resultado para la minimización del ShM ($\beta_{ShF} = 0.254639632$, $\beta_{ShM} = 0.022358008$), estos resultados se obtienen cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.09647414 & y_{c1} &= -0.0000242 & t_{c1} &= 0.04 \\ x_{c2} &= -0.094846552 & y_{c3} &= -0.000570554 & t_{c2} &= 0.005 \end{aligned}$$

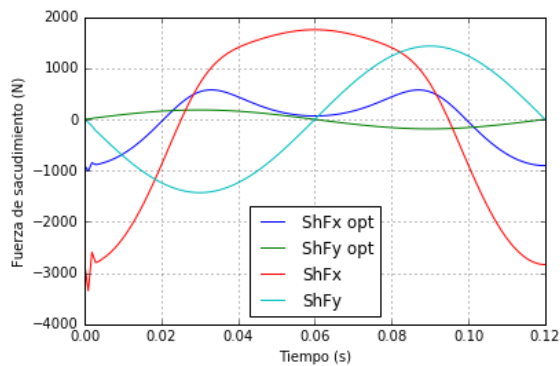
La figura 4-8 muestra la implementación de esta solución en el mecanismo simulado a través de Solidworks.



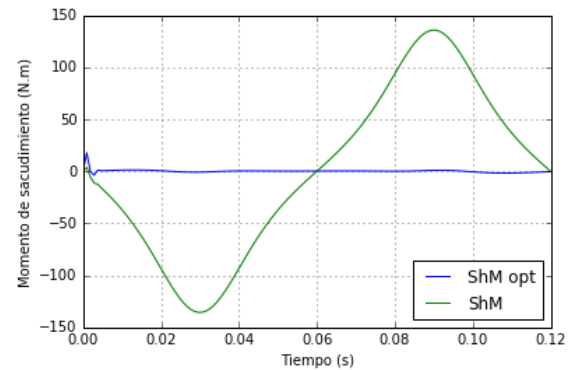
(a) ShF resultante (1a. solución seleccionada)



(b) ShM resultante (1a. solución seleccionada)

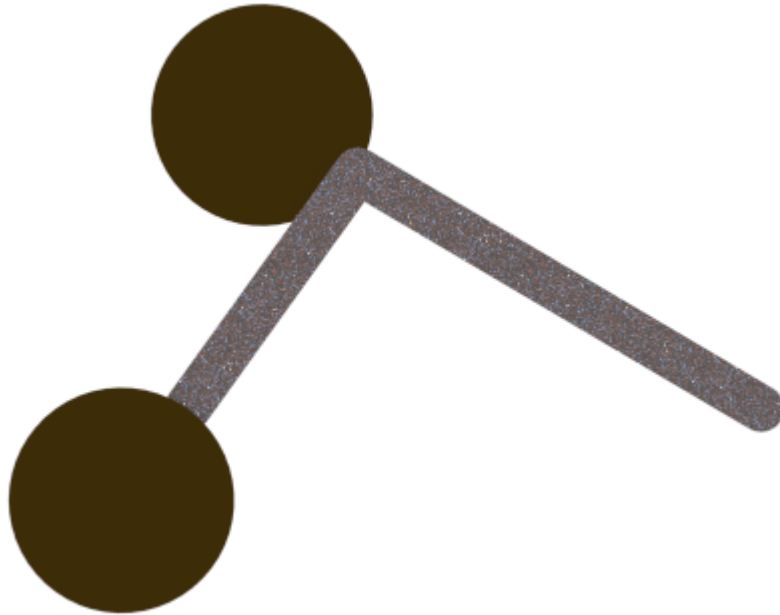


(c) ShF resultante (2a. solución seleccionada)

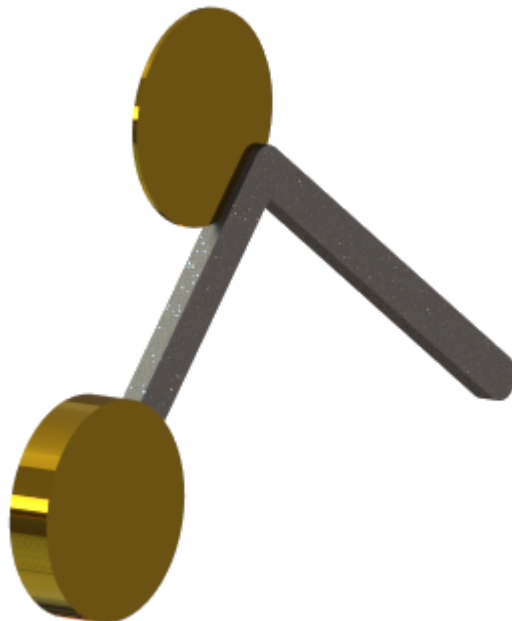


(d) ShM resultante (2a. solución seleccionada)

Figura 4-7.: Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.



(a) Vista 2D.



(b) Vista 3D.

Figura 4-8.: Implementación de la segunda solución seleccionada en el PF para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

En la figura 4-7(c) se muestra la comparación del ShF tanto en la componente x como en la componente y del mecanismo original (ShF) con respecto a los valores correspondientes del mecanismo balanceado mediante los contrapesos (ShF opt). Al utilizar los contrapesos se obtiene una mejora en la ShF del 74.53%. A su vez, la figura 4-7(d) muestra la comparación entre el ShM del mecanismo original (ShM) con respecto a los valores correspondientes del mecanismo balanceado mediante los contrapesos (ShM opt). De esta forma se obtiene una mejora del ShM del 97.76%

4.6. Conclusiones

Regresar al índice

A lo largo de este capítulo se presentaron en forma detallada los pasos necesarios para obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado, y se ilustró a través de un ejemplo simple el procedimiento necesario para obtener esas ecuaciones en cualquier tipo de mecanismo.

Se demostró también que el uso de FCC en conjunto con el algoritmo DE resulta una metodología adecuada para la optimización del balanceo de este tipo de mecanismos, al lograr en este caso una reducción de hasta el 97.56% del ShM o una reducción de hasta el 94.58% del ShF (disminuyendo también en ambos casos las otras reacciones).

En la tabla 4-2 se muestra una comparación del porcentaje de mejora obtenido para el balanceo de la ShF y el ShM entre los resultados obtenidos en este capítulo y los resultados de la optimización de un mecanismo similar de otras publicaciones presentadas con anterioridad. Puede observarse que los resultados de la optimización obtenidos al utilizar FCC para definir la matriz de masas del mecanismo y obtener así las expresiones que representan las reacciones en la base, en conjunto con el algoritmo de DE, resultan ser un método adecuado que permite la obtención de muy buenos resultados de optimización del balanceo.

	Algoritmo de Optimización	% de mejora en el balanceo de la ShF	% de mejora en el balanceo del ShM
[165]	Evolución Diferencial	61.42 %	65.96 %
[171]	Algoritmo basado en enseñanza-aprendizaje	48 %	44 %
[172]	Algoritmo Genético	46 %	99 %
En este capítulo	Evolución Diferencial	77.19 %	94.58 %
En este capítulo	Evolución Diferencial	74.53 %	97.76 %

Tabla 4-2.: Comparación de resultados de optimización del mecanismo manivela-biela-corredera

5. Optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras utilizando descenso de gradiente simplificado

Regresar al índice

5.1. Introducción

Regresar al índice

El balanceo dinámico puede llevarse a cabo en dos etapas. La primera tiene como objetivo encontrar las expresiones que definen las condiciones de balanceo, usualmente estas se obtienen mediante métodos que involucran el uso de coordenadas Cartesianas, implicando por lo tanto el uso de funciones trigonométricas que generan ecuaciones complejas. En contra parte, el uso de FCC permite expresar las condiciones de balanceo en una forma más simple al evitar el uso de variables angulares [32, 28, 18]. En la segunda etapa, el balanceo dinámico se logra mediante diferentes métodos mecánicos, todos ellos implican la adición de masa al mecanismo de una u otra forma, sin embargo debe considerarse también que este incremento de masa no puede realizarse en forma desmedida. El uso de técnicas de optimización hace posible minimizar las reacciones en la base del mecanismo al mismo tiempo que se mantiene bajo control el incremento de masa. En este capítulo se lleva a cabo una optimización para el balanceo dinámico de un mecanismo por redistribución de masas mediante la adición únicamente de contrapesos.

Para llevar a cabo la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras de acuerdo a la propuesta presentada en este capítulo, en primer lugar se obtiene la matriz de masas de cada uno de los eslabones que componen al mecanismo utilizando FCC, una vez que estos se conocen se ensambla la matriz de masas del mecanismo de cuatro barras y a través de esta matriz se obtienen las expresiones para las reacciones ShF y ShM . El objetivo de la optimización es precisamente la minimización de estas reacciones.

Al igual que en el capítulo anterior, el problema de optimización es multi-objetivo con restricciones de límites (también conocidas como restricciones de caja). La función objetivo se obtiene mediante la combinación lineal de índices adimensionales de balanceo β_{ShF} y β_{ShM} . Se continúa entonces con la optimización, el algoritmo propuesto en este capítulo consiste en una versión simplificada del Descenso de Gradiente Proyectado (PGD) [33], se trata de un método determinista, iterativo, basado en la dirección del vector gradiente.

Una vez que se conocen los resultados de la optimización éstos se analizan utilizando PF de forma que es posible conocer el más adecuado dependiendo de la reacción (ya sea ShF o ShM) a al que se desee dar mayor importancia. Se presenta también un método de análisis de las restricciones (límites) de la optimización basado en la evaluación de las derivadas del vector gradiente, graficadas mediante diagramas de caja. Este análisis permite conocer los límites que, en caso de ser modificados, pudieran tener más impacto en la optimización.

Por último se realiza un análisis de sensibilidad simple a través de los PF que permite identificar cuáles contrapesos tienen mayor aporte para el balanceo del mecanismo permitiendo de esta forma la reducción de contrapesos.

El ejercicio de optimización, análisis de límites y reducción de contrapesos se lleva a cabo para tres, dos y un contrapesos. Por último se presenta un ejemplo de expansión de los límites de optimización, basado en los resultados obtenidos a través del análisis de límites propuesto a través del método de diagramas de caja.

La información que se presenta en este capítulo ha sido publicada en el artículo [173] en donde se presenta una extensión del trabajo previo presentado en [168]. Entre los principales aportes, este capítulo presenta un análisis del gradiente en los puntos óptimos obtenidos después de llevar a cabo la optimización por primera vez, de forma que es posible conocer si los límites de optimización propuestos pueden ser modificados (en caso de que sea mecánicamente posible) con la finalidad de obtener resultados incluso mejores. Se llevan a cabo también análisis de los volúmenes de los contrapesos propuestos y de la relación entre el área y el espesor de los mismos, a partir de los cuales es posible confirmar la información obtenida mediante el análisis del gradiente. El método propuesto puede resultar útil para el análisis de problemas similares de optimización de mecanismos. Además, se emplean PF para realizar un análisis de sensibilidad de la respuesta del mecanismo a cada uno de los contrapesos presentados como solución, de esta forma resulta simple conocer la importancia que cada uno de ellos tiene en la respuesta del mecanismo; además, es posible determinar de cuál o cuáles de ellos se puede prescindir obteniendo todavía buenos resultados de balanceo.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 5.2 presenta la obtención de la matriz de masas del mecanismo de cuatro barras y las ecuaciones correspondientes a la

ShF y el ShM. La sección 5.3 define la función objetivo y los límites de la optimización. La sección 5.4 detalla el algoritmo empleado para llevar a cabo la optimización del balanceo. La sección 5.5 presenta la optimización numérica, el análisis de límites para la optimización y el análisis de sensibilidad del balanceo a los contrapesos cuando se emplean tres, dos o un contrapeso. La sección 5.6 presenta los resultados finales del método propuesto.

5.2. Análisis mecánico

Regresar al índice

5.2.1. Matriz de masas un mecanismo de cuatro barras utilizando FCC

Regresar al índice

La Figura 5-1 muestra un mecanismo de cuatro barras. Se trata de un mecanismo de un grado de libertad, que es controlado mediante un motor colocado en el punto básico A, de ahí que la barra AB gira con velocidad ω [rads/s]. l_1, l_2 y l_3 representan la longitud de cada barra. Al usar FCC [18] para representar el sistema, es fácil obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM [103, 174, 168].

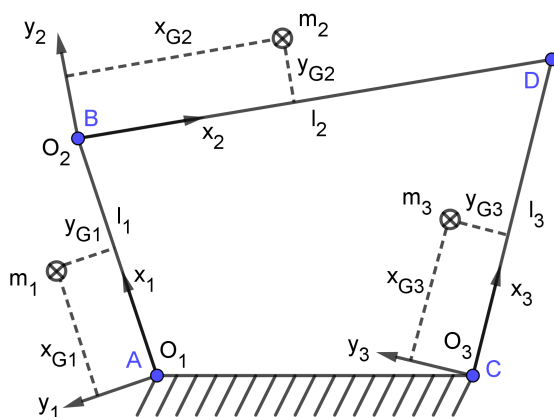


Figura 5-1.: Mecanismo de cuatro barras

Para obtener la matriz de masas M de todo el mecanismo es necesario definir la matriz de masa M_n para cada barra n , esas matrices pueden ser calculadas usando dos puntos básicos i y j de cada elemento.

Con el objetivo de lograr optimizar el balanceo del mecanismo se agregan a éste tres contrapesos en forma de disco (uno para cada una de las barras móviles) tal como puede apreciarse en la figura 5-2. Resulta entonces necesario que las características mecánicas de dichos contrapesos queden también incluidas en la matriz de masas M del sistema en conjunto. Es por ello que cada elemento será considerado entonces como la unión de una barra y su respectivo contrapeso. La masa m_n de cada barra-contrapeso $n = 1, 2, 3$ está definida de acuerdo a la ecuación 5-1.

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \tag{5-1}$$

Donde m_{bn} es la masa de la barra original n ($n = 1, 2, 3$) y m_{cn} es la masa de cada contrapeso ($n = 1, 2, 3$). Sin embargo, la masa de cada contrapeso se encuentra definida en términos de sus dimensiones y su densidad tal como se puede apreciar en la ecuación 5-2.

$$m_{cn} = \pi \rho_{cn} t_{cn} (y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \tag{5-2}$$

Donde ρ_{cn} corresponde a la densidad del material, t_{cn} es el espesor de cada contrapeso y x_{cn}, y_{cn} representan la posición del centro de masa del contrapeso medido en relación con el sistema de coordenadas local de cada elemento.

La inercia total de cada barra-contrapeso I_n (donde $n = 1, 2, 3$) está definida como se muestra en la ecuación 5-3.

$$I_n = \frac{3m_{cn} (y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \tag{5-3}$$

Donde x_{cn} es la posición x del centro de masa del contrapeso que corresponde al elemento n y y_{cn} es la posición y del centro de masa del contrapeso que corresponde al elemento n ,

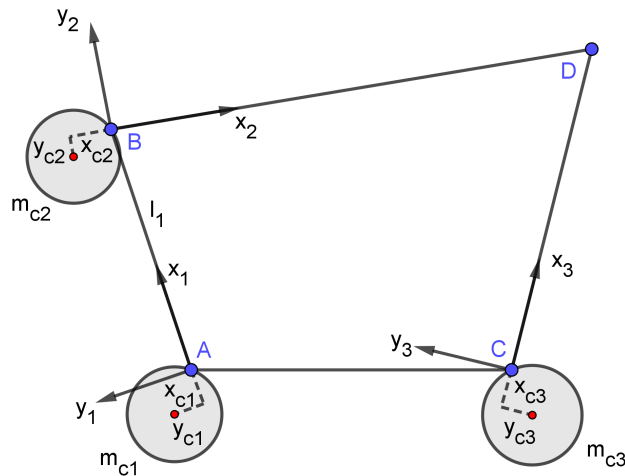


Figura 5-2.: Mecanismo de cuatro barras con contrapesos

ambos medidos desde el origen de coordenadas locales. Por otra parte, I_{bn} corresponde a la inercia de cada barra original.

La nueva posición X_{Gn} del centro de masa de cada elemento n está definida de acuerdo a la ecuación 5-4, en tanto que la nueva posición Y_{Gn} del centro de masa de cada elemento n queda definida por la ecuación 5-5.

$$X_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5-4)$$

$$Y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5-5)$$

Donde x_{cn}, y_{cn} son las posiciones de los centros de masa de cada contrapeso, y x_{bn}, y_{bn} son las posiciones de los centros de masa para cada barra original, todos ellos medidos desde el origen de coordenadas locales de cada elemento.

Para evitar el uso de variables adicionales, la masa de cada contrapeso m_{cn} puede ser definida de acuerdo a la ecuación 5-6.

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (5-6)$$

Donde ρ_{cn} representa la densidad de cada contrapeso, t_{cn} corresponde al espesor y r_{cn} representa el radio. Como restricción para los contrapesos, se considera además que un extremo del contrapeso deberá estar siempre en contacto con el punto definido como el origen de coordenadas locales, de ahí que el radio quede entonces definido por la ecuación 5-7.

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (5-7)$$

Sustituyendo la ecuación (5-7) en (5-6) se obtiene la ecuación 5-8.

$$m_{cn} = \pi(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (5-8)$$

Utilizando los parámetros antes descritos, es posible obtener la matriz de masas de cada elemento que forma al mecanismo de cuatro barras, y uniendo dichas matrices de masas se obtiene la matriz de masas \mathbf{M} de todo el sistema (ecuación 5-9).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 & e & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & b & 0 & 0 & 0 & g & -h \\ -f & e & 0 & b & 0 & 0 & h & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & i & -j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & j & i \\ 0 & 0 & g & h & i & j & d & 0 \\ 0 & 0 & -h & g & -j & i & 0 & d \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

Donde:

$$a = \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} - \frac{2(\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1})}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \quad (5-10)$$

$$b = \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} - \frac{2(\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2})}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} + \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (5-11)$$

$$c = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} - \frac{2(\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3})}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \quad (5-12)$$

$$d = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (5-13)$$

$$e = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} - \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (5-14)$$

$$f = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \quad (5-15)$$

$$g = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (5-16)$$

$$h = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \quad (5-17)$$

$$i = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \quad (5-18)$$

$$j = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} \quad (5-19)$$

5.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Regresar al índice

Una vez que se conoce la matriz de masas \mathbf{M} de todo el sistema, es posible introducir un vector de posiciones para cada uno de los puntos básicos que intervienen en el mecanismo, quedando representado por \mathbf{q} (ecuación 5-20).

$$\mathbf{q} = [A_X \ A_Y \ B_X \ B_Y \ C_X \ C_Y \ D_X \ D_Y]^T \quad (5-20)$$

Derivando la ecuación 5-20 con respecto del tiempo, se obtiene el vector de velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ (ecuación 5-21), que al ser derivado nuevamente otorga el vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ (ecuación 5-22).

$$\dot{\mathbf{q}} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y \ VD_X \ VD_Y]^T \quad (5-21)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [AA_X \ AA_Y \ AB_X \ AB_Y \ AC_X \ AC_Y \ AD_X \ AD_Y]^T \quad (5-22)$$

Es posible entonces calcular el momento lineal L (ecuación 5-23) asociado a todo el sistema (ecuación 5-23).

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (5-23)$$

Donde \mathbf{B} (ecuación (5-24)) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos del mecanismo, en este caso cuatro.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5-24)$$

Resolviendo la ecuación 5-23 y considerando que la velocidad de los puntos fijos es siempre cero ($VA_X = 0$, $VA_Y = 0$, $VC_X = 0$, $VC_Y = 0$), se obtienen las expresiones del momento lineal (\mathbf{L}_i y \mathbf{L}_j).

La ShF (ecuaciones 5-25 y 5-26) del mecanismo puede calcularse derivando las ecuaciones \mathbf{L}_i y \mathbf{L}_j (ecuación 5-23) con respecto al tiempo. Para garantizar el equilibrio del mecanismo, el resultado de estas derivadas debe ser constante en el periodo de tiempo analizado (con fines prácticos generalmente se considera que debe ser igual a cero).

$$\begin{aligned}
 ShF_i = \frac{dL_i}{dt} = & \left(-\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
 & + \left(\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3})}{l_3} AC_Y \\
 & + \left(-\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_X \\
 & + \left(\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} - \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \\
 & + \left(-\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) \right. \\
 & \left. + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1})}{l_1} AA_Y \\
 & + \left(-\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_X
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

$$\begin{aligned}
 ShF_j = \frac{dL_j}{dt} = & \left(\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
 & + \left(\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
 & + \left(-\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_Y \\
 & - \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3})}{l_3} AC_X + \left(-\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right. \\
 & \left. + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \\
 & + \left(\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AB_X \\
 & + \left(-\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_Y \\
 & - \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1})}{l_1} AA_X
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

5.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento

Regresar al índice

Al utilizar FCC, es posible expresar el momento angular de todo el mecanismo H tal como se muestra en la ecuación 5-27.

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{rM}\dot{\mathbf{q}} \quad (5-27)$$

Donde \mathbf{r} está dada en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema y puede ser expresada de acuerdo a la ecuación 5-28.

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X \ -D_Y \ D_X]^T \quad (5-28)$$

Resolviendo la ecuación 5-27 y considerando $VA_X = 0$, $VA_Y = 0$, $VC_X = 0$ y $VC_Y = 0$, es posible obtener la expresión del momento angular H . El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de H con respecto al tiempo (ecuación 5-29), quedando expresado tal como se observa en la ecuación 5-30.

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (5-29)$$

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (5-30)$$

Donde $\dot{\mathbf{r}}$ está definido de acuerdo a la ecuación 5-31.

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \ VA_X \ -VB_Y \ VB_X \ -VC_Y \ VC_X \ -VD_Y \ VD_X]^T \quad (5-31)$$

Para garantizar el equilibrio dinámico del mecanismo, el ShM debe ser constante, es decir que la derivada de H con respecto del tiempo (ecuación 5-30) debe dar por resultado cero. Al resolver la ecuación 5-30 y considerar $VA_X = 0$, $VA_Y = 0$, $VC_X = 0$ y $VC_Y = 0$, se obtiene el ShM del mecanismo completo (ecuación 5-32).

$$\begin{aligned}
 ShM = & VD_X \left(\left(\frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_Y \right. \\
 & + \left(\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_Y \\
 & \left. - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_X}{l_2} \right) + VB_X - VB_Y \\
 & - \left(\frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_X VD_Y \\
 & - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_Y VD_Y}{l_2} \\
 & - \left(\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_X VD_Y \\
 & - \left(\left(\frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_X \right. \\
 & \left. + \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_Y}{l_2} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_X \right) D_Y \\
 & + \left(\left(\frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_Y \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_Y \right. \\
 & \left. - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_X}{l_2} \right) D_X \\
 & + \left(\left(\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \right) AD_Y \right. \\
 & \left. + \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AD_X}{l_3} \right) C_X - B_Y + B_X
 \end{aligned} \tag{5-32}$$

5.3. Función objetivo y límites de optimización

Regresar al índice

Para definir la función objetivo sobre la cual se llevará a cabo el proceso de optimización, se emplean dos índices adimensionales β_i .

El primero de estos índices β_{ShF} (ecuación 5-33) está definido por el valor cuadrático medio (RMS) de la reacción ShF del mecanismo optimizado ($rms(^{\circ}Reacción)$) con respecto al valor RMS de la reacción del mecanismo original ($rms(Reacción)$), ambos considerados durante un periodo de tiempo T.

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^{\circ}ShF)}{rms(ShF)} \quad (5-33)$$

Donde el RMS de la reacción de la ShF ($rms(^{\circ}ShF)$) del mecanismo optimizado está dado tal como se muestra en la ecuación 5-34.

$$rms(^{\circ}ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (5-34)$$

Y el RMS de la ShF del mecanismo original ($rms(ShF)$) es una constante obtenida del cálculo del RMS de la ShF del mecanismo de cuatro barras sin ningún contrapeso añadido (ecuación 5-35).

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (5-35)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5-34 y 5-35 en 5-33 se obtiene el índice de balanceo (β_{ShF}) (ecuación 5-36).

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (^{\circ}ShF_{ik}^2 + ^{\circ}ShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (5-36)$$

El segundo de los índices de balanceo β_{ShM} (ecuación 5-37) puede ser calculado de una manera similar al primero pero considerando ahora la reacción provocada por el ShM.

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ^{\circ}ShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}} \quad (5-37)$$

Donde $^{\circ}ShM$ es el ShM del mecanismo optimizado (es decir cuando se consideran los contrapesos agregados para lograr el balanceo) y ShM es una constante que representa el ShM del mecanismo sin balancear.

El objetivo concreto de la optimización que se lleva a cabo para el mecanismo de cuatro barras consiste en minimizar β_{ShF} y β_{ShM} (ecuaciones 5-36 y 5-37), por lo tanto se trata de un problema multiobjetivo.

La principal técnica empleada para llevar a cabo la optimización de problemas de objetivos múltiples es la combinación lineal de las funciones objetivo, que define la nueva función objetivo mediante una combinación lineal de los índices de balanceo (ecuación 5-38).

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (5-38)$$

donde γ es un valor escalar que depende de la importancia dada a cada uno de los objetivos de la optimización.

En este caso, las variables a optimizar son: $x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}$; y los límites quedan comprendidos de acuerdo a las desigualdades 5-39.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (5-39)$$

5.4. Algoritmo de optimización

Regresar al índice

Con la finalidad de explorar otros algoritmos alternativos para la optimización del balanceo se decidió optar por el algoritmo de Descenso de Gradiente Proyectado (PGD por sus siglas en inglés), que es un método determinístico, basado en el concepto matemático del gradiente, sumamente sencillo de comprender y de implementar en programación. Este algoritmo puede utilizarse para resolver diferentes tipos de problemas tal como puede apreciarse en [38, 175, 176].

Para la implementación del algoritmo de optimización en este capítulo, al algoritmo original de PGD propuesto normalmente en la bibliografía de optimización se le realizó una modificación simplificando el control de los límites de la optimización, tal como se detallará más adelante.

El algoritmo 2 describe el PGD simplificado utilizado para encontrar el mínimo de la función objetivo (ecuación 5-38). Ahí, *RandomBoxConstraints()* calcula un vector de variables aleatorias con una distribución uniforme respetando los límites especificados. Por su parte *GradientFiniteDiff(f, X₀)* y *HessianFiniteDiff(f, X_k, P_k)* calculan la aproximación

del vector gradiente y de la matriz Hessiana basados en las ecuaciones 2-25, 2-36 y 2-37. $\|\cdot\|$ representa la norma del vector ϵ que es un pequeño escalar ($\epsilon = 1e - 5$).

Algoritmo 2: Descenso de gradiente proyectado con descenso máximo

```

1  $X_0 = RandomBoxConstraints()$ ;
2  $\nabla f(X_0) = GradientFiniteDiff(f, X_0)$ ;
3  $k = 0$ ;
4 while  $\|\nabla f(X_k)\| > \epsilon$  or  $k < NMaxIter$  do
5    $P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|}$ ;
6    $AP_k = HessianFiniteDiff(f, X_k, P_k)$ ;
7    $\alpha_k = -\frac{\nabla f(X_k)^T P_k}{P_k^T AP_k}$ ;
8    $X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k$ ;
9   If  $isInvalid(X_{k+1})$  then  $fix(X_{k+1})$ ;
10  If  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  then break;
11   $k = k + 1$ ;
12 end
13 return  $X_k$ ;

```

Para controlar los límites especificados de la optimización, se utiliza la versión simplificada del PGD, de modo que cuando una solución esta fuera de los límites, ésta es proyectada a una región valida. La función booleana $isInvalid(X_{k+1})$ regresa ‘verdadero’ si el vector obtenido contiene valores fuera de los límites y regresa ‘falso’ en caso contrario. La función $fix(X_{k+1})$ se usa para corregir los valores del vector en caso de que hayan resultado no válidos. Esta corrección de valores implica que si el resultado es menor que el valor inferior permitido, entonces éste se convierte al mínimo. De forma similar, si es mayor que el valor máximo permitido, entonces se convierte al máximo

El algoritmo implementa dos condiciones para detenerse:

1. $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$ Si la diferencia entre X_{k+1} y X_k es demasiado pequeña significa que prácticamente no se está dando cambio alguno entre la solución actual y la anterior. Este caso se contempla también cuando la norma del vector gradiente tiene un valor cercano a 0.
2. $k > NMaxIter$. Se ha alcanzado el número máximo de iteraciones (Para la implementación se consideró $NMaxIter = 1000$)).

La versión simplificada del algoritmo de PGD se ejecuta varias veces tomando γ como un número aleatorio que sigue una distribución uniforme entre 0 y 1. Como se explica en [164],

una mejor alternativa que el uso de una malla para generar los valores de γ se encuentra en el uso de valores aleatorios de hiper parámetros.

5.5. Ejemplo numérico

Regresar al índice

Esta sección presenta un análisis numérico para la optimización del balanceo completo de un mecanismo de cuatro barras, adicionalmente se presenta un método mediante el cual es posible obtener información acerca de la importancia de cada contrapeso resultado de la optimización y de su influencia en el balanceo total del mecanismo, permitiendo de esta manera tomar decisiones en caso de que sea necesario disminuir la cantidad de contrapesos a utilizar, obteniendo óptimos resultados.

5.5.1. Características mecánicas y límites de optimización

Regresar al índice

La tabla **5-1** presenta los parámetros físicos de un mecanismo de cuatro barras (figura **5-2**). El material usado para los eslabones es acero, con una densidad de $7800kg/m^3$. Los contrapesos se consideran de latón con una densidad (ρ_c) de $8500kg/m^3$.

El mecanismo es movido por un motor colocado en el punto A, girando a una velocidad constante de $500rpm$. A través de cinemática directa es posible obtener una muestra de las posiciones ($B_x, B_y, C_x, C_y, D_x, D_y$), velocidades ($VB_x, VB_y, VC_x, VC_y, VD_x, VD_y$) y aceleraciones ($AB_x, AB_y, AC_x, AC_y, AD_x, AD_y$) correspondientes a cada uno de los puntos básicos considerados en este sistema, para ello se empleó el software de CAD Solidworks.

Remplazando todos los parámetros conocidos en las ecuaciones 5-36 y 5-37, se obtienen los índices de balanceo utilizados para definir la función objetivo 5-38. De acuerdo con las características mecánicas del mecanismo los límites considerados para la optimización se muestran en las desigualdades 5-40.

$$\begin{aligned}
 -0.40m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40m \\
 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m
 \end{aligned}
 \tag{5-40}$$

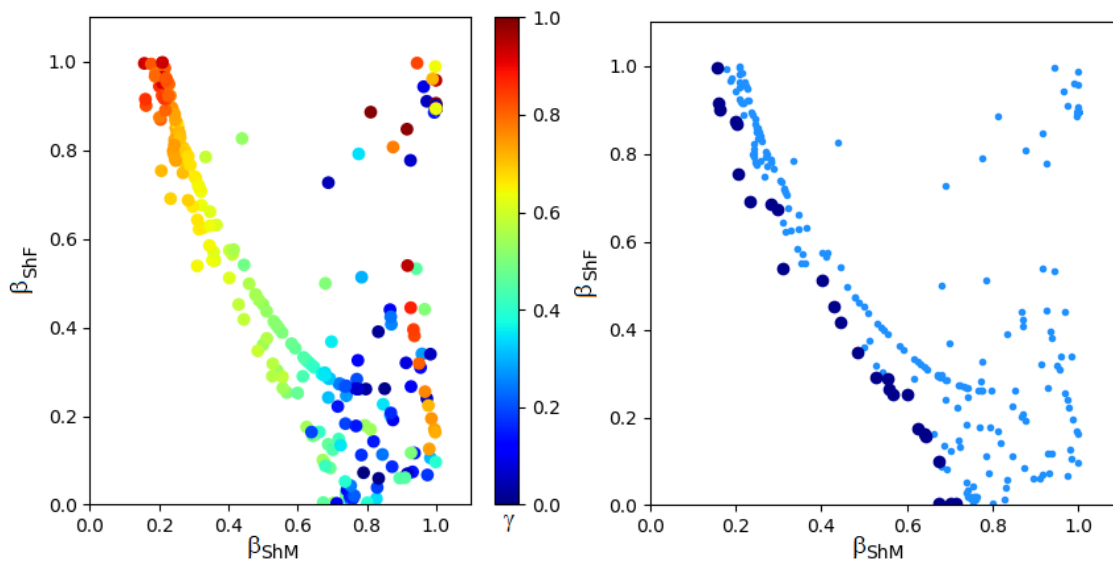
Cuerpo n	1	2	3
Masa m_{b_n} [kg]	2.51946901	4.73866901	3.68746901
Longitud l_n [m]	0.40	0.78	0.60
Inercia I_{b_n} [kgm/s ²]	0.14023528	0.98146460	0.45494271
Centro de masa x_{b_n} [m]	0.20	0.39	0.30
Centro de masa y_{b_n} [m]	0.00	0.00	0.00

Tabla 5-1.: Parámetros de cada eslabonamiento de un mecanismo de cuatro barras.

5.5.2. Optimización usando tres contrapesos

Regresar al índice

Para el ejemplo numérico del problema de la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras se utilizó el algoritmo de PGD simplificado. Siguiendo la búsqueda aleatoria de los hiper-parámetros presentados en [164], el algoritmo 2 es ejecutado 500 veces tomando γ como un valor aleatorio de una distribución uniforme en el rango de $(0, 1)$ (ecuación 5-38). Los resultados de la optimización son almacenados cuando el resultado de la función objetivo es menor que 1.0.



(a) β_{ShM} y β_{ShF} optimizados de acuerdo a γ (b) Frente de Pareto de los resultados de optimización

Figura 5-3.: Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo de cuatro barras.

La figura 5-3(a) muestra la relación entre los valores de β_{ShF} y β_{ShM} de todas las soluciones encontradas a través de la optimización. Se emplean diferentes colores para representar el valor utilizado para γ en la función $F(X)$ (ecuación 5-38)

En la figura 5-3(b) los puntos azul oscuro representan el PF mientras que los azul claro representan las soluciones dominadas.

5.5.3. Análisis de los resultados numéricos usando tres contrapesos

Regresar al índice

Dentro de las soluciones encontradas en el frente de Pareto, es posible seleccionar la más apropiada de acuerdo con el problema concreto que se está resolviendo al llevar a cabo la optimización del balanceo del mecanismo.

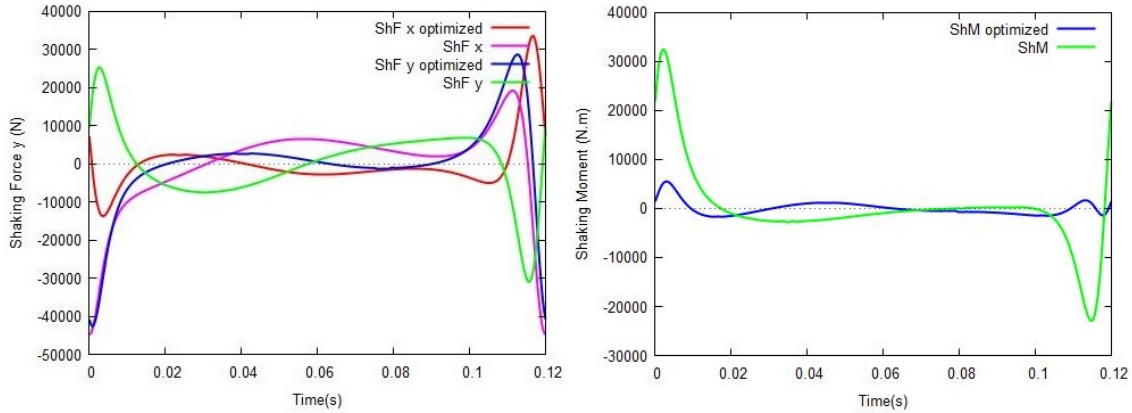
Como un ejemplo, para analizar los resultados, se toman tres soluciones del frente de Pareto, la primera es el mejor resultado considerando el índice de optimización correspondiente al ShM ($\beta_{ShM} = 0.1600587$, $\beta_{ShF} = 0.9152829$), la segunda es el mejor resultado considerando el índice de optimización correspondiente al ShF ($\beta_{ShM} = 0.71311372$, $\beta_{ShF} = 0.00295769$) y la última es tomando en consideración ambos índices de balanceo, logrando optimizar cada uno de ellos en casi un 60 % ($\beta_{ShM} = 0.42969434$, $\beta_{ShF} = 0.45176319$). A continuación se analizarán con más detalle dichas soluciones.

1. La primera solución se seleccionó buscando el mejor resultado en cuanto a la optimización del balanceo del índice correspondiente al ShM (β_{ShM}), es decir que se trata de aquella en que la reducción del ShM es máxima, sin tomar en consideración los resultados del índice correspondiente al ShF (β_{ShF}). Analizando el PF se eligió el punto que corresponde a: $\beta_{ShM} = 0.1600587$, $\beta_{ShF} = 0.9152829$, el cual se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.306033474 & y_{c1} &= -0.05120233 & t_{c1} &= 0.007840031 \\ x_{c2} &= -0.031811247 & y_{c3} &= 0.112686771 & t_{c2} &= 0.04 \\ x_{c3} &= -0.115671647 & y_{c2} &= -0.09348429 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

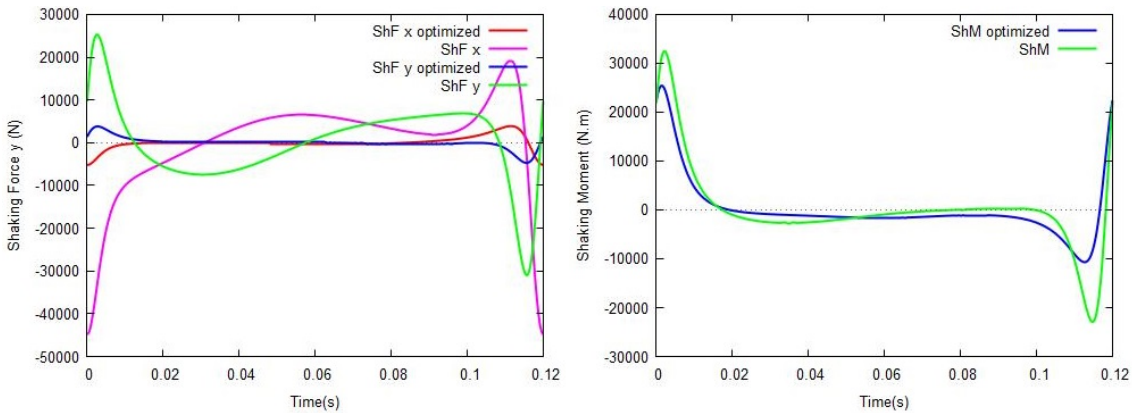
La figura 5-4(a) muestra la comparación entre el ShF del mecanismo original (considerando sus componentes x y y) y el ShF después de la optimización del balanceo. En este caso, la ShF total mejoró sólo el 8.47 %. Sin embargo, con esta solución, en la figura 5-4(b), es posible apreciar que el momento de sacudimiento del mecanismo optimizado de cuatro barras es 83.99 % menor que el que se tenía originalmente. Puede observarse que al utilizar únicamente contrapesos no es posible eliminar completamente el ShM, sin embargo éste si puede reducirse significativamente, e incluso se reduce también un poco la ShF.

2. La segunda solución se eligió buscando el mejor resultado en cuanto a la optimización del balanceo del índice correspondiente al ShF (β_{ShF}), es decir que se trata de aquella en que la reducción del ShF es la máxima, sin dar mucha importancia a los resultados del índice correspondiente al ShM (β_{ShM}). En el PF se eligió el punto que corresponde



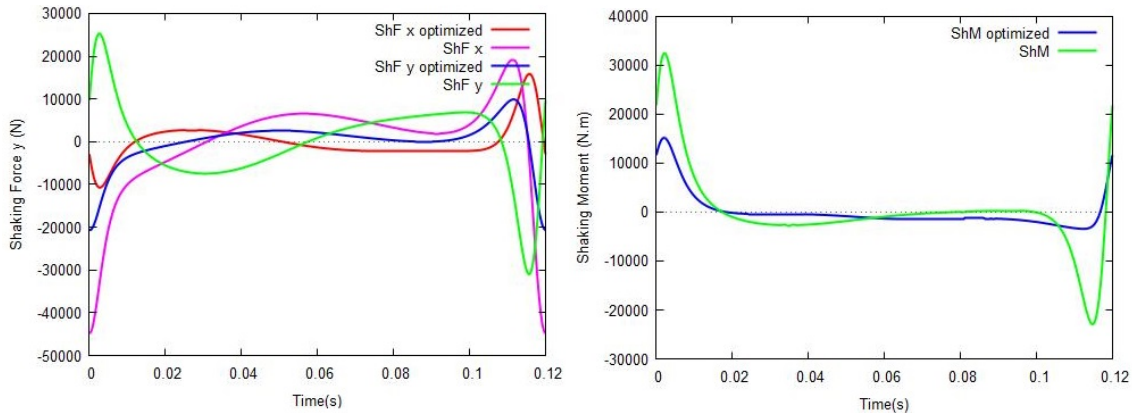
(a) ShF resultante (1a. solución seleccionada)

(b) ShM resultante (1a. solución seleccionada)



(c) ShF resultante (2a. solución seleccionada)

(d) ShM resultante (2a. solución seleccionada)



(e) ShF resultante (3a. solución seleccionada)

(f) ShM resultante (3a. solución seleccionada)

Figura 5-4.: Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.

a: $\beta_{ShM} = 0.71311372$, $\beta_{ShF} = 0.00295769$), el cual se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.15548064 & y_{c1} = -0.007810097 & t_{c1} = 0.035743454 \\ x_{c2} = -0.046683398 & y_{c2} = -0.068805445 & t_{c2} = 0.027404923 \\ x_{c3} = -0.132085338 & y_{c3} = 0.015127099 & t_{c3} = 0.037640418 \end{array}$$

En la figura 5-4(c) es posible apreciar que la ShF del mecanismo donde se usaron los contrapesos, se redujo significativamente (99.70 %) comparado con el mecanismo original. Se puede considerar que la ShF se elimina casi por completo con el uso de contrapesos y también el ShM tiene una reducción del 28.69 % (Figura 5-4(d)).

3. Para la tercera solución, se eligió un punto del PF en donde se obtuviera una reducción considerable tanto de la ShF como del ShM. El punto elegido corresponde a ($\beta_{ShM} = 0.42969434$, $\beta_{ShF} = 0.45176319$). Esta optimización del balanceo se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.233449901 & y_{c1} = 0.047539111 & t_{c1} = 0.005 \\ x_{c2} = 0.0000527 & y_{c2} = 0.000296052 & t_{c2} = 0.005000159 \\ x_{c3} = -0.125584323 & y_{c3} = 0.058770112 & t_{c3} = 0.04 \end{array}$$

Al utilizar estos contrapesos el ShM se redujo un 57.03 % y la ShF se redujo un 54.82 %. Esto se puede apreciar en la figura 5-4(e) y en la figura 5-4(f).

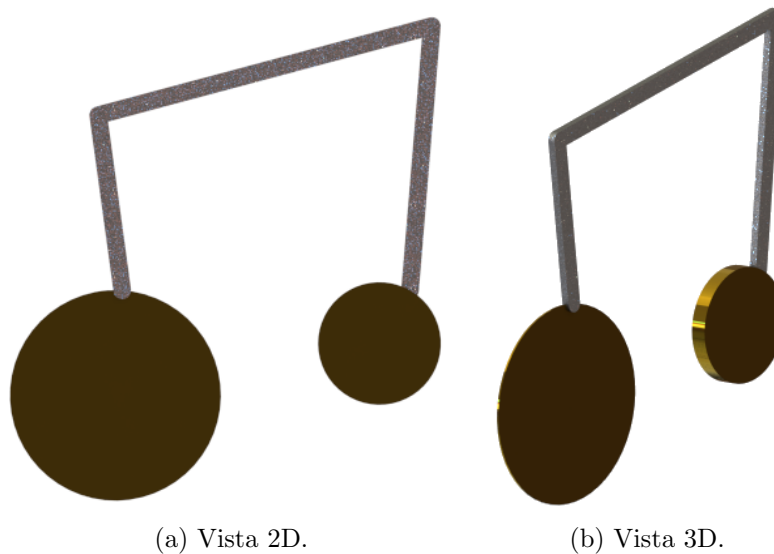


Figura 5-5.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando tres contrapesos.

Por otra parte, el resultado de implementar esta solución se observa en la figura **5-5**, vale la pena destacar que el contrapeso 2 es muy pequeño, y por ello prácticamente imperceptible, como para apreciarse en la solución.

5.5.4. Método de análisis de restricciones para la optimización del balanceo basado en diagramas de caja

Regresar al índice

Se presenta a continuación una alternativa novedosa para el análisis de las restricciones (o límites) de la optimización basada en los resultados, considerando los valores del vector gradiente.

El problema de optimización puede ser definido de acuerdo a (5-41).

$$\begin{aligned} \min_x f(x, \alpha) \\ \text{s.a.} \\ l \leq x \leq h \end{aligned} \tag{5-41}$$

Y las restricciones pueden ser definidas por (5-42).

$$\begin{aligned} \min_x f(x, \alpha) \\ \text{s.a.} \\ x - l \geq 0 \\ h - x \geq 0 \end{aligned} \tag{5-42}$$

En este caso, el Lagrangiano está dado por la ecuación 5-43.

$$L(x, \delta, \pi) = f(x) - \delta^T(x - l) - \pi^T(h - x) \tag{5-43}$$

y las KKT están definidas por la ecuación 5-44.

$$\nabla f(x) - \delta + \pi = 0 \tag{5-44}$$

con $\delta, \pi \geq 0$, entonces definiendo $\lambda = \delta - \pi$ se obtienen (5-45) y (5-46).

$$\nabla f(x) - \lambda = 0 \tag{5-45}$$

$$\nabla f(x) = \lambda \tag{5-46}$$

Llegando entonces a (5-47) y (5-48).

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ \lambda_i & \text{if } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (5-47)$$

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ -\lambda_i & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (5-48)$$

En otras palabras, al analizar el vector gradiente i_{esimo} si éste tiene un valor igual a 0 significa que la restricción que se le asignó no está limitando a la optimización para encontrar el mínimo. Sin embargo si el valor del vector gradiente i_{esimo} es mayor a 0 quiere decir que la optimización podría mejorarse si se ampliara la restricción del borde inferior. Y si el valor es menor a 0, significa que la optimización podría mejorarse si la restricción del borde mayor se amplía.

Utilizando este método es posible obtener información valiosa sobre las restricciones que se asignaron a la optimización, y en caso que las condiciones mecánicas lo permitieran podría corregirse alguno de los límites de forma que se obtengan mejores resultados de balanceo.

5.5.5. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos

Regresar al índice

A continuación se presenta un análisis que permite determinar si los límites propuestos para la optimización son los más adecuados o si deberían ser modificados (en caso de que exista esta posibilidad, tomando en consideración las características físicas del mecanismo y del espacio en torno a él).

En la figura 5-6 se presentan los diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable x_n , y_n y t_n para cada contrapeso n ($1 \leq n \leq 3$).

Tal como se explicó en la sección anterior, se sabe que cuando el valor de la derivada parcial de cada parámetro a optimizar es igual a cero, significa que es posible alcanzar valores óptimos de balanceo dentro de las restricciones propuestas. En los diagramas de caja de la figura 5-6 se puede ver que para las variables x_n y y_n de cada contrapeso n ($1 \leq n \leq 3$), las derivadas parciales son cercanas a cero, esto significa que es posible alcanzar los valores óptimos dentro de los límites de optimización propuestos.

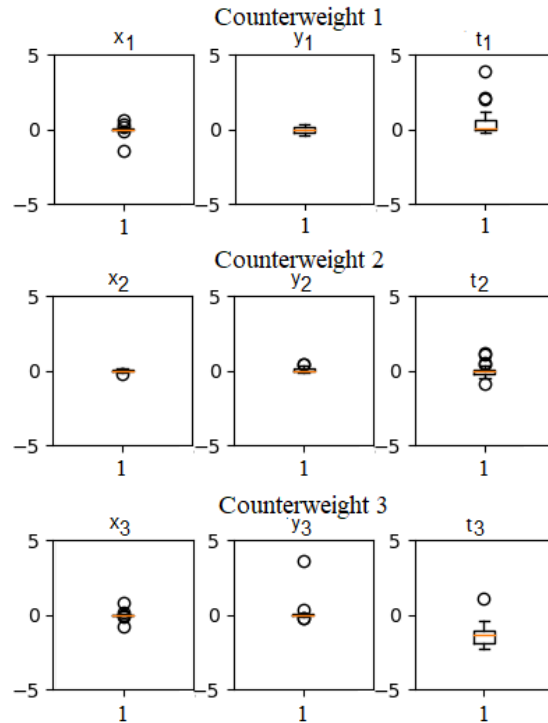


Figura 5-6.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

Sin embargo, para las variables t_1 y t_3 las derivadas parciales del gradiente no son cercanas a cero. En t_1 es posible ver que el valor tiende a ser mayor que cero, por lo tanto, se puede deducir que el espesor del contrapeso 1 intenta ser menor que el límite de 0.005 metros; sin embargo, esto no es posible debido a las restricciones mecánicas que impiden que el espesor sea cercano a cero o negativo dado que esto es físicamente imposible. Por otro lado, el valor de la derivada parcial del gradiente t_3 tiende a ser menor que 0, lo que significa que si los límites de la optimización lo permitieran, el contrapeso 3 podría tener un espesor mayor a 0.04 metros y de esta forma podría balancearse aún más al mecanismo en conjunto.

En la figura 5-7(a) se presenta el histograma de los volúmenes de los contrapesos obtenidos en las diferentes soluciones de optimización. Al analizar el volumen de los contrapesos y la relación entre su área y espesor (Figura 5-7(b)), se puede ver que el contrapeso 2 tiene un volumen muy pequeño (comparado con otros contrapesos) y cuando el área y el espesor son muy pequeños el contrapeso dos está casi desapareciendo de la solución. Por otro lado, la relación entre el área y el espesor del contrapeso tres muestra cómo, en casi todos los casos, el espesor está alcanzando el límite permitido más alto, esto demuestra la información proporcionada por el diagrama de caja y por el histograma analizados anteriormente y confirma la conclusión de que si las características mecánicas del sistema lo permiten, podría

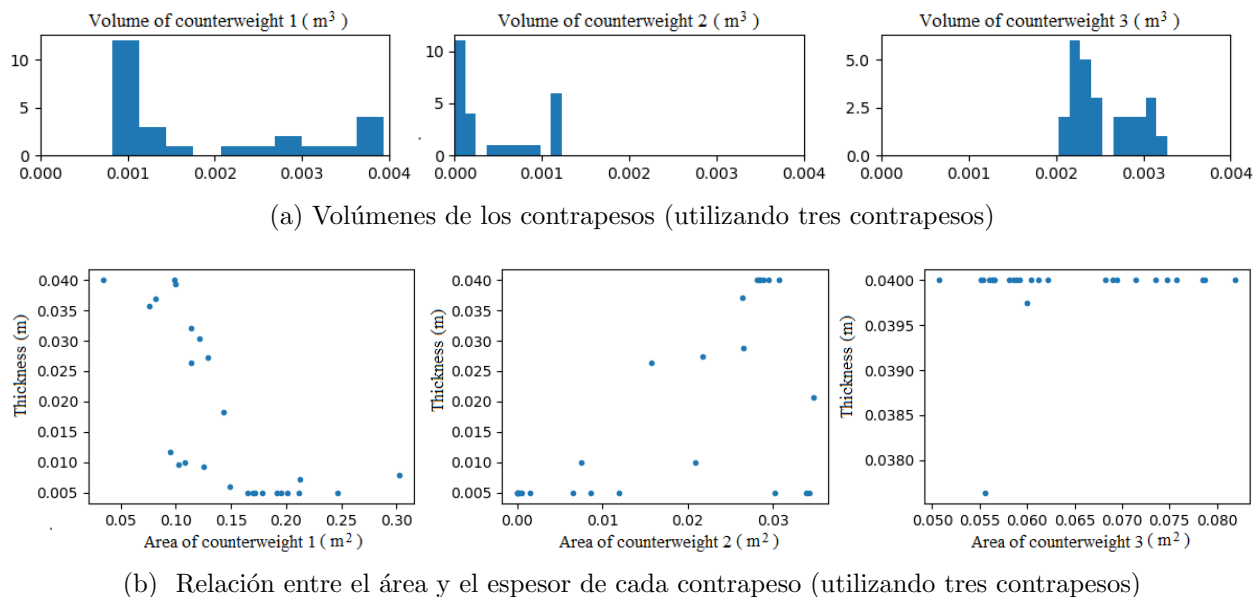


Figura 5-7.: Análisis de dimensiones cuando se utilizan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

ser recomendable realizar la optimización con un límite superior ligeramente mayor para la variable t_3 .

5.5.6. Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos

Regresar al índice

Podría haber algunos casos en los que sea deseable eliminar uno o más contrapesos, las razones pueden ser el volumen resultante de todo el mecanismo, el costo de implementar la solución o el espacio físico disponible alrededor del mecanismo.

La figura 5-8 presenta en conjunto los PF de los diferentes resultados de optimización cuando se usan todas las combinaciones posibles de tres, dos o solo un contrapeso. Las estrellas negras corresponden al PF original cuando se están usando los tres contrapesos. Las cruces azules corresponden al PF cuando el contrapeso 2 ha sido eliminado y solo el contrapeso 1 y 3 son considerados. Comparando estos resultados con los obtenidos al usar todos los contrapesos, es posible ver que los PF son muy similares.

Las cruces verdes corresponden al PF cuando se usan solo los contrapesos 2 y 3, lo que significa que el contrapeso 1 ha sido eliminado. Y las cruces amarillas corresponden al PF cuando se ha eliminado el contrapeso 3 y se obtiene utilizando solo los contrapesos 1 y 2.

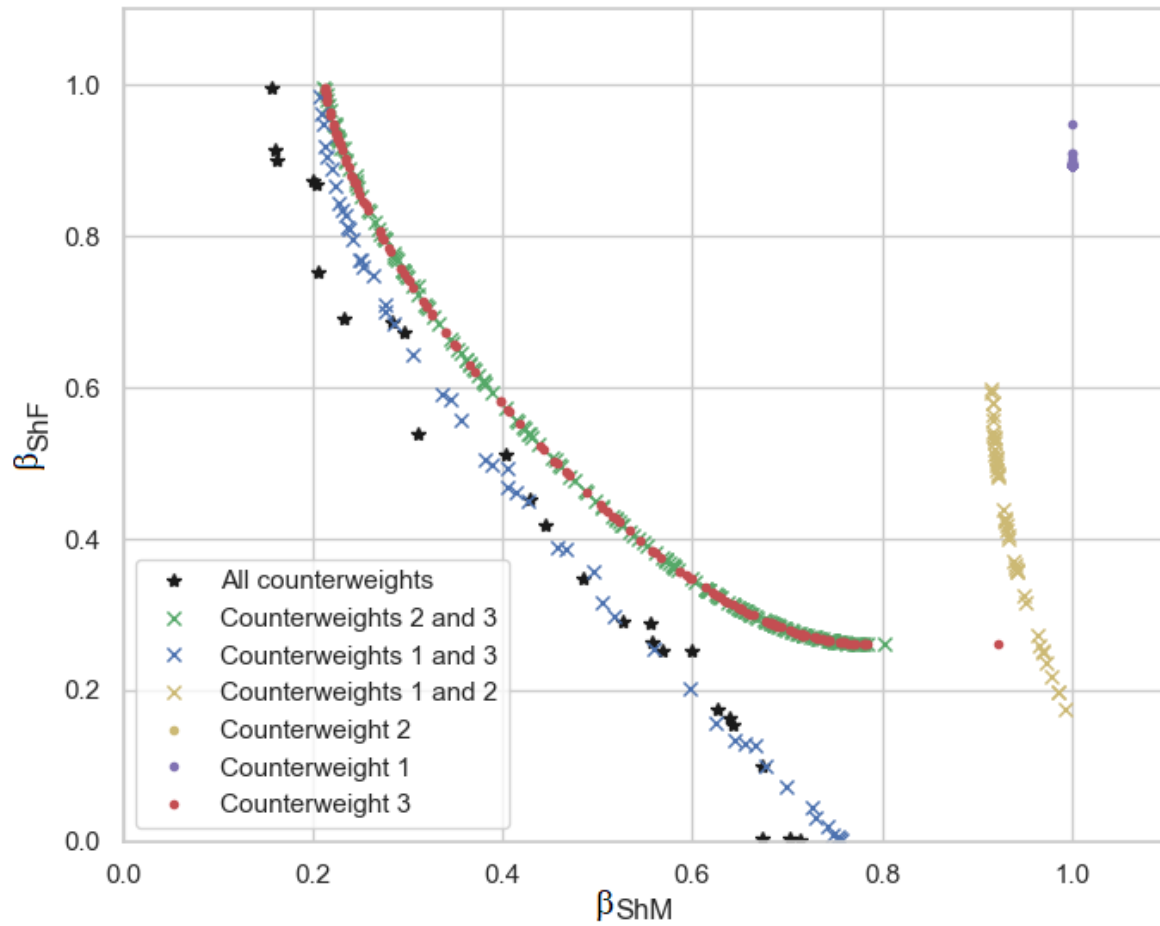


Figura 5-8.: Comparación del PF al utilizar diferente número de contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

Utilizando la información proporcionada por los PF (figura 5-8), es posible concluir que si se decide eliminar un contrapeso para simplificar el balanceo del mecanismo, debería eliminarse el contrapeso 2, ya que utilizando solo los contrapesos 1 y 3 es posible obtener resultados muy similares a los obtenidos cuando se usan los tres contrapesos.

5.5.7. Análisis de los resultados numéricos usando dos contrapesos

Regresar al índice

Después de probar que el contrapeso con menos influencia en la optimización del balanceo es el contrapeso 2, se seleccionan tres soluciones del PF cuando se usan sólo los contrapesos 1 y 3 (figura 5-8). Estas soluciones se escogen de la siguiente manera:

1. Si el interés es optimizar el balanceo de la ShF, se considera entonces el resultado del índice (β_{ShF}) sin dar importancia al índice relacionado con la ShM (β_{ShM}), la solución seleccionada es:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.210649187 & y_{c1} &= 0.002597417 & t_{c1} &= 0.005812833 \\ x_{c3} &= -0.133324421 & y_{c3} &= 7.62E - 05 & t_{c3} &= 0.039931556 \end{aligned}$$

Al usar esta solución, la ShF del mecanismo se reduce a 99.67 %, mientras que el ShM también se reduce un 24.34 %.

2. Por otra parte, si el interés es optimizar el balanceo del ShM, se considera entonces el índice (β_{ShM}) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF (β_{ShF}), la solución seleccionada es:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.273728043 & y_{c1} &= -0.029116001 & t_{c1} &= 0.005 \\ x_{c3} &= -0.11860947 & y_{c3} &= 0.10186805 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

Al usar esta solución, el ShM del mecanismo se reduce un 79.22 % mientras que la ShF se reduce un 1.55 %.

3. Por último, si el interés es optimizar ambos índices, el relacionado con la ShF (β_{ShF}) y el relacionado con el ShM (β_{ShM}), la solución seleccionada es:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.207213869 & y_{c1} &= 0.031661306 & t_{c1} &= 0.006993731 \\ x_{c3} &= -0.126559077 & y_{c3} &= 0.058396603 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

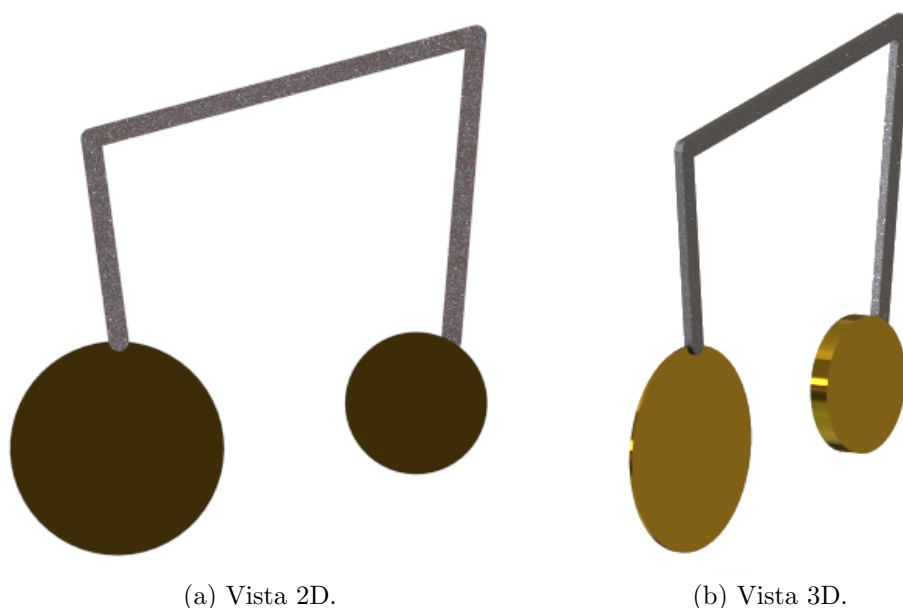


Figura 5-9.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando dos contrapesos.

Esta solución reduce la ShF un 55.05 % y reduce el ShM un 57.27 %.

En la figura 5-9 se observa el resultado de implementar esta solución.

La tabla 5-2 muestra una comparación entre los resultados de optimización del balanceo cuando se usan todos los contrapesos, con los resultados de la optimización cuando sólo se usan los contrapesos 1 y 3. Se puede apreciar que la optimización lograda sin usar el segundo contrapeso es casi la misma que la lograda al usar todos los contrapesos, por lo que puede considerarse eliminarlo.

5.5.8. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos

Regresar al índice

En la figura 5-10 se pueden ver los diagramas de caja de las derivadas parciales con respecto a cada variable x_n , y_n y t_n (para los contrapesos $n = 1$ y $n = 3$) (es decir, cuando el contrapeso 2 ha sido eliminado).

Al igual que se hizo con anterioridad, es posible realizar un análisis de las derivadas parciales de cada variable optimizada para saber si es aconsejable modificar los límites de optimización

Tabla 5-2.: Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.

		Optimización de ShF	Optimización de ShM
Usando tres contrapesos	Optimización de ShF	99.70 %	28.69 %
	Optimización de ShM	8.47 %	83.99 %
	Optimización de ShF y ShM	54.82 %	57.03 %
Usando los contrapesos 1 y 3	Optimización de ShF	99.67 %	24.34 %
	Optimización de ShM	1.55 %	79.22 %
	Optimización de ShF y ShM	55.05 %	57.27 %
Usando el contrapeso 3	Optimización de ShF	78.74 %	0.42 %
	Optimización de ShM	3.22 %	73.61 %
	Optimización de ShF y ShM	51.19 %	53.31 %

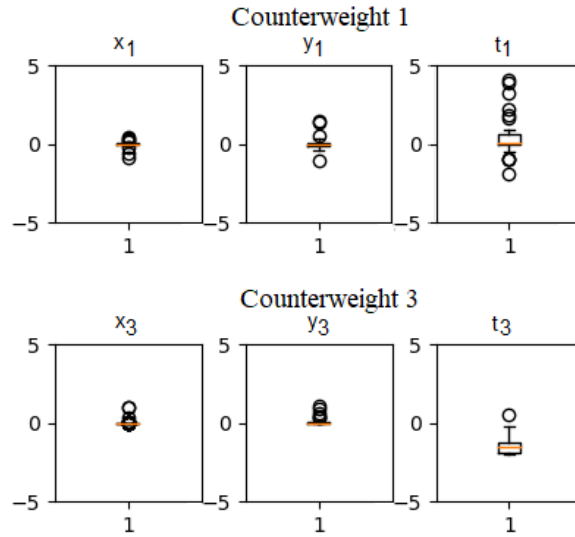


Figura 5-10.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

propuestos. Al observar los diagramas de caja para los valores de x_n , y_n se puede notar que están muy cerca de cero, esto significa que los límites definidos en la optimización de estas variables son adecuados. La variable t_1 intenta ligeramente ser mayor que cero, esto significa que en algunos casos el espesor del contrapeso 1 intenta ser menor que el límite de 0.005 metros, pero tal como ya se explicó, esto no es mecánicamente posible.

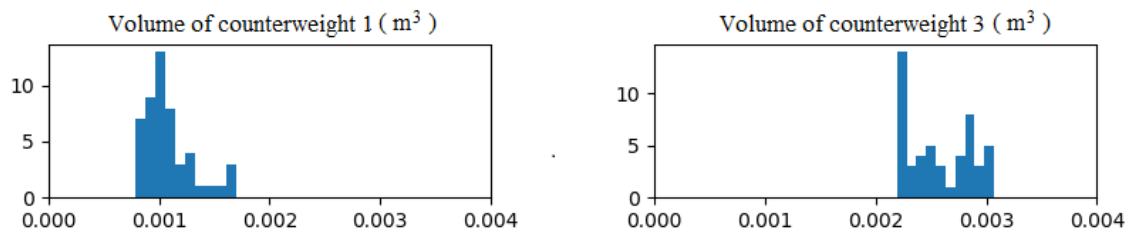
Por otro lado, el diagrama de caja de la derivada parcial de t_3 muestra que este valor intenta ser mayor que el límite propuesto, esto significa que en la optimización, la variable está alcanzando el límite máximo permitido y, si las restricciones mecánicas lo permiten, podrían obtenerse mejores resultados si este límite se amplía.

Para confirmar el método de análisis propuesto puede observarse la figura 5-11(a) en donde el histograma del volumen total de cada contrapeso muestra cómo el contrapeso 1 es más pequeño que el contrapeso 3; por su parte la figura 5-11(b)) muestra que el espesor del contrapeso 3 queda en casi la totalidad de los casos en la restricción superior de la optimización.

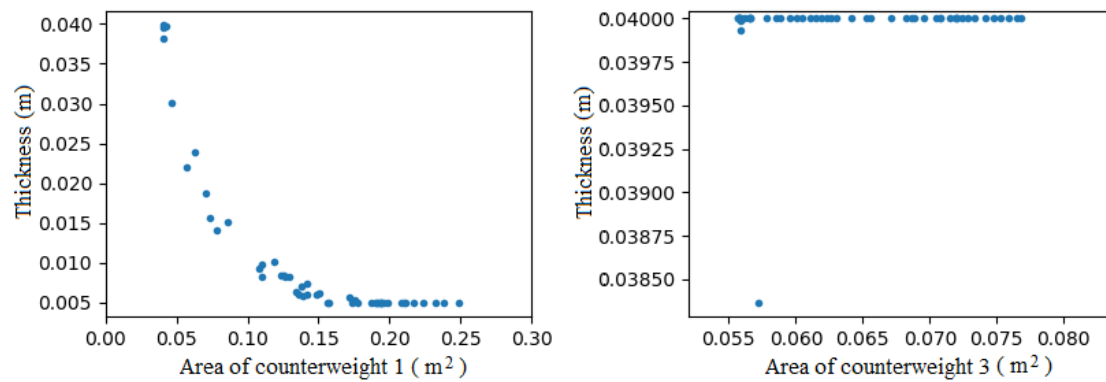
5.5.9. Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso

Regresar al índice

A continuación se presenta el análisis en caso de que fuera deseable agregar únicamente un contrapeso para optimizar el balanceo del mecanismo de cuatro barras.



(a) Volúmenes de los contrapesos al utilizar dos de ellos.



(b) Relación entre el área y el espesor de cada contrapeso cuando se usan dos de ellos

Figura 5-11.: Análisis de dimensiones cuando se utilizan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

En la figura 5-8, los puntos morados corresponden al PF cuando se optimiza usando sólo el contrapeso 1, los puntos amarillos representan el PF cuando se usa el contrapeso 2 y los puntos rojos corresponden al PF cuando se usa el contrapeso 3.

Al analizar esta figura, es posible observar que los mejores resultados, en caso de que se utilice solamente un contrapeso, se obtienen eligiendo el contrapeso 3.

5.5.10. Análisis de resultados numéricos usando un contrapeso

Regresar al índice

Al igual que en los casos anteriores, pero ahora utilizando el PF correspondiente al contrapeso 3, se seleccionan tres soluciones de la siguiente forma:

1. Si el interés es optimizar el índice de balanceo relacionado con la ShF (β_{ShF}), sin dar importancia al índice relacionado con el ShM (β_{ShM}), la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.11950597007297 \quad y_{c3} = 0.0984494486824036 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma la ShF del mecanismo se reduce un 78.74%, mientras que el ShM se mantiene prácticamente igual, pues sólo se reduce un 0.42%.

2. Si el interés es optimizar el índice de balanceo relacionado con el ShM (β_{ShM}) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF (β_{ShF}), la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.2409862661 \quad y_{c3} = 0.00129085476 \quad t_{c3} = 0.007151151098$$

Al usar esta solución, el ShM del mecanismo se reduce un 73.61%, mientras que la ShF sólo se reduce 3.22%.

3. Ahora bien, si el interés es optimizar ambos índices de balanceo ((β_{ShF}) y (β_{ShM})) la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.130165416712609 \quad y_{c3} = 0.0500126887169449 \quad t_{c3} = 0.04$$

Esta solución reduce la ShF en un 51.19% y el ShM en un 53.31%.

En la figura 5-12 se observa el resultado de implementar esta solución.

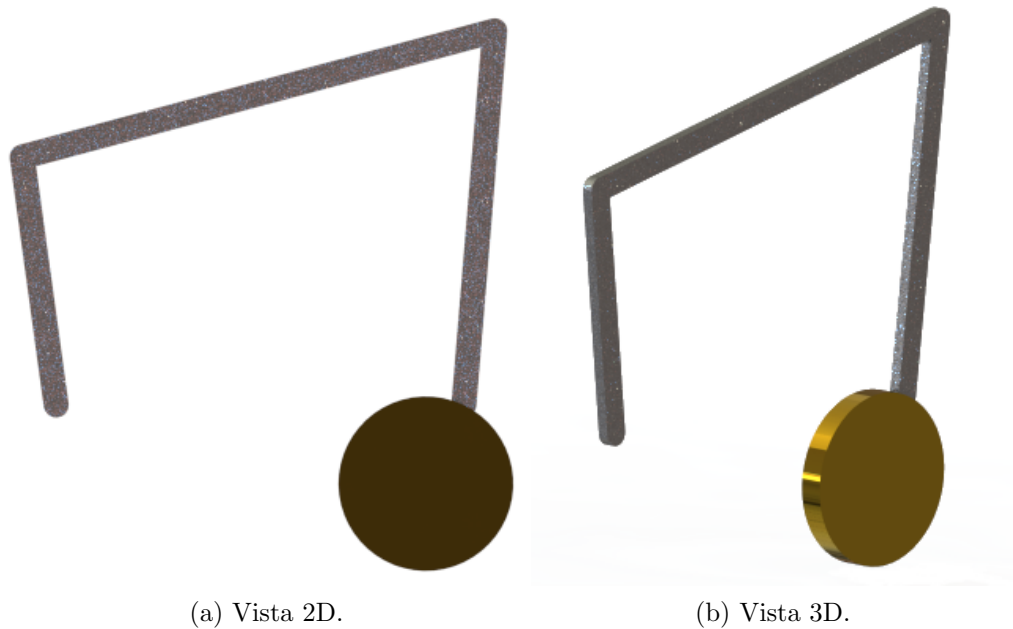


Figura 5-12.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando un contrapeso.

En la tabla **5-2** se puede observar la comparación entre los resultados de optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras utilizando tres, dos o un contrapeso, resulta claro que los mejores resultados se obtienen al utilizar tres contrapesos, sin embargo es interesante notar que al reducir el número de contrapesos y utilizar únicamente el contrapeso 3 todavía es posible mejorar el equilibrio de todo el mecanismo y reducir el costo total de la implementación.

5.5.11. Análisis de límites para la optimización del balance utilizando un contrapeso

Regresar al índice

La figura **5-13** muestra los diagramas de caja de las derivadas parciales del gradiente con respecto a cada variable x_3 , y_3 y t_3 cuando se usa sólo el tercer contrapeso. Analizando estos diagramas es posible observar que los límites de optimización para x_3 y y_3 son adecuados, pero el diagrama correspondiente a t_3 muestra que la derivada parcial del gradiente tiende a ser negativa, significando que este valor está tratando de ser aún mayor. Esto puede confirmarse observando la relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 en la figura **5-14**, donde el

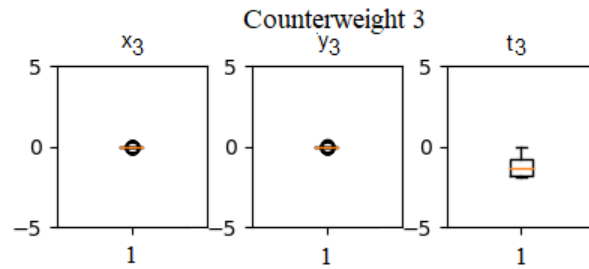


Figura 5-13.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras.

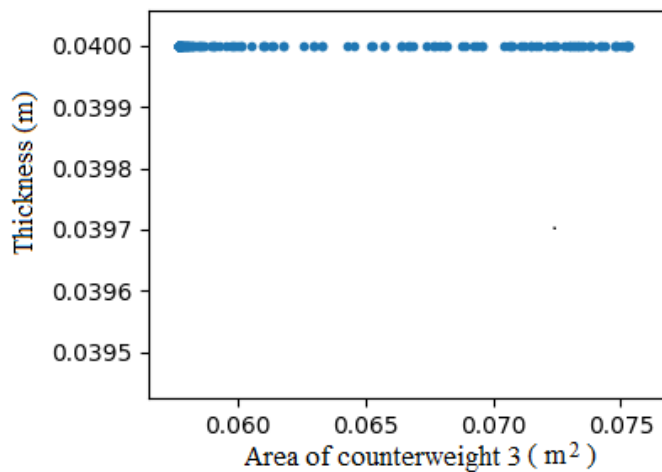


Figura 5-14.: Relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 cuando se utiliza solamente un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras

espesor en todos los casos está intentando tomar valores más altos. Entonces, si la solución se implementara usando solo un contrapeso, y si las limitaciones mecánicas lo permiten, podría ser interesante asignar un límite más alto en la restricción para la optimización de esta variable, de modo que se puedan lograr resultados aún mejores.

5.5.12. Expansión de los límites de optimización para el espesor del tercer contrapeso.

Regresar al índice

Como se demostró anteriormente, utilizando los diagramas de caja de las derivadas parciales del gradiente con respecto a cada variable, el histograma de los valores de volumen

de los contrapesos y los gráficos de la relación entre área y espesor, es posible obtener información valiosa sobre los límites elegidos para la optimización del balanceo, permitiendo de esta forma saber si sería recomendable aumentar o disminuir estas restricciones para obtener mejores resultados de optimización. La decisión de modificar los límites depende de las características mecánicas de todo el mecanismo.

Tomando el ejemplo previamente analizado de la figura **5-13** y la figura **5-14**, donde la recomendación fue elegir un límite superior para la variable correspondiente al espesor t_3 , se lleva a cabo un nuevo proceso de optimización con las restricciones (5-49).

$$\begin{aligned} -0.40m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.05m \end{aligned} \quad (5-49)$$

Es decir que el límite superior en la restricción correspondiente a t_3 se amplió de $0.04m$ a $0.05m$.

De esta forma, si de los resultados de la optimización se elige una solución, dando mayor importancia al índice de balanceo relacionado con la ShF (β_{ShF}), el contrapeso 3 resultaría de las siguientes dimensiones:

$$x_{c3} = -0.141021300369708 \quad y_{c3} = -0.00665773774579448 \quad t_{c3} = 0.0207544372440781$$

Usando estos parámetros la ShF se reduce en un 73.92 %, mientras que el ShM se reduce en un 14.32 %.

Por otro lado, cuando se da mayor importancia a la reducción del índice de balanceo relacionado con el ShM (β_{ShM}), las características físicas del contrapeso 3 serían:

$$x_{c3} = -0.1112378507983744 \quad y_{c3} = 0.091294702876245 \quad t_{c3} = 0.05$$

Usando estas dimensiones el ShM se reduce en un 80.17 % y la ShF se reduce en un 5.30 %.

La tabla **5-3** muestra una comparación entre los resultados de optimización con los límites expandidos y los límites originales. Se puede ver que al expandir el límite superior del espesor del contrapeso 3 la optimización del ShM mejora con respecto a la que se había obtenido con las restricciones originalmente propuestas. La figura **5-15** muestra la comparación de los PF antes y después de cambiar los límites de optimización. Se confirma entonces que el espesor del contrapeso 3 tiene una mayor influencia en la optimización del ShM del mecanismo, y al aumentar este límite, los resultados de optimización pueden ser mejores.

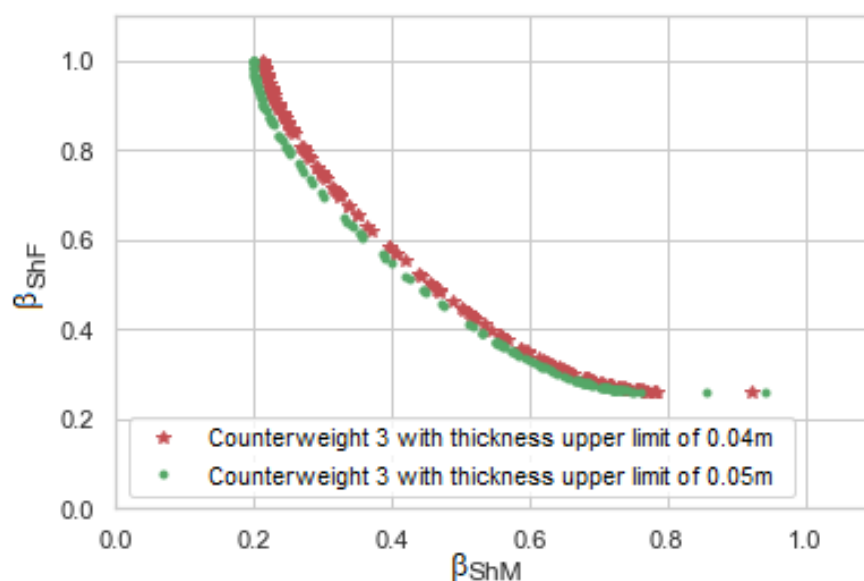


Figura 5-15.: Comparación de los PF al cambiar los límites del espesor del contrapeso 3 del mecanismo de cuatro barras.

Tabla 5-3.: Comparación entre los resultados de optimización al expandir el límite del espesor del contrapeso tres del mecanismo de cuatro barras.

		Optimización de la ShF	Optimización del ShM
Usando 0.05m como límite superior t_3	Optimización de la ShF	73.92 %	14.32 %
	Optimización del ShM	5.30 %	80.17 %
Usando 0.04m como límite superior t_3	Optimización de la ShF	78.74 %	0.42 %
	Optimización del ShM	3.22 %	73.61 %

5.6. Conclusiones

Regresar al índice

Al emplear FCC para representar el balanceo de un mecanismo, las ecuaciones que definen las reacciones resultan menos complejas que aquellas que podrían ser obtenidas utilizando otros tipo de coordenadas, por lo tanto, el uso de este tipo de coordenadas es adecuado para

llevar a cabo análisis que involucren el balanceo completo de un mecanismo, el cálculo de la ShF o del ShM, o la optimización para minimizar estas reacciones.

El uso de FCC para representar un mecanismo de cuatro barras, en conjunto con el algoritmo de PGD simplificado para optimizar el balanceo del mecanismo, demostró ser una metodología adecuada pues permite reducir la ShF y el ShM en un 99.70 % y un 28.69 % respectivamente cuando se da mayor importancia al índice de balanceo correspondiente al ShF; mientras que dando mayor importancia al índice de balanceo correspondiente al ShM permite reducir el ShM y la ShF en un 83.99 % y un 8.47 % respectivamente.

El algoritmo de optimización se aplicó con éxito para resolver el problema. El uso de la combinación lineal de funciones es una forma simple pero robusta de manejar múltiples objetivos. La aproximación de las derivadas basadas en la Diferencia Finita permite guiar en forma correcta al algoritmo.

La comparación entre los PF demostró ser una metodología adecuada para analizar la sensibilidad del balanceo del mecanismo a cada contrapeso. El uso de este método ha demostrado que incluso utilizando sólo un contrapeso, la ShF se puede reducir un 78.74 % o bien, el ShM se puede reducir hasta un 73.61 %.

Los diagramas de caja de las derivadas parciales con respecto a cada variable, los histogramas de volúmenes y las relaciones entre área y espesor permiten analizar los límites de optimización propuestos, de esta forma se puede conocer cuáles límites se podrían modificar para la obtención de mejores resultados.

En la bibliografía consultada, [36], mediante la implementación de algoritmos genéticos se logra una optimización del ShF_x del 90.96 %, una optimización del ShF_y del 77.54 % y una optimización del ShM del 76.21 %, sin embargo estos resultados se obtienen considerando una redistribución de masas, sin especificar los medios físicos que se emplearán para lograrlo. Lo mismo ocurre en [160], en donde utilizando un algoritmo Firefly, se logra una optimización del ShF_x del 96.77 %, una optimización del ShF_y del 75.84 % y una optimización del ShM del 83.39 %. Para el mecanismo que se presenta en este artículo el balanceo queda definido claramente mediante la adición de contrapesos que se encuentran directamente unidos al mecanismo original, permitiendo que la solución pueda ser implementada en forma directa.

Por otra parte [159, 162] muestran también la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras a través de un algoritmo de Evolución Diferencial, sin embargo sus resultados son presentados únicamente mediante gráficas, sin especificar porcentajes de mejora ni resultados de ShF ni de ShM, haciendo imposible establecer una comparación.

6. Análisis y optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras

Regresar al índice

6.1. Introducción

Regresar al índice

En este capítulo se presenta la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras. Este tipo de mecanismo resulta más complejo que los que se han presentado anteriormente en este trabajo, no sólo por la cantidad de elementos sino también debido a que algunos de éstos se encuentran unidos al mecanismo en más de dos puntos básicos.

Entre las principales contribuciones de este capítulo se encuentran la definición de una matriz de masas en coordenadas naturales para elementos formados por tres puntos básicos y su aplicación posterior para el análisis de un mecanismo complejo en dos dimensiones, como es el caso de un mecanismo de seis barras. Hasta donde ha sido posible indagar, la definición explícita de esta matriz no ha sido propuesta hasta el momento en la bibliografía consultada.

Adicionalmente se presenta la optimización del balanceo de un mecanismo de seis barras mediante el uso de contrapesos, para ello se comienza obteniendo la matriz de masas de cada uno de los eslabones que componen al mecanismo, por medio de las cuales se ensambla la matriz del eslabonamiento completo y se obtienen las expresiones que definen las reacciones de ShF y ShM en la base del mecanismo. Utilizando estas expresiones se define la función objetivo que se busca minimizar y se emplea un algoritmo de DE para llevar a cabo la optimización. Ésta se realiza considerando cinco, cuatro, tres, dos y un contrapeso; en cada caso se analizan los resultados numéricos, los límites de optimización y se realiza un análisis de sensibilidad que permite conocer la influencia en el balanceo de cada uno de los contrapesos

utilizados de forma tal que puede decidirse cuáles utilizar en caso de que la cantidad de contrapesos tenga que verse reducida.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 6.2 presenta el proceso para la obtención de la matriz de masas constante para elementos definidos mediante tres puntos básicos a través del uso de FCC, en la sección 6.3 se detalla el procedimiento para la obtención de las matrices de masas de cada uno de los elementos que conforman el mecanismo, así como el ensamble de la matriz de masas del mecanismo completo y la obtención de las expresiones de las reacciones en la base del mecanismo. La sección 6.4 define la función objetivo y los límites de optimización. En la sección 6.5 se describe el algoritmo de optimización propuesto. Posteriormente en la sección 6.6 se lleva a cabo el análisis numérico de un ejemplo concreto para la optimización del balanceo de un mecanismo de seis barras, y se aplican los métodos propuestos en el capítulo anterior para la reducción de los contrapesos y el análisis de los resultados. Por último en la sección 6.7 se presentan las conclusiones.

6.2. Matriz de masas en coordenadas naturales de un elemento definido por tres puntos básicos

Regresar al índice

En esta sección se presenta en forma detallada el método para obtener una matriz de masas \mathbf{M}_{3P} para elementos definidos por tres puntos básicos utilizando coordenadas naturales y basándose en el concepto de trabajo virtual.

Considere el elemento mostrado en la figura **6-1** que se encuentra definido completamente por tres puntos básicos i , j y k ; dicho elemento se encuentra ubicado en un sistema de coordenadas globales (x, y) y en un sistema de coordenadas local (\bar{x}, \bar{y}) con su origen en el punto i y el eje \bar{x} dirigido hacia el punto j .

La ubicación de un punto cualquiera P del elemento se encuentra definido por un vector r en el sistema de referencia global, y un vector \bar{r} en el sistema de coordenadas local. De esta forma r puede expresarse de acuerdo a la ecuación 6-1, en donde \mathbf{A} corresponde a la matriz de rotación.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} \quad (6-1)$$

Debido a que el elemento es rígido, la posición local del vector $\bar{\mathbf{r}}$ permanece constante sin importar el movimiento del elemento. De esta forma, la posición del punto P queda definida de acuerdo a la ecuación 6-2.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i + c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (6-2)$$

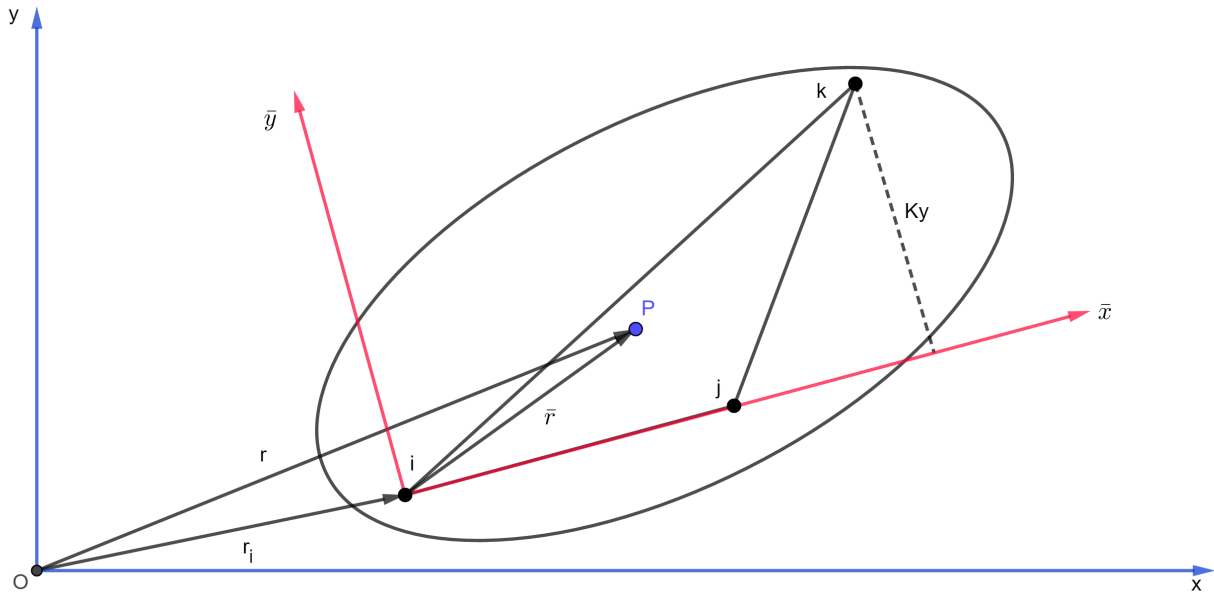


Figura 6-1.: Elemento 2D con tres puntos básicos.

En donde c_1 y c_2 son las componentes del vector $\bar{\mathbf{r}}$ en el sistema de coordenadas locales. Entonces, las componentes del vector \mathbf{r} quedan definidas de acuerdo a la ecuación 6-3, que puede ser expresada en forma matricial, tal como se muestra en la ecuación 6-4. .

$$\begin{aligned} x &= x_i + c_1(x_j - x_i) + c_2(x_k - x_i) \\ y &= y_i + c_1(y_j - y_i) + c_2(y_k - y_i) \end{aligned} \tag{6-3}$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 - c_2 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 1 - c_1 - c_2 & 0 & c_1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q} \tag{6-4}$$

En donde $\mathbf{q}^T = \{x_i \ y_i \ x_j \ y_j \ x_k \ y_k\}$ es el vector que contiene las coordenadas naturales del elemento. Es importante notar también que la matriz \mathbf{C} es constante para un punto dado P y no cambia con el movimiento del sistema, cumpliéndose entonces las ecuaciones 6-5 y 6-6.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} \tag{6-5}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} \tag{6-6}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 que definen a la matriz \mathbf{C} se pueden expresar en función de las coordenadas de los puntos i , j y k en el marco de referencia local de acuerdo con la ecuación 6-7.

$$\bar{\mathbf{r}} = c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (6-7)$$

Al encontrarse $\bar{\mathbf{r}}_i = 0$ en el origen de referencia local, la ecuación 6-7 puede expresarse como se observa en la ecuación 6-8.

$$\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{r}}_k] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c} \quad (6-8)$$

En donde el vector \mathbf{c} contiene los coeficientes c_1 y c_2 , y la matriz $\bar{\mathbf{X}}$ tiene como columnas los componentes de los vectores $\bar{\mathbf{r}}_j$ y $\bar{\mathbf{r}}_k$ (ecuación 6-9).

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{r}}_k] = \begin{bmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ij} & K_x \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

Ahora es posible definir el trabajo virtual W^* (ecuación 6-10) generado por las fuerzas de inercia.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^{*T} \ddot{\mathbf{r}} d\Omega \quad (6-10)$$

Donde ρ corresponde a la densidad del material del elemento.

Sustituyendo las ecuaciones 6-5 y 6-6 en la ecuación 6-10 el trabajo virtual queda definido de acuerdo a la ecuación 6-11.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} d\Omega \quad (6-11)$$

Y debido a que los vectores $\dot{\mathbf{q}}^{*T}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$ son independientes de Ω , éstos pueden salir de la integral, obteniéndose la ecuación 6-12.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \left(\rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (6-12)$$

Por otra parte, tomando en cuenta la definición de trabajo virtual que se plantea en [18] (ecuación 6-13) y comparándolo con la ecuación 6-12, la matriz de masas \mathbf{M} queda definida tal como se muestra en la ecuación 6-14.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (6-13)$$

$$\mathbf{M}_{3P} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \quad (6-14)$$

Y desarrollando el producto de $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ en la ecuación 6-14 se obtiene la ecuación 6-15.

$$\mathbf{M}_{3P} = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} c_e & 0 & c_f & 0 & c_g & 0 \\ 0 & c_e & 0 & c_f & 0 & c_g \\ c_f & 0 & c_h & 0 & c_i & 0 \\ 0 & c_f & 0 & c_h & 0 & c_i \\ c_g & 0 & c_i & 0 & c_j & 0 \\ 0 & c_g & 0 & c_i & 0 & c_j \end{bmatrix} d\Omega \quad (6-15)$$

En donde:

$$c_e = c_1^2 + 2c_1c_2 - 2c_1 + c_2^2 - 2c_2 + 1 \quad (6-16)$$

$$c_f = -c_1^2 - c_1c_2 + c_1 \quad (6-17)$$

$$c_g = -c_1c_2 - c_2^2 + c_2 \quad (6-18)$$

$$c_h = c_1^2 \quad (6-19)$$

$$c_i = c_1c_2 \quad (6-20)$$

$$c_j = c_2^2 \quad (6-21)$$

Note que la ecuación 6-15 involucra resolver las integrales 6-22, 6-23 y 6-24.

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = m \quad (6-22)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{c} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}} d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{ij}} & -\frac{K_x}{K_y l_{ij}} \\ 0 & \frac{1}{K_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}}{l_{ij}} - \frac{\bar{y} K_x}{K_y l_{ij}} \\ \frac{\bar{y}}{K_y} \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \frac{m \bar{x}_g}{l_{ij}} - \frac{m \bar{y}_g K_x}{K_y l_{ij}} \\ \frac{m \bar{y}_g}{K_y} \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{c} \mathbf{c}^T d\Omega = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left(\int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T d\Omega \right) \bar{\mathbf{X}}^{-T} = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left(\int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} \bar{x}^2 & \bar{x}\bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} & \bar{y}^2 \end{bmatrix} d\Omega \right) \bar{\mathbf{X}}^{-T} =$$

$$\bar{\mathbf{X}}^{-1} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} & -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} \\ -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} & \frac{I_x}{K_y^2} \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

En donde m es la masa total del elemento, $\bar{\mathbf{r}}$ representa las coordenadas locales del centro de gravedad e I_x , I_y , I_{xy} son los momentos y productos de inercia con respecto a las coordenadas locales cuyo origen se encuentra en el punto básico i .

Sustituyendo las integrales 6-22, 6-23 y 6-24 en la ecuación 6-15 se obtiene la matriz de masas \mathbf{M}_{3P} (ecuación 6-25).

$$\mathbf{M}_{3P} = \begin{bmatrix} e & 0 & f & 0 & g & 0 \\ 0 & e & 0 & f & 0 & g \\ f & 0 & h & 0 & i & 0 \\ 0 & f & 0 & h & 0 & i \\ g & 0 & i & 0 & j & 0 \\ 0 & g & 0 & i & 0 & j \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

En donde:

$$e = \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_x}{K_y^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{2I_{xy}}{K_y l_{ij}} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} + \frac{2K_x m \bar{y}_g}{K_y l_{ij}} + m - \frac{2m \bar{x}_g}{l_{ij}} - \frac{2m \bar{y}_g}{K_y} \quad (6-26)$$

$$f = -\frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} + \frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} - \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} - \frac{I_y}{l_{ij}^2} - \frac{K_x m \bar{y}_g}{K_y l_{ij}} + \frac{m \bar{x}_g}{l_{ij}} \quad (6-27)$$

$$g = \frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} - \frac{I_x}{K_y^2} - \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} + \frac{m \bar{y}_g}{K_y} \quad (6-28)$$

$$h = \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} \quad (6-29)$$

$$i = -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} \quad (6-30)$$

$$j = \frac{I_x}{K_y^2} \quad (6-31)$$

6.3. Mecanismo de seis barras

Regresar al índice

En la figura 6-2 se muestra un mecanismo de seis barras, este tipo de mecanismos con un grado de libertad se componen de cinco eslabones móviles. Cada uno de los eslabones tiene un sistema de coordenadas local con su origen ubicado en el punto i y el eje x en dirección al punto j , cada uno de ellos con una masa m_{bn} y un centro de gravedad ubicado en las coordenadas locales (x_{bn}, y_{bn}) para $1 \leq n \leq 5$. La disposición de los puntos se muestra en la tabla 6-1 y puede apreciarse también con claridad en la figura 6-3.

Para el mecanismo descrito, es posible definir un vector \mathbf{q} (ecuación 6-32) que represente las posiciones de los puntos básicos de todo el mecanismo.

$$\mathbf{q} = [A_x \ A_y \ B_x \ B_y \ C_x \ C_y \ D_x \ D_y \ E_x \ E_y \ F_x \ F_y \ G_x \ G_y]^T \quad (6-32)$$

Derivando el vector \mathbf{q} es posible obtener un nuevo vector $\dot{\mathbf{q}}$ que represente las velocidades de cada uno de los puntos básicos del mecanismo completo (ecuación 6-33).

$$\dot{\mathbf{q}} = [V_{Ax} \ V_{Ay} \ V_{Bx} \ V_{By} \ V_{Cx} \ V_{Cy} \ V_{Dx} \ V_{Dy} \ V_{Ex} \ V_{Ey} \ V_{Fx} \ V_{Fy} \ V_{Gx} \ V_{Gy}]^T \quad (6-33)$$

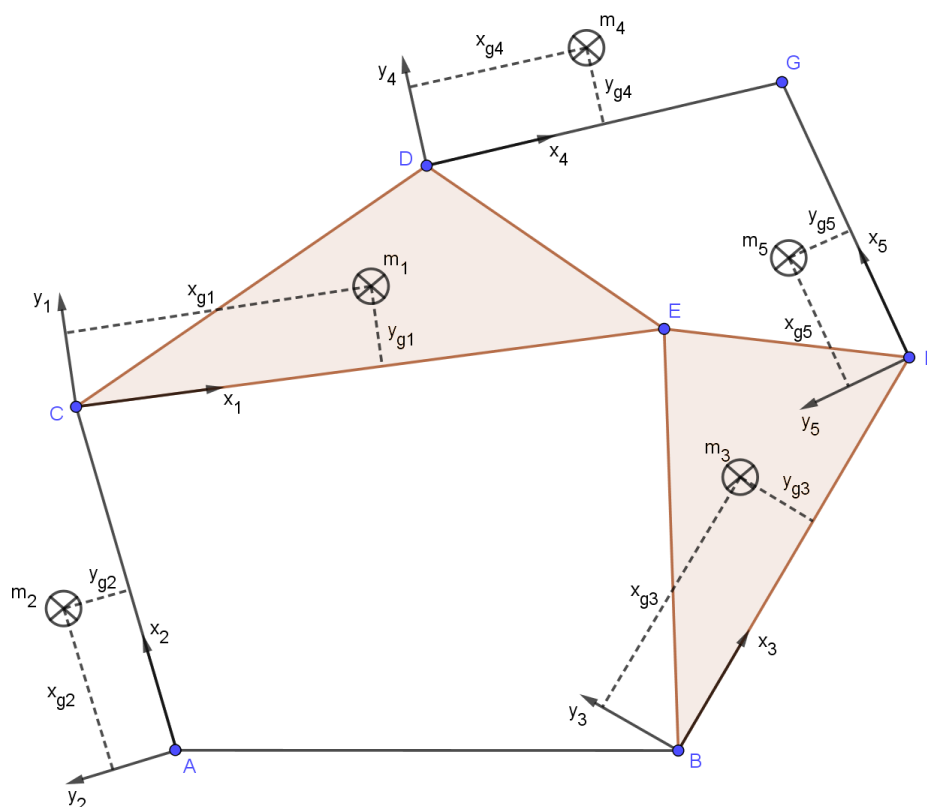


Figura 6-2.: Mecanismo de seis barras

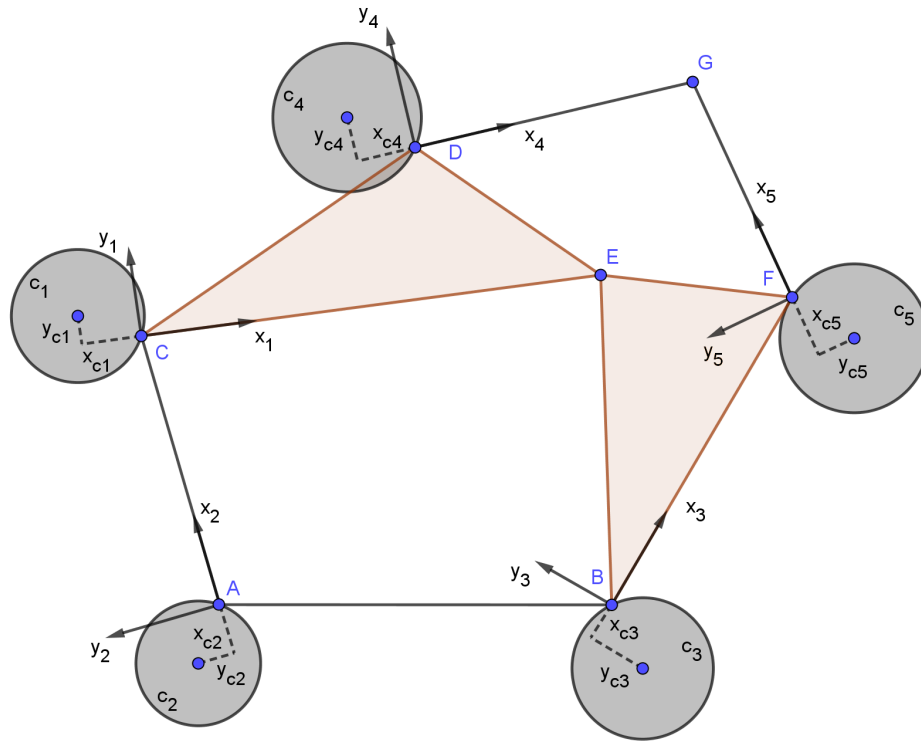


Figura 6-3.: Contrapesos para el balanceo del mecanismo de seis barras

Tabla 6-1.: Distribución de puntos para el mecanismo de seis barras

Elemento	Punto i	Punto j	Punto k
1	C	E	D
2	A	C	
3	B	F	E
4	D	G	
5	F	G	

Y al derivar nuevamente el vector de velocidades se obtiene el vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ (ecuación 6-34) de cada uno de los puntos básicos del mecanismo.

$$\ddot{\mathbf{q}} = [A_{Ax} \ A_{Ay} \ A_{Bx} \ A_{By} \ A_{Cx} \ A_{Cy} \ A_{Dx} \ A_{Dy} \ A_{Ex} \ A_{Ey} \ A_{Fx} \ A_{Fy} \ A_{Gx} \ A_{Gy}]^T \quad (6-34)$$

6.3.1. Adición de contrapesos

Regresar al índice

Debido a que se desea optimizar el balanceo dinámico del mecanismo de seis barras (es decir que se desea minimizar tanto la ShF como el ShM) utilizando únicamente contrapesos en forma de disco, se considera la adición de cinco contrapesos que se encontrarán ubicados tal como se muestra en la figura **6-3**. Con la finalidad de simplificar la ejemplificación del método que se propone, se ha supuesto que todos los contrapesos serán coincidentes con el punto básico i de cada uno de los elementos del mecanismo. El centro de gravedad de cada contrapeso se encontrará ubicado en las coordenadas locales (x_{cn}, y_{cn}) para $1 \leq n \leq 5$. Por otra parte, el espesor de cada uno de los contrapesos estará definido por t_{cn} para $1 \leq n \leq 5$.

Es posible entonces definir la masa m_{cn} de cada contrapeso en función de su densidad $\rho_{cn} = \rho$, su espesor t_{cn} , y la ubicación de su centro de masas (x_{cn}, y_{cn}) , tal como se muestra en la ecuación 6-35.

$$m_{cn} = \rho \text{ Volumen} = \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-35)$$

También es posible calcular los momentos de masa para cada uno de los contrapesos con respecto al origen del sistema de coordenadas locales mediante las ecuaciones 6-36 y 6-37.

$$I_{x_{cn}} = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + m y_{cn}^2 = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) = \frac{1}{4} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) (x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) \quad (6-36)$$

$$I_{y_{cn}} = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + m x_{cn}^2 = \frac{1}{4} m_{cn} (5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) = \frac{1}{4} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) (5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-37)$$

El momento polar de inercia de cada contrapeso $I_{z_{cn}}$ con respecto al origen del sistema de coordenadas locales puede definirse como se muestra en la ecuación 6-38.

$$I_{z_{cn}} = I_{x_{cn}} + I_{y_{cn}} = \frac{3}{2} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) = \frac{3}{2} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \quad (6-38)$$

De forma similar el producto de inercias para cada contrapeso con respecto al origen del sistema de coordenadas locales puede ser calculado mediante la ecuación 6-39.

$$I_{x_{cn}y_{cn}} = m_{cn} x_{cn} y_{cn} = \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) x_{cn} y_{cn} \quad (6-39)$$

6.3.2. Matrices de masas de elementos individuales

Regresar al índice

Es necesario entonces definir la matriz de masas para cada uno de los elementos que conforman el mecanismo. Dado que cada contrapeso se encuentra unido fijamente a su correspondiente eslabón del mecanismo original, y que la posición de éstos respecto al sistema de referencia local no cambia con el movimiento del mecanismo, es posible considerar en total cinco elementos en el mecanismo a optimizar, cada uno de ellos formado por un eslabón y un contrapeso. Observe que los elementos 1 y 3 contarán con matrices de masas formadas por 3 puntos básicos, mientras que los elementos 2, 4 y 5 tendrán sus matrices de masas formadas por 2 puntos básicos (tabla 6-1).

Para poder definir las matrices de masas de los elementos es necesario sustituir, según corresponda, los términos m , \bar{x}_g , \bar{y}_g , I_x , I_y , I_{xy} e I_z , en las ecuaciones que definen las matrices de masas tanto de dos puntos (ecuación 2-20) como de tres puntos (ecuación 6-25), considerando en cada uno de ellos el aporte tanto del eslabón como del contrapeso. De ahí que para cada elemento n se tiene:

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} = m_{bn} + \rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-40)$$

$$x_{gn} = \frac{x_{bn}m_{bn} + x_{cn}m_{cn}}{m_{bn} + m_{cn}} \quad (6-41)$$

$$y_{gn} = \frac{y_{bn}m_{bn} + y_{cn}m_{cn}}{m_{bn} + m_{cn}} \quad (6-42)$$

$$I_{xn} = I_{xbn} + I_{xcn} = I_{xbn} + \frac{1}{4}\rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) \quad (6-43)$$

$$I_{yn} = I_{ybn} + I_{ycn} = I_{ybn} + \frac{1}{4}\rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-44)$$

$$I_{xyn} = I_{xybn} + I_{xycn} = I_{xybn} + \rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)x_{cn}y_{cn} \quad (6-45)$$

$$I_{zn} = I_{zbn} + I_{zcn} = I_{xbn} + I_{ybn} + I_{xcn} + I_{ycn} \quad (6-46)$$

Matriz de masas de los elementos 1 y 3

Regresar al índice

Para la definición de los puntos básicos de un elemento formado por tres puntos, en el elemento 1 se considera el punto C como i , el punto E como j y el punto D como k . De forma similar para el elemento 3 se considera el punto B como i , el punto F como j y el punto E como k .

En la figura 6-4 se muestran las medidas para K_{x1} , K_{y1} , K_{x3} y K_{y3} , también se observa que para el elemento 1 $l_{ij} = l_1$ corresponde a la distancia \overline{CE} mientras que para el elemento 2 $l_{ij} = l_2$ corresponde a la distancia \overline{BF} .

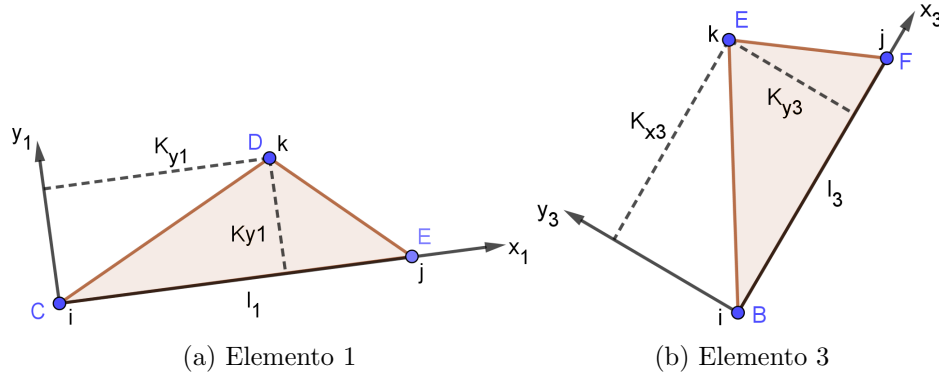


Figura 6-4.: Ubicación de las dimensiones para elementos definidos por tres puntos básicos

Utilizando la matriz de masas M_{3P} (ecuación 6-25) los términos de la matriz de masa de los elementos $n = 1$ y $n = 3$ quedan definidos de acuerdo a las ecuaciones que van de la 6-47 a la 6-52.

$$\begin{aligned}
 e_n = & \frac{I_{xbn}K_{xn}^2}{K_{yn}^2l_n^2} - \frac{2I_{xbn}K_{xn}}{K_{yn}^2l_n} + \frac{I_{xbn}}{K_{yn}^2} - \frac{2I_{xybn}K_{xn}}{K_{yn}l_n^2} + \frac{2I_{xybn}}{K_{yn}l_n} + \frac{I_{ybn}}{l_n^2} + \frac{\pi K_{xn}^2\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^4}{4K_{yn}^2l_n^2} \\
 & + \frac{3\pi K_{xn}^2\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^2y_{cn}^2}{2K_{yn}^2l_n^2} + \frac{5\pi K_{xn}^2\rho_{cn}t_{cn}y_{cn}^4}{4K_{yn}^2l_n^2} + \frac{2K_{xn}m_{bn}y_{bn}}{K_{yn}l_n} + \frac{2\pi K_{xn}\rho_{cn}}{K_{yn}l_n}t_{cn}x_{cn}^2y_{cn} \\
 & + \frac{2\pi K_{xn}\rho_{cn}}{K_{yn}l_n}t_{cn}y_{cn}^3 - \frac{2\pi K_{xn}\rho_{cn}}{K_{yn}l_n^2}t_{cn}x_{cn}^3y_{cn} - \frac{2\pi K_{xn}\rho_{cn}}{K_{yn}l_n^2}t_{cn}x_{cn}y_{cn}^3 - \frac{\pi K_{xn}\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^4}{2K_{yn}^2l_n} \\
 & - \frac{3\pi K_{xn}\rho_{cn}}{K_{yn}l_n}t_{cn}x_{cn}^2y_{cn}^2 - \frac{5\pi K_{xn}\rho_{cn}t_{cn}y_{cn}^4}{2K_{yn}^2l_n} - \frac{2m_{bn}^2x_{bn}}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2m_{bn}^2 y_{bn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{bn} x_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{bn} y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^3}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{bn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} y_{bn} y_{cn}^2}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^3}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^5}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^4 y_{cn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{4\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^3 y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{4\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^2 y_{cn}^3}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn} y_{cn}^4}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 y_{cn}^5}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} + 1 + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn}}{4l_n^2} x_{cn}^4 + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn}}{2l_n^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 \\
& + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4l_n^2} + \frac{2\pi \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 y_{cn} + \frac{2\pi \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2} + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn}}{2K_{yn}^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 \\
& + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn}}{4K_{yn}^2} y_{cn}^4
\end{aligned} \tag{6-47}$$

$$\begin{aligned}
f_n = & -\frac{I_{xbn} K_{xn}^2}{K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{I_{xbn} K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} + \frac{2I_{xybn} K_{xn}}{K_{yn} l_n^2} - \frac{I_{xybn}}{K_{yn} l_n} - \frac{I_{ybn}}{l_n^2} - \frac{\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} \\
& - \frac{3\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n^2} y_{cn}^2 - \frac{5\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{K_{xn} m_{bn} y_{bn}}{K_{yn} l_n} - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^2 y_{cn} \\
& - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3 + \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn}^3 y_{cn} + \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} \\
& + \frac{3\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n} y_{cn}^2 + \frac{5\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} + \frac{m_{bn} x_{bn}}{l_n} + \frac{\pi \rho_{cn}}{l_n} t_{cn} x_{cn}^3 + \frac{\pi \rho_{cn}}{l_n} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^2 \\
& - \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn}}{4l_n^2} x_{cn}^4 - \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn}}{2l_n^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4l_n^2} - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3
\end{aligned} \tag{6-48}$$

$$\begin{aligned}
g_n = & \frac{I_{xbn}K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} - \frac{I_{xbn}}{K_{yn}^2} - \frac{I_{xybn}}{K_{yn} l_n} + \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} + \frac{3\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n} y_{cn}^2 \\
& + \frac{5\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} + \frac{m_{bn} y_{bn}}{K_{yn}} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}}{K_{yn}} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^3}{K_{yn}} - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn} x_{cn}^3}{K_{yn} l_n} \\
& - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3}{K_{yn} l_n} - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2} - \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2K_{yn}^2} - \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2}
\end{aligned} \quad (6-49)$$

$$\begin{aligned}
h_n = & \frac{I_{xbn}K_{xn}^2}{K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{2I_{xybn}K_{xn}}{K_{yn} l_n^2} + \frac{I_{ybn}}{l_n^2} + \frac{\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{3\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n^2} y_{cn}^2 \\
& + \frac{5\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn}^3 y_{cn} - \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4l_n^2} \\
& + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2l_n^2} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4l_n^2}
\end{aligned} \quad (6-50)$$

$$\begin{aligned}
i_n = & -\frac{I_{xbn}K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} + \frac{I_{xybn}}{K_{yn} l_n} - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} - \frac{3\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n} y_{cn}^2 - \frac{5\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n} \\
& + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn} x_{cn}^3}{K_{yn} l_n} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3}{K_{yn} l_n}
\end{aligned} \quad (6-51)$$

$$j_n = \frac{I_{xbn}}{K_{yn}^2} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2} + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2K_{yn}^2} + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2} \quad (6-52)$$

Matriz de masas de los elementos 2, 4 y 5

Regresar al índice

Por otra parte, los elementos 2, 4 y 5 se encuentran definidos mediante dos puntos básicos. Para el elemento 2 se considera el punto A como i y el punto C como j ; para el elemento 4 se considera el punto D como i y el punto G como j ; mientras que para el elemento 5 se considera el punto F como i y el punto G como j . Cada uno de ellos con el origen en el punto correspondiente a i , y el eje x dirigido en dirección del punto correspondiente a j . l_n es la distancia entre los puntos i y j de cada eslabón.

Al sustituir los términos correspondientes en la matriz de masas de elementos definidos por dos puntos básicos M_{2P} (ecuación 2-20) se obtienen los términos de la matriz de masas de

cada uno de estos elementos (para $n=2,4,5$) conformados por un contrapeso y un eslabón (ecuaciones 6-53 - 6-56).

$$\begin{aligned}
 a_n = & m_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) - \frac{1}{l_n (m_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))} \\
 & (2.0m_{bn} + 2.0\pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) (m_{bn}x_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}x_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \\
 & + \frac{1}{l_n^2} \left(I_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi\rho_{cn}t_{cn}y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{6-53}$$

$$\begin{aligned}
 b_n = & \frac{1}{l_n} (m_{bn}x_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}x_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \\
 & - \frac{1}{l_n^2} \left(I_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi\rho_{cn}t_{cn}y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{6-54}$$

$$\begin{aligned}
 c_n = & \frac{1}{l_n (m_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))} (-m_{bn} - \pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \\
 & (m_{bn}y_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}y_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))
 \end{aligned} \tag{6-55}$$

$$\begin{aligned}
 d_n = & \frac{1}{l_n^2} \left(I_{bn} + \pi\rho_{cn}t_{cn}x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi\rho_{cn}t_{cn}y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi\rho_{cn}t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{6-56}$$

6.3.3. Matriz de masas del mecanismo completo

Regresar al índice

Una vez que se han definido las matrices de masas para cada uno de los elementos que conforman el mecanismo, es necesario unir toda la información en una matriz de masas general. Debido a que el mecanismo de seis barras está formado por siete puntos básicos, cada uno de ellos representado por una coordenada en x y otra en y, se tendrá una matriz de masas M formada por 14 columnas y 14 renglones.

La matriz de masas resultante que representa al mecanismo completo puede apreciarse en la ecuación 6-57.

6.3.4. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Regresar al índice

Conociendo el vector de posiciones definido en la ecuación 6-32 para cada punto básico, así como sus correspondientes velocidades (ecuación 6-33) y aceleraciones (ecuación 6-34), es posible calcular el momento lineal L asociado a todo el sistema (ecuación 6-58).

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-58)$$

Donde \mathbf{B} (ecuación 6-59) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos tiene el mecanismo, que en este caso particular son siete.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (6-59)$$

Al resolver la ecuación 6-58 y considerando que la velocidad de los puntos fijos es siempre cero ($VA_X = 0$, $VA_Y = 0$, $VB_X = 0$, $VB_Y = 0$), se obtienen las expresiones del momento lineal (\mathbf{L}_i y \mathbf{L}_j).

La ShF_i y ShF_j del mecanismo pueden calcularse derivando las ecuaciones \mathbf{L}_i y \mathbf{L}_j (ecuación 6-58) con respecto al tiempo (las ecuaciones resultantes no se incluyen en este apartado debido a su longitud, sin embargo es posible apreciarlas en el Anexo A en la forma en que son obtenidas al utilizar el lenguaje de programación Python).

Para garantizar el equilibrio del mecanismo, el resultado de estas derivadas debe ser constante (generalmente se considera cero) en el periodo de tiempo analizado.

6.3.5. Momento angular y momento de sacudimiento

Regresar al índice

Al utilizar FCC, es posible expresar el momento angular de todo el mecanismo H de la forma:

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-60)$$

Donde \mathbf{r} está dada en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema y puede ser expresada como:

$$\mathbf{r} = [-A_Y \quad A_X \quad -B_Y \quad B_X \quad -C_Y \quad C_X \quad -D_Y \quad D_X \quad -E_Y \quad E_X \quad -F_Y \quad F_X \quad -G_Y \quad G_X]^T \quad (6-61)$$

El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de H con respecto al tiempo (ecuaciones 6-62 y 6-63).

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-62)$$

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{rM}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-63)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \quad VA_X \quad -VB_Y \quad VB_X \quad -VC_Y \quad VC_X \quad -VD_Y \quad VD_X \\ -VE_Y \quad VE_X \quad -VF_Y \quad VF_X \quad -VG_Y \quad VG_X]^T \quad (6-64)$$

Para garantizar el equilibrio dinámico del mecanismo, el ShM debe ser constante, es decir que la derivada de H con respecto del tiempo (ecuación 6-63) debe dar por resultado cero.

Al resolver la ecuación 6-63 y considerar $VA_X = 0$, $VA_Y = 0$, $VB_X = 0$ y $VB_Y = 0$, se obtiene el ShM del mecanismo completo. (Esta ecuación no ha sido incluida aquí debido a su longitud, sin embargo puede apreciarse en el Anexo A tal como se obtiene al utilizar el lenguaje de programación Python).

6.4. Función objetivo y límites de optimización

Regresar al índice

Para definir la función objetivo sobre la cual se llevará a cabo el proceso de optimización, se emplean dos índices adimensionales β_i , al igual que se hizo en los capítulos anteriores.

El primero de estos índices β_{ShF} (ecuación 6-65) está definido por el valor RMS de la reacción ShF del mecanismo optimizado ($rms(^oShF)$) con respecto al valor RMS de la reacción del mecanismo original ($rms(ShF)$), ambos considerados durante un periodo de tiempo T.

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^oShF)}{rms(ShF)} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (6-65)$$

El segundo de los índices de balanceo β_{ShM} (ecuación 6-66) puede ser calculado de una manera similar al primero pero considerando ahora la reacción provocada por el ShM.

$$\beta_{ShM} = \frac{\sum_{k=1}^N ^oShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2} \quad (6-66)$$

Donde oShM es el momento de sacudimiento del mecanismo optimizado (es decir cuando se consideran los contrapesos agregados para lograr el balanceo) y ShM es una constante y representa el momento de sacudimiento del mecanismo sin balancear.

Nuevamente se presenta un problema de optimización multiobjetivo, debido a que se desea minimizar tanto β_{ShF} como β_{ShM} considerando los límites de las variables (es decir los límites físicos para las ubicaciones de los centros de masas (x_{cn} y y_{cn}) y el espesor (t_{cn}) de cada contrapeso). Para resolverlo se realiza una combinación lineal de objetivos, de acuerdo a la ecuación 6-67.

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (6-67)$$

Donde γ es un valor escalar que da importancia a cada objetivo de la optimización.

Las 15 variables a optimizar son: $x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}, x_{c4}, y_{c4}, t_{c4}, x_{c5}, y_{c5}$ y t_{c5} . Los límites de la optimización quedan definidos de acuerdo las desigualdades 6-68.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (6-68)$$

6.5. Algoritmo de optimización

Regresar al índice

Se implementa entonces el algoritmo de DE que se explicó a detalle en a sección de Fundamentos, sin embargo en esta ocasión el algoritmo definido en la librería Scipy de Python no resultó eficiente para llegar a los mínimos locales debido a que era demasiado lenta, es por ello que el algoritmo fue programado en su totalidad tal como se presenta en el algoritmo 3.

Algoritmo 3: Evolución diferencial**Input** : $N = 255$, $F = 0.8$, $CR = 0.7$, $k_{max} = 100$

```

1 Se genera una población inicial aleatoria  $S = \{X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}\}$ 
2  $X_{best}$  = individuo con el menor valor en la función objetivo
3 for  $k = 0$  until  $k_{max}$  do
4    $Q = \{\}$ 
5   for  $i = 1$  until  $N$  do
6     Se seleccionan 3 individuos aleatorios en  $S$   $\gamma, \delta, \eta \in \{1, \dots, N\}, \gamma \neq \delta \neq \eta \neq i$ 
7      $\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k})$ 
8      $\hat{X}_{ik} = Clip(\hat{X}_{ik})$ 
9     for  $j = 1$  until  $D$  do
10       $R =$  Valor aleatorio de una distribución uniforme entre 0 y 1
11      if  $R \leq CR$  then
12         $Y_{ikj} = \hat{X}_{ikj}$ 
13      else
14         $Y_{ikj} = X_{ikj}$ 
15      end
16    end
17    if  $f(Y_{ik}) < f(X_{ik})$  then
18       $Q = Q \cup Y_{ik}$ 
19    else
20       $Q = Q \cup X_{ik}$ 
21    end
22    If  $f(Y_{ik}) < f(X_{best})$  then  $X_{best} = Y_{ik}$ 
23  end
24   $S = Q$ 
25   $k = k + 1$ 
26 end
27 return  $X_{best}$ 

```

Con la finalidad de aplicar el algoritmo de DE, y dado que el número de variables a optimizar es igual a 15, se crea una población de $N = 15(15) = 225$ individuos, identificando al n_{esimo} individuo de la generación k con el vector X_{Nk} . Los individuos se inicializan siguiendo una distribución uniforme acotada por límites entre los rangos permitidos para cada una de las variables. Se seleccionan entonces tres individuos para llevar a cabo la mutación aleatoria: $X_{\gamma k}$, $X_{\delta k}$ y $X_{\eta k}$ para generar un nuevo individuo: $\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k})$ siendo F un valor aleatorio entre 0 y 2.

La cruce se realiza tomando en cuenta la probabilidad CR que en este caso fue del 70% ($CR=0.7$). Entonces Y_{ik} y X_{ik} son evaluados en la función a optimizar y, para formar parte de la nueva generación, se elige a aquel con el que se obtienen mejores resultados. Las generaciones se repiten 100 veces, entregándose al final al individuo que presentó el menor valor al ser evaluado en la función objetivo.

6.6. Ejemplo numérico

Regresar al índice

Esta sección presenta un análisis numérico para la optimización del balanceo completo de un mecanismo de seis barras (Figura 6-5), también se lleva a cabo el análisis de los PF presentado tanto en el capítulo anterior, como en [173], para la obtención de información sobre la influencia de cada uno de los contrapesos en relación al balanceo dinámico del mecanismo, lo cual permite tomar decisiones en caso de que resulte necesario disminuir la cantidad de contrapesos a utilizar y lograr aún así resultados óptimos.

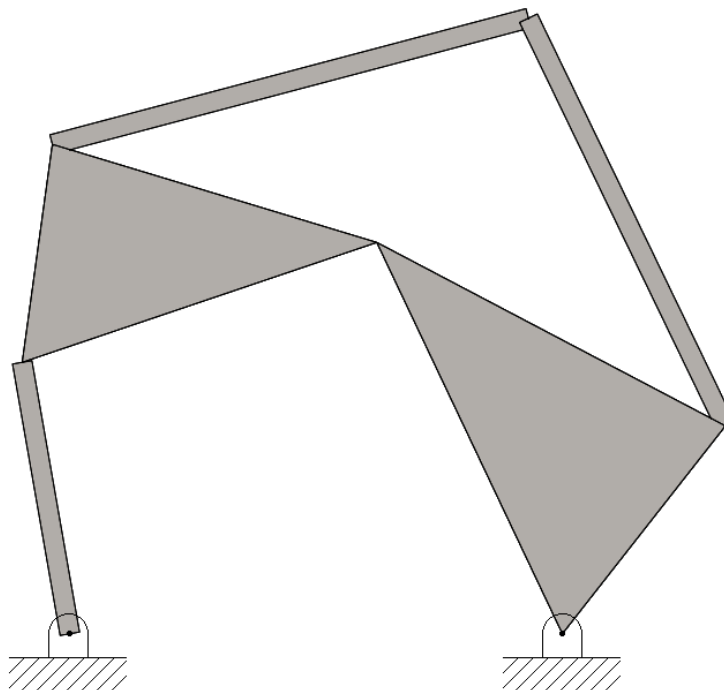


Figura 6-5.: Mecanismo de seis barras empleado para el ejemplo numérico.

6.6.1. Características mecánicas y límites de optimización

Regresar al índice

La tabla **6-2** presenta los parámetros físicos de cada uno de los elementos de un mecanismo de seis barras (figura **6-5**) (Los parámetros que se indican con un ‘-’ no son necesarios para el estudio que se está llevando a cabo). El material empleado para los eslabones es acero, con una densidad de $7800kg/m^3$. Los contrapesos son considerados de latón con una densidad (ρ_{cn}) de $8500kg/m^3$.

El mecanismo se mueve mediante un motor colocado en el punto A, girando a una velocidad constante de $500rpm$. Empleando cinemática directa es posible obtener una muestra de las posiciones, velocidades y aceleraciones correspondientes a cada uno de los puntos básicos considerados en el mecanismo de seis barras.

Al reemplazar todos los parámetros conocidos en las ecuaciones de los índices de balanceo (ecuaciones 6-65 y 6-66) es posible formular la función objetivo (ecuación 6-67). Para este ejemplo numérico, de acuerdo con las características mecánicas del mecanismo, los límites considerados para la optimización se muestran en las desigualdades 6-69.

$$\begin{aligned} -0.16m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.16m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m \end{aligned} \tag{6-69}$$

6.6.2. Cinco contrapesos

Regresar al índice

Optimización utilizando cinco contrapesos

Regresar al índice

Para la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras se utilizó el algoritmo de DE. El algoritmo de optimización se ejecuta hasta obtener 200 soluciones válidas (las soluciones válidas son aquellas en que el resultado de la optimización de la función objetivo se encuentran entre 0 y 1), tomando γ como un valor aleatorio de una distribución uniforme en el rango de (0,1), siguiendo la búsqueda aleatoria de los hiper-parámetros presentados en [164].

Tabla 6-2.: Parámetros de cada eslabón de un mecanismo de seis barras

Cuerpo n	1	2	3	4	5
Masa m_{b_n} [kg]	0.6935	0.1022	0.9636	0.1825	0.1679
Longitud l_n [m]	0.19	0.14	0.13416408	0.25	0.23
Inercia I_{xb_n} [kgm/s ²]	0.00116161	-	0.00622646	-	-
Inercia I_{yb_n} [kgm/s ²]	0.00556534	-	0.00657336	-	-
Inercia I_{zb_n} [kgm/s ²]	-	0.00066856	-	0.00380360	0.00296204
Inercia I_{xyb_n} [kgm/s ²]	0.00167596	-	0.00522914	-	-
Centro de masa x_{b_n} [m]	0.08	0.07	0.07751702	0.125	0.115
Centro de masa y_{b_n} [m]	0.03333333	0.0	0.06559133	0.0	0.0
K_x [m]	0.05	-	0.09838699	-	-
K_y [m]	0.1	-	0.196677398	-	-

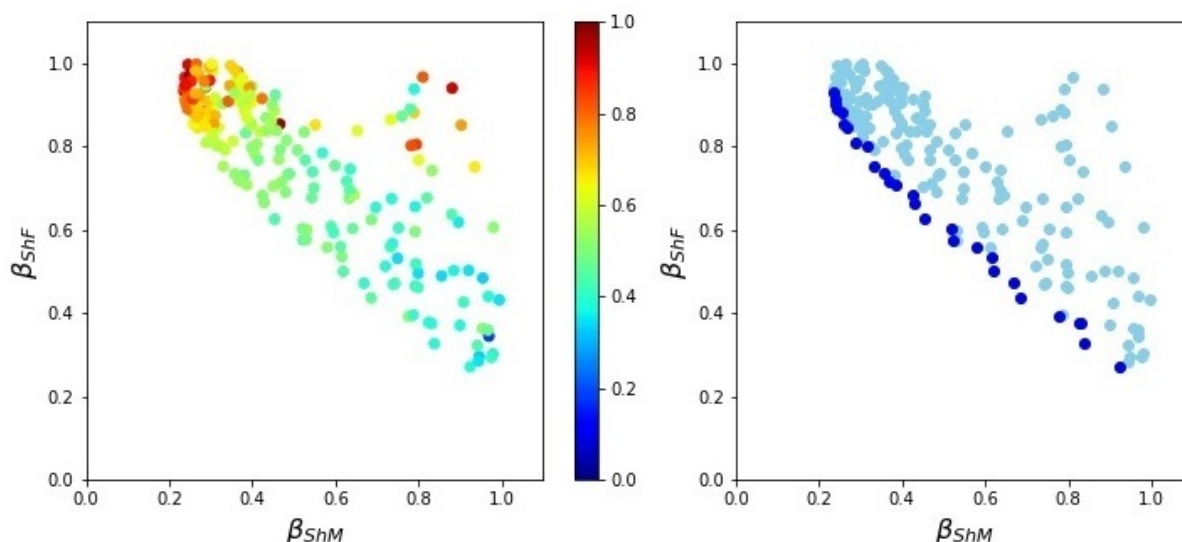


Figura 6-6.: Análisis del PF de objetivos optimizados de β_{ShM} y β_{ShF} para el mecanismo de seis barras.

En la figura 6-6(a) se muestra la relación entre los valores de β_{ShF} y β_{ShM} de las soluciones obtenidas de la optimización. La diferencia en los colores se emplea para identificar los valores utilizados para γ en la función objetivo $F(X)$ (ecuación 6-67).

En la figura 6-6(b) los puntos de color azul claro representan a las soluciones dominadas, mientras que los puntos azul oscuro muestran el PF, es decir las soluciones dominantes.

Análisis de resultados numéricos utilizando cinco contrapesos

Regresar al índice

Dentro de las soluciones encontradas en el PF, es posible seleccionar la más apropiada de acuerdo con el tipo de balanceo que se desea llevar a cabo. Para ejemplificar esta afirmación, se toman tres soluciones diferentes del PF, la primera es aquella en que se le da más importancia al balanceo del ShM ($\beta_{ShM} = 0.235917108$, $\beta_{ShF} = 0.932850297$), la segunda es cuando se le da más importancia al balanceo de la ShF ($\beta_{ShM} = 0.924195224$, $\beta_{ShF} = 0.270900009$) y la tercera es cuando se da la misma importancia al balanceo de la ShF y del ShM de forma que ambos quedan optimizados cerca del 40 % ($\beta_{ShM} = 0.580111266$, $\beta_{ShF} = 0.558041831$). A continuación se analizarán con más detalle dichas soluciones.

1. La primera solución seleccionada, es aquella en la que se le da mayor importancia al balanceo del ShM al elegir el valor mínimo en el índice β_{ShM} ($\beta_{ShM} = 0.235917108$)

obteniendo una mejora de poco más del 76.4%, sin darle mayor importancia a la mejora del balanceo del ShF, siendo $\beta_{ShF} = 0.932850297$, es decir con una mejora de apenas el 6.72%. Estos valores se obtienen al considerar los siguientes resultados en las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.02611622 & y_{c1} = -0.033186164 & t_{c1} = 0.021370695 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.012314794 & t_{c2} = 0.039459546 \\
 x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.016752092 & t_{c3} = 0.039814955 \\
 x_{c4} = -0.002045161 & y_{c4} = -0.000151565 & t_{c4} = 0.005 \\
 x_{c5} = 0.001614171 & y_{c5} = 0.00639164 & t_{c5} = 0.005106848
 \end{array}$$

2. La segunda solución seleccionada en el PF, es aquella con el mínimo valor en el índice de balanceo β_{ShF} ($\beta_{ShF} = 0.270900009$), es decir que se logra mejorar un 72.91% el balanceo de la ShF del mecanismo. Para esta elección no se da importancia al valor del índice de balanceo β_{ShM} ($\beta_{ShM} = 0.924195224$) que únicamente mejora un 7.58%. Esto corresponde a los siguientes valores de las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.049437705 & y_{c1} = -0.04279353 & t_{c1} = 0.0074319 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.001485936 & t_{c2} = 0.038953174 \\
 x_{c3} = -0.050813691 & y_{c3} = -0.017724236 & t_{c3} = 0.039660979 \\
 x_{c4} = 0.001669535 & y_{c4} = 0.005996916 & t_{c4} = 0.005 \\
 x_{c5} = 0.000387207 & y_{c5} = 0.013090811 & t_{c5} = 0.005
 \end{array}$$

3. La tercera solución seleccionada dentro del PF, es aquella donde se busca optimizar al máximo tanto la ShF como el ShM, de ahí que los índices de balanceo seleccionados son aquellos en que se logran optimizar ambos un poco más del 40% ($\beta_{ShM} = 0.580111266$, $\beta_{ShF} = 0.558041831$). Esto corresponde a los siguientes valores en las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.06 & y_{c1} = -0.030069707 & t_{c1} = 0.006021448 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.00383543 & t_{c2} = 0.04 \\
 x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.004650961 & t_{c3} = 0.028206906 \\
 x_{c4} = 0.000606455 & y_{c4} = -0.001322538 & t_{c4} = 0.005416754 \\
 x_{c5} = 0.000545683 & y_{c5} = -0.0000185 & t_{c5} = 0.005
 \end{array}$$

De esta forma el ShM se reduce en un 41.99%, mientras que la ShF se reduce en un 44.2%.

El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-7. Es importante destacar que los contrapesos cuatro y cinco no se alcanzan a apreciar debido a que son muy pequeños en relación al mecanismo.

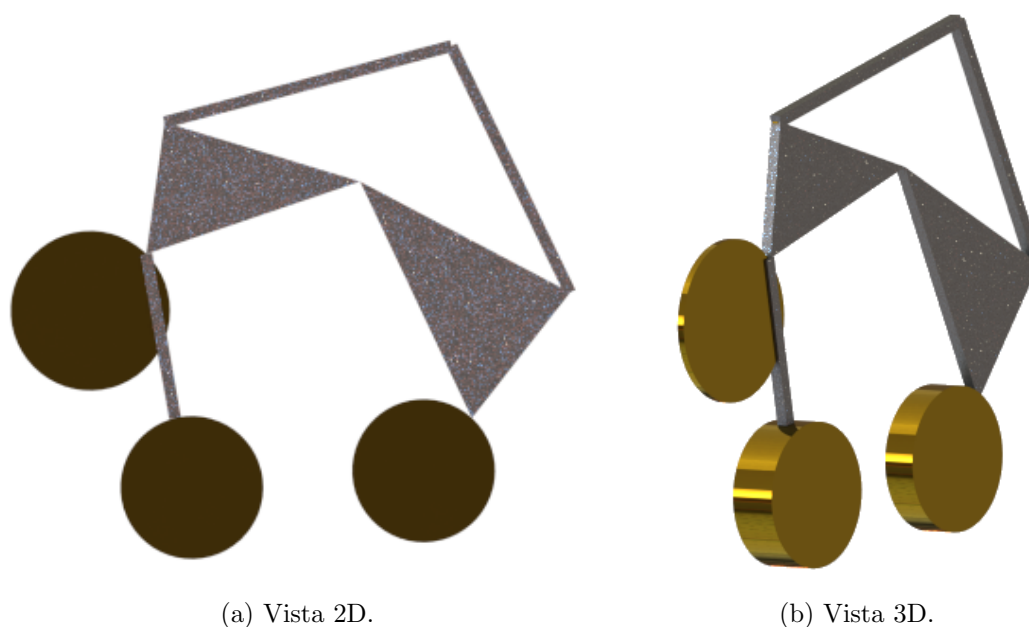


Figura 6-7.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cinco contrapesos.

Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando cinco contrapesos

Regresar al índice

Se presenta ahora un análisis que permite determinar la conveniencia de los límites propuestos para la optimización, o bien si éstos deberían ser modificados (siempre y cuando exista esa posibilidad tomando en cuenta las restricciones físicas del mecanismo y el espacio en torno a él).

En la figura 6-8 se muestran los diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada una de las variables a optimizar x_n, y_n y t_n para cada uno de los n contrapesos ($1 \leq n \leq 5$), al ser evaluadas en las soluciones óptimas.

Se sabe que la selección de límites fue óptima cuando los valores de las derivadas parciales de la función objetivo (al ser evaluados con los valores resultantes de la optimización) son cercanos a cero. En los diagramas de caja de la figura 6-8 se puede observar que las derivadas parciales de las variables $x_1, y_1, y_2, y_3, x_4, y_4, t_4, x_5, y_5$ y t_5 se encuentran muy cercanos a cero, esto quiere decir que los límites propuestos para la optimización permiten a estas variables alcanzar sus valores óptimos.

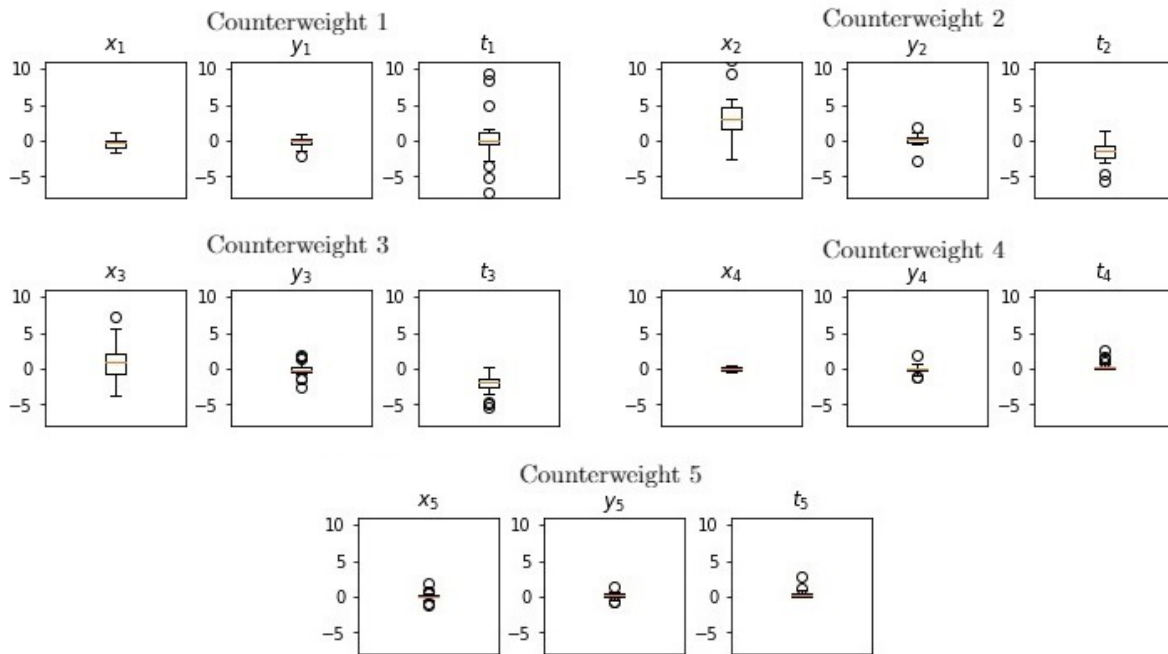
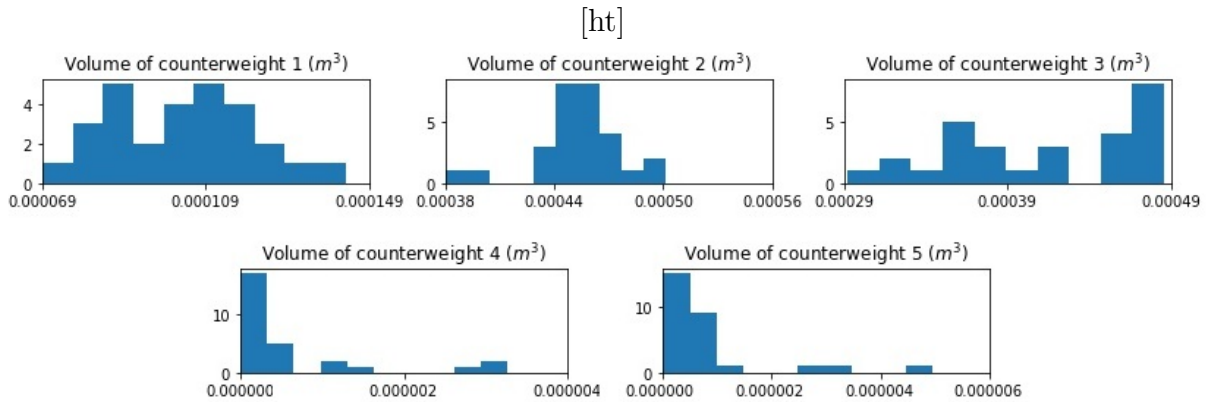


Figura 6-8.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.

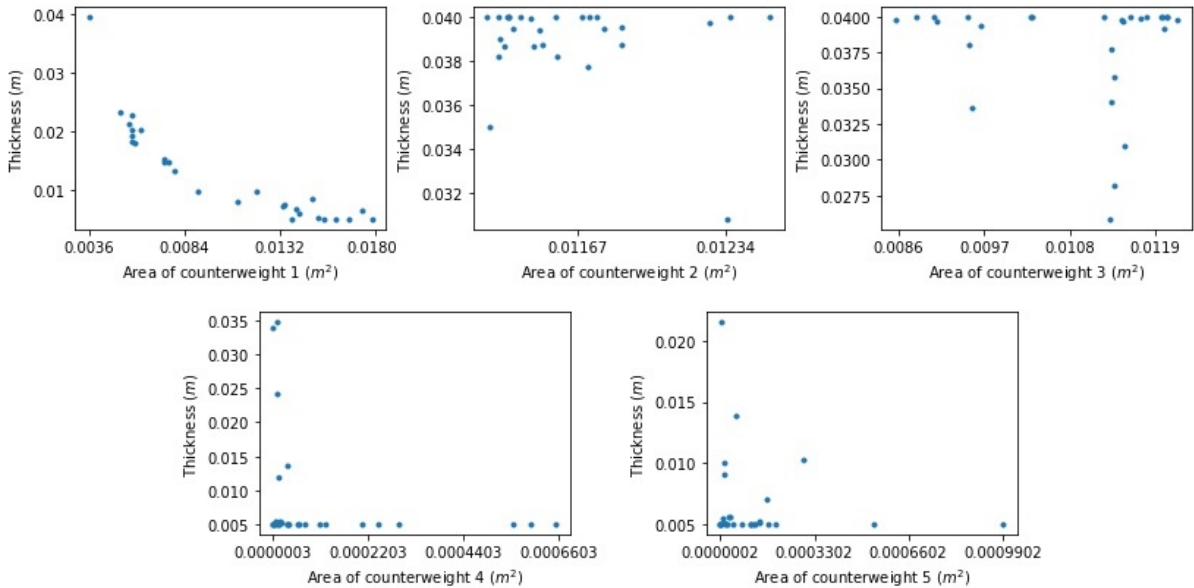
Sin embargo, las variables t_1 , x_2 , t_2 , x_3 , y t_3 tienen valores de derivadas parciales que se alejan del cero. En t_1 y aún más significativamente en x_2 y x_3 los valores tienden a ser mayores que cero, de ahí que se puede deducir que si el espesor del contrapeso 1 fuese menor que el límite permitido de $0.005m$ (lo cual evidentemente haría que este contrapeso tendiese a desaparecer) o si la posición en el eje local x de los contrapesos 1 y 3 fuesen menores al límite de $-0.16m$ (en otras palabras, si estos centros de masa tuviesen la posibilidad de alejarse más en la dirección de $-x$ de cada sistema de coordenadas local correspondiente), podrían obtenerse mejores resultados de optimización.

Por otra parte, los valores de las derivadas parciales de las variables t_2 y t_3 tienden a ser menores que cero, esto significa que, en caso de que fuese posible, sería conveniente ampliar los límites de la optimización de estas variables, permitiéndoles alcanzar valores mayores a $0.04m$.

Obsérvese que la información que se obtiene a partir del análisis de las derivadas parciales de la función objetivo resulta de suma utilidad para tomar decisiones referentes a los límites de la optimización realizando los cambios pertinentes en la medida en que las condiciones mecánicas del eslabonamiento lo permitan.



(a) Volúmenes de los contrapesos al utilizar cinco de ellos.



(b) Relación área-espesor de cada contrapeso al utilizar cinco de ellos.

Figura 6-9.: Análisis de dimensiones cuando se utilizan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.

En la figura 6-9(a), se muestran los histogramas correspondientes al volumen de los contrapesos obtenidos en los diferentes resultados de la optimización. A través del análisis de estos histogramas, en conjunto con la relación que existe entre el área y el espesor de los contrapesos y que se presenta en la figura 6-9(b), es posible apreciar que el contrapeso 4 presenta un volumen muy pequeño en comparación con los otros contrapesos, al tiempo que tanto su espesor y su área tienden a hacerlo desaparecer de la solución.

Por otra parte, tanto para el contrapeso 2 como para el contrapeso 3, es posible apreciar que,

en la mayoría de los casos, el espesor tiende a mantenerse en el límite superior propuesto para la optimización, de esta forma se confirma la información que anteriormente se había presentado mediante el análisis de las derivadas parciales, de la cuál se concluye que, en caso de que las características mecánicas del mecanismo lo permitan, sería recomendable ampliar el límite superior de estos espesores.

6.6.3. Cuatro contrapesos

Regresar al índice

Análisis de sensibilidad y reducción a cuatro contrapesos

Regresar al índice

Cuando lo que se busca es una solución simple, que no implique agregar mucho volumen al mecanismo, puede resultar útil el disminuir el número de contrapesos a utilizar, siempre que aún así se obtengan resultados aceptables. Esta es la razón por la cual se presenta un análisis que permite reducir la cantidad de contrapesos. También se comparan los resultados obtenidos en cuanto a balanceo se refiere.

La figura **6-10** muestra el PF de los resultados de la optimización al momento de utilizar únicamente cuatro contrapesos. En esta gráfica es posible apreciar que los mejores resultados son aquellos que se muestran como círculos de color negro y que corresponden al uso de los contrapesos 1, 2, 3 y 5, de ahí que es sencillo concluir que en caso de que resulte necesario quitar alguno de ellos, el contrapeso 4 es el que menos valor aporta en términos de la optimización del balanceo y sería el que podría descartarse obteniendo aún así buenos resultados.

Análisis de resultados numéricos usando cuatro contrapesos

Regresar al índice

Se seleccionan entonces tres soluciones del PF en el que se emplean los contrapesos 1, 2, 3 y 5 para analizar los resultados numéricos de esta optimización del balanceo del mecanismo. Las soluciones seleccionadas son:

1. Cuando el interés de la optimización se centra en obtener el mejor índice de balanceo

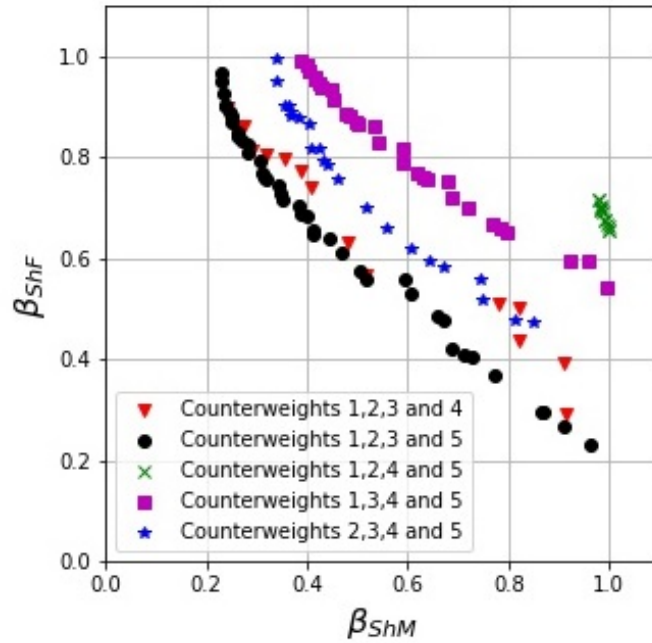


Figura 6-10.: Comparación de los PF al utilizar cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.

de la ShF (β_{ShF}) sin dar mayor importancia al índice de balanceo relacionado con el ShM (β_{ShM}) se seleccionó la solución correspondiente a $\beta_{ShM} = 0.964063418$, $\beta_{ShF} = 0.231779476$ que corresponde a los valores:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.05373192 & y_{c1} = -0.055179568 & t_{c1} = 0.005 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.002749591 & t_{c2} = 0.04 \\ x_{c3} = -0.049643529 & y_{c3} = -0.018178134 & t_{c3} = 0.04 \\ x_{c5} = -0.002193667 & y_{c5} = 0.0000473 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

De esta forma, la ShF se reduce en un 76.82%, en tanto que el ShM se mantiene casi igual al mejorar únicamente un 3.59%.

- Ahora bien, si el principal interés consiste en la optimización del índice de balanceo relacionado con el ShM (β_{ShM}), sin que resulte importante el índice de balanceo correspondiente a la ShF (β_{ShF}), la solución seleccionada corresponde a: $\beta_{ShM} = 0.230308853$, $\beta_{ShF} = 0.967923363$, que se obtiene con los valores:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.024197395 & y_{c1} = -0.024018626 & t_{c1} = 0.03996544 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.026305951 & t_{c2} = 0.03932483 \\ x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.016411778 & t_{c3} = 0.04 \\ x_{c5} = 0.0000757 & y_{c5} = 0.000391453 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

De esta forma, el ShM se reduce en un 76.97 %, en tanto que el ShF se reduce únicamente un 3.21 %.

3. Por último se considera una solución en la que el interés se centra en mejorar al máximo tanto el índice correspondiente a la ShF (β_{ShF}) como el índice correspondiente al ShM (β_{ShM}). Se elige entonces la solución $\beta_{ShM} = 0.592785455$, $\beta_{ShF} = 0.556914597$ que corresponde a:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.047312953 & y_{c1} = -0.041770683 & t_{c1} = 0.006285924 \\ x_{c2} = -0.057233104 & y_{c2} = 0.002639652 & t_{c2} = 0.038826165 \\ x_{c3} = -0.059227088 & y_{c3} = -0.001313544 & t_{c3} = 0.032663063 \\ x_{c5} = 0.006301103 & y_{c5} = -0.002793075 & t_{c5} = 0.009377553 \end{array}$$

Con ello se reduce la ShF en un 44.31 % mientras que el ShM se reduce un 40.73 %. El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-11.

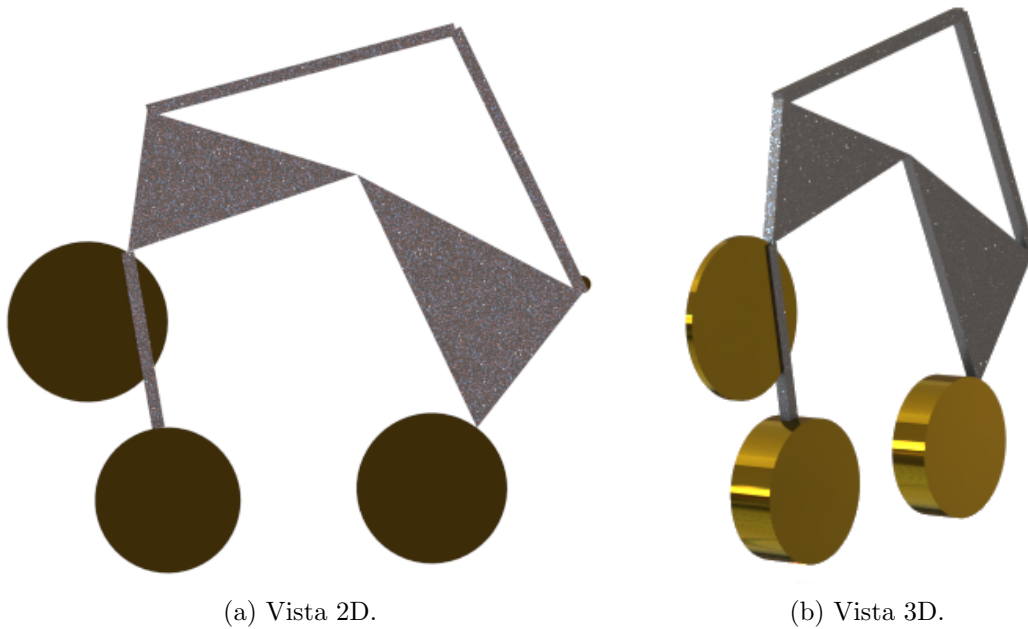


Figura 6-11.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cuatro contrapesos.

Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando cuatro contrapesos

Regresar al índice

La figura 6-12 muestra el diagrama de caja de los valores obtenidos al evaluar las derivadas parciales de la función objetivo en las soluciones que se encuentran en el PF al utilizar cuatro contrapesos. Se aprecia claramente que los valores de las variables $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, x_5, y_5, t_1$ y t_5 se encuentran muy cercanos a cero, es decir los límites que se seleccionaron para ellos fueron adecuados. Por otra parte t_2 , y t_3 toman valores negativos, es decir que estas variables están tratando de sobrepasar el límite superior asignado para la optimización, de forma que si las características físicas del mecanismo lo permiten se podrían obtener mejores resultados al ampliar esos límites. En forma contraria x_2 tiene valores por encima de cero, indicando así que dicho contrapeso está tratando de mover su centro de masas al extremo negativo del eje x, de forma que ese límite pudiera ampliarse para obtener mejores resultados de la optimización.

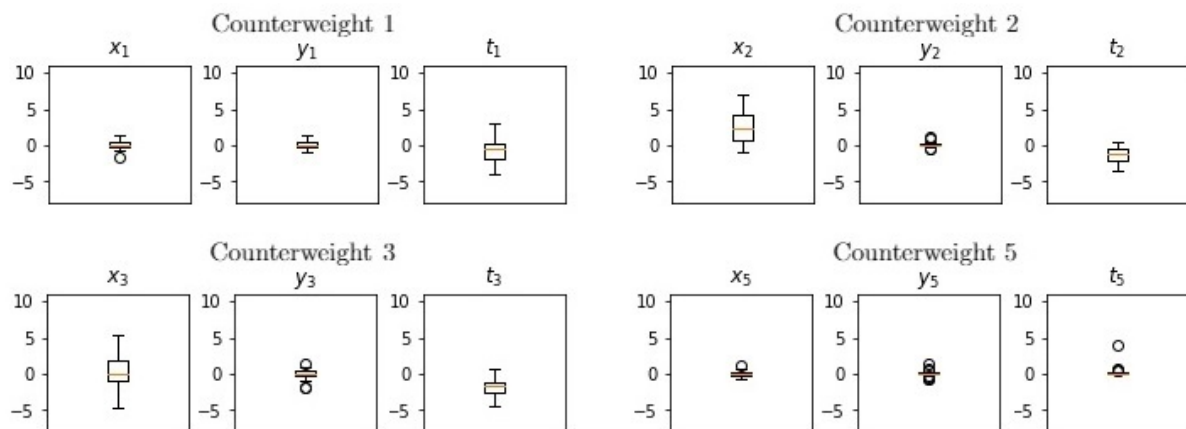


Figura 6-12.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.

Para confirmar este análisis se muestra la figura 6-13 en donde se aprecia con claridad tanto el contrapeso 2, como el contrapeso 3 están llegando al límite máximo en el espesor permitido.

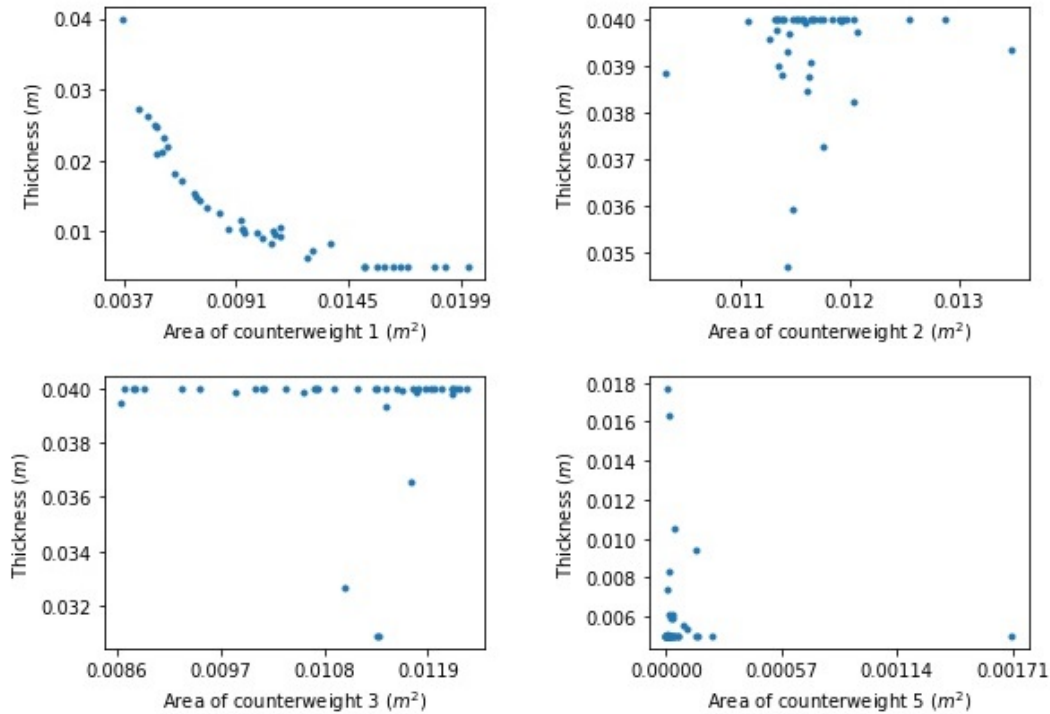


Figura 6-13.: Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan cuatro de ellos en el mecanismo de seis barras.

6.6.4. Tres contrapesos

Regresar al índice

Análisis de sensibilidad y reducción a tres contrapesos

Regresar al índice

La figura **6-14** muestra los PF de los diferentes resultados al ejecutar la optimización con las posibles combinaciones de tres contrapesos (partiendo de los cuatro contrapesos empleados en la sección anterior). Se puede apreciar con claridad que la mejor combinación de contrapesos es aquella que emplea el 1, 2 y 3, de forma que si se desea eliminar algún contrapeso para simplificar la implementación de la solución, el contrapeso 5 sería el indicado.

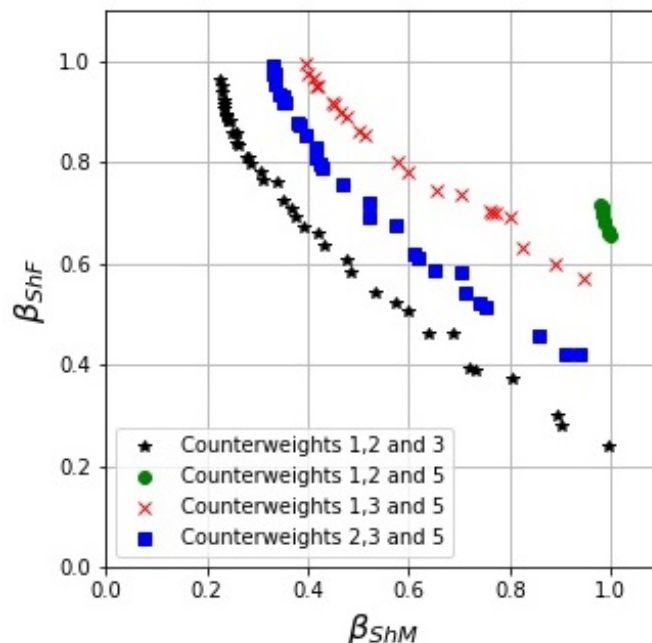


Figura 6-14.: Comparación de los PF al utilizar tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.

Análisis de resultados numéricos utilizando tres contrapesos

Regresar al índice

Considerando entonces los contrapesos 1, 2 y 3, se seleccionan tres soluciones del PF:

1. Si el principal interés al llevar a cabo la optimización es disminuir la ShF (β_{ShF}) sin dar importancia al índice correspondiente al ShM (β_{ShM}) se elige el punto correspondiente a $\beta_{ShM} = 0.995073461$ y $\beta_{ShF} = 0.240535298$. Esto corresponde a:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.06 & y_{c1} = -0.03654815 & t_{c1} = 0.005 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = 0.003971668 & t_{c2} = 0.035715217 \\
 x_{c3} = -0.045701296 & y_{c3} = -0.02341583 & t_{c3} = 0.039505677
 \end{array}$$

Al elegir esta solución, la ShF se reduce en un 75.95 % en tanto que el ShM permanece prácticamente igual pues únicamente tiene una reducción del 0.5 %.

2. Ahora bien, si el interés de la optimización se centra en disminuir el ShM (correspondiente al índice de balanceo β_{ShM}) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF (β_{ShF}) el punto seleccionado del PF corresponde a $\beta_{ShM} = 0.227925011$ y $\beta_{ShF} = 0.964776117$, que corresponde a la solución:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.022515602 & y_{c1} = -0.027032217 & t_{c1} = 0.039999753 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.019318019 & t_{c2} = 0.04 \\
 x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.017717884 & t_{c3} = 0.04
 \end{array}$$

De esta forma el ShM puede reducirse en un 77.21 %, mientras que la ShF presenta una reducción del 3.53 %.

3. Por último, si el interés de la optimización se centra en mejorar tanto el ShM como la ShF, se selecciona el punto correspondiente a $\beta_{ShM} = 0.53194653$ y $\beta_{ShF} = 0.54317393$, esto es:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.032408454 & y_{c1} = -0.038103249 & t_{c1} = 0.013443643 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.005068874 & t_{c2} = 0.039961272 \\
 x_{c3} = -0.054795122 & y_{c3} = 0.000427596 & t_{c3} = 0.04
 \end{array}$$

Con esta solución la ShF presenta una reducción del 45.69 % en tanto que el ShM se reduce en un 46.14 %.

El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-15.

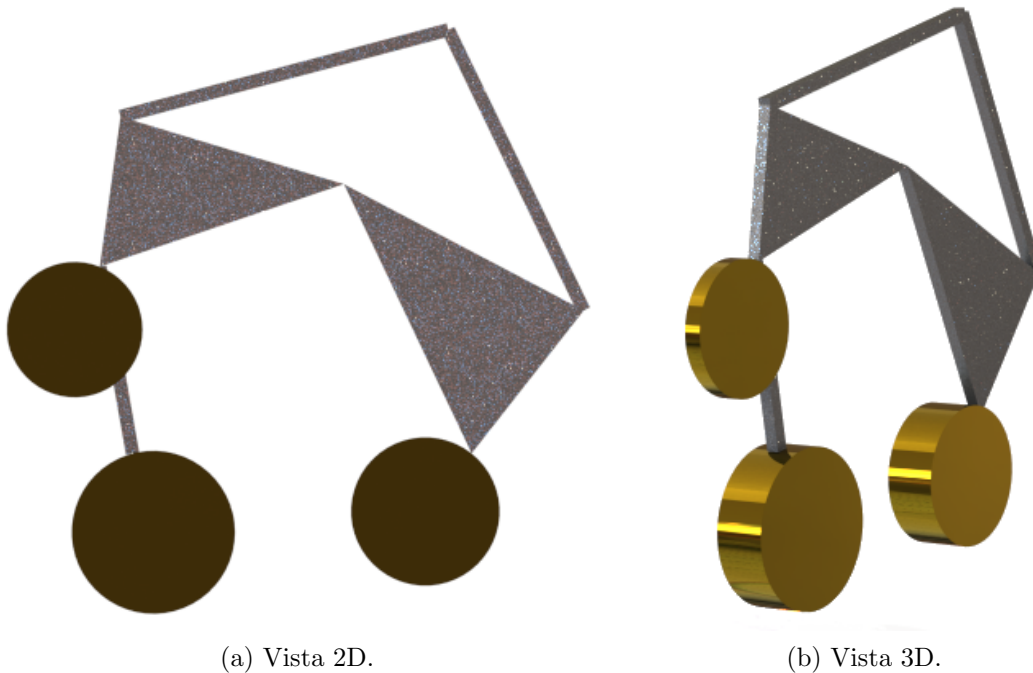


Figura 6-15.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando tres contrapesos.

Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos

Regresar al índice

La figura 6-16 muestra los diagramas de caja correspondientes a los valores resultantes de evaluar las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada una de las variables a optimizar x_n, y_n y t_n , para los contrapesos $n = 1, n = 2$ y $n = 3$ (cuando los contrapesos 4 y 5 han sido eliminados).

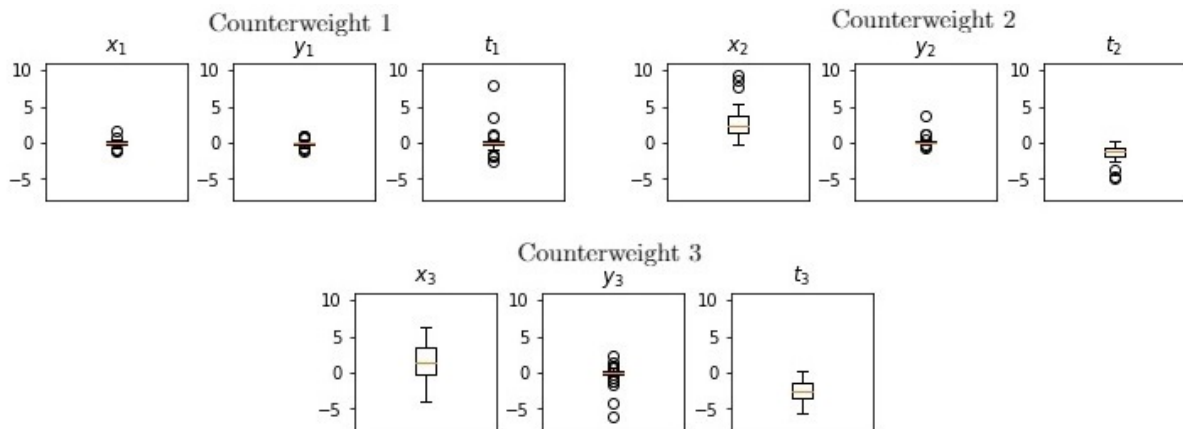


Figura 6-16.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.

Al analizar los diagramas de caja correspondientes a los contrapesos 1, 2 y 3, se puede apreciar que aquellos relacionados a x_1, y_1, t_1, y_2, y_3 se encuentran más o menos cercanos al cero, sin embargo los valores correspondientes a x_2 y x_3 se encuentran por encima de cero, por lo tanto se llega a la conclusión de que en caso de que se pueda ampliar el límite inferior de la optimización para esta variable podrían obtenerse mejores resultados. De forma similar, los valores correspondientes a t_2 y t_3 se encuentran por debajo de cero, es decir que estos contrapesos, en la optimización, están tratando de tener un espesor mayor que el que les ha sido permitido. Para confirmar este análisis, la figura 6-17 muestra la relación área-espesor de las soluciones obtenidas para cada contrapeso; tanto el contrapeso 2 como el 3 están, en la mayoría de los casos llegando al máximo espesor permitido en la optimización, de ahí que, en caso de que las condiciones físicas del mecanismo lo permitan, podría ampliarse este límite para obtener mejores resultados.

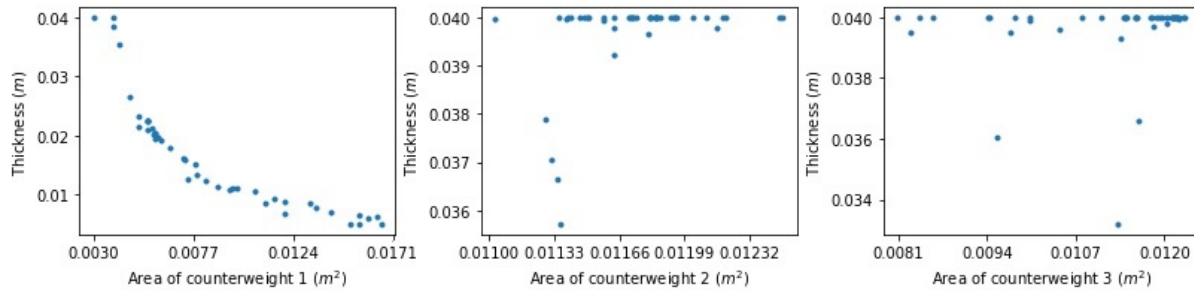


Figura 6-17.: Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan tres de ellos en el mecanismo de seis barras.

6.6.5. Dos contrapesos

Regresar al índice

Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos

Regresar al índice

La figura **6-18** muestra el PF de los diferentes resultados de la optimización cuando se realiza con combinaciones de dos contrapesos (a partir de los tres contrapesos anteriores). En este caso es posible notar que los mejores resultados son obtenidos al emplear los contrapesos 2 y 3, retirando el contrapeso 1.

Análisis de resultados numéricos utilizando dos contrapesos

Regresar al índice

A partir del PF que se obtiene al utilizar los contrapesos 2 y 3, se eligen tres soluciones tal como se explica a continuación:

1. Cuando el principal interés se centra en la optimización de la ShF (β_{ShF}) se elige la solución $\beta_{ShM} = 0.934821787$, $\beta_{ShF} = 0.430267409$ que corresponde a:

$$\begin{aligned} x_{c2} &= -0.06 & y_{c2} &= 0.010068826 & t_{c2} &= 0.017767537 \\ x_{c3} &= -0.053617459 & y_{c3} &= -0.027518511 & t_{c3} &= 0.025912424 \end{aligned}$$

De esta forma la ShF se reduce en un 56.98 %, en tanto que el ShM se reduce un 6.52 %.

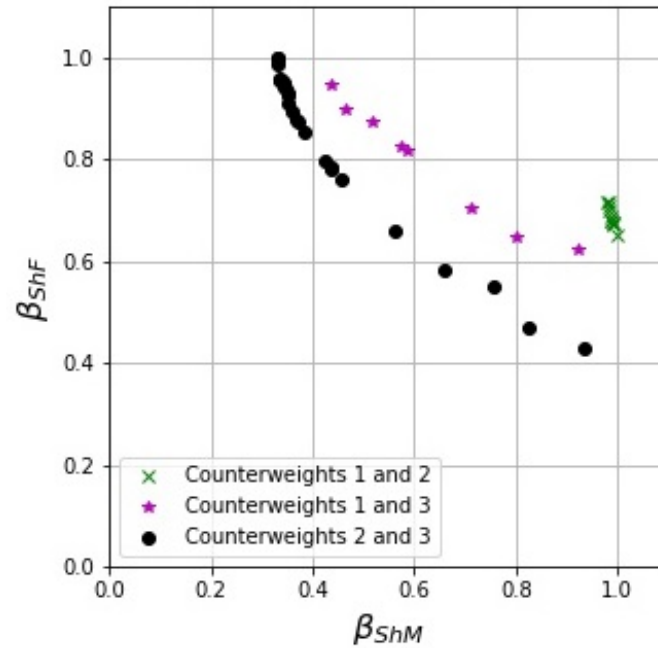


Figura 6-18.: Comparación de los PF al utilizar dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.

2. Cuando el principal interés de la optimización se centra en reducir el ShM (β_{ShM}) se elige la solución $\beta_{ShM} = 0.33007967$ y $\beta_{ShF} = 0.998368082$ que corresponde a:

$$\begin{aligned} x_{c2} &= -0.050244885 & y_{c2} &= -0.006835883 & t_{c2} &= 0.0382909 \\ x_{c3} &= -0.059107334 & y_{c3} &= 0.01334215 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

Aquí el ShM se reduce en un 67.00%, en tanto que la ShF permanece prácticamente igual pues sólo sufre un decremento del 0.17%.

3. Ahora bien, si el interés de la optimización se centra en minimizar tanto la ShF como el ShM, se elige el punto $\beta_{ShM} = 0.658200023$, $\beta_{ShF} = 0.5834812$ que corresponde a:

$$\begin{aligned} x_{c2} &= -0.047208842 & y_{c2} &= 0.002831306 & t_{c2} &= 0.04 \\ x_{c3} &= -0.05125707 & y_{c3} &= -0.010732312 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

De esta forma la ShF se reduce en un 41.66% mientras que el ShM se reduce un 34.18%. El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura **6-19**.

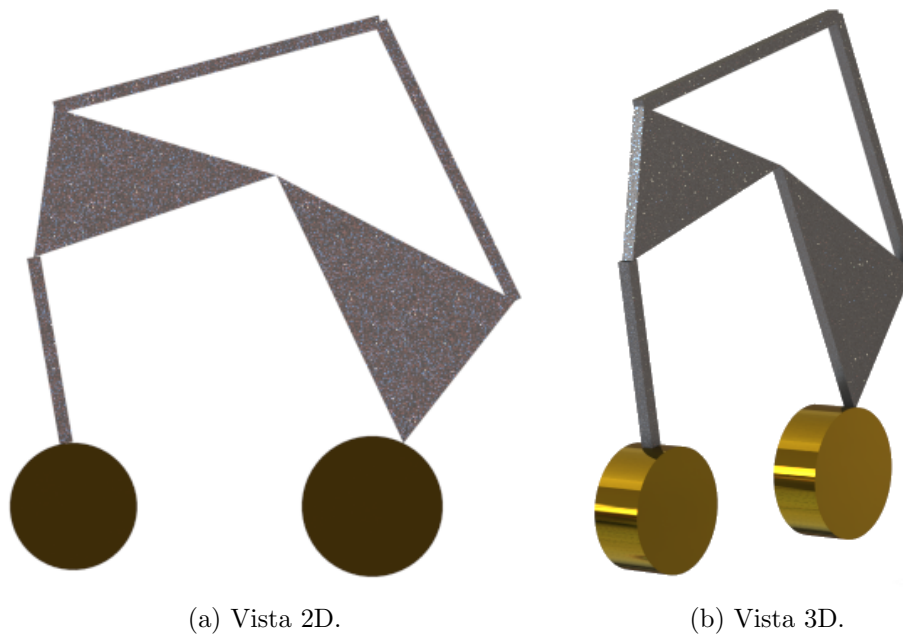


Figura 6-19.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando dos contrapesos.

Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos

Regresar al índice

La figura 6-20 muestra los diagramas de caja de los valores resultantes al evaluar las soluciones de la optimización en las derivadas parciales de la función objetivo cuando se utilizan los contrapesos 2 y 3, puede observarse que casi todos los valores se encuentran cercanos al cero, por lo cual se asume que sus límites son adecuados, sin embargo las variables x_3 y t_3 tienen valores negativos, lo cual indica que su límite superior podría ampliarse para obtener mejores resultados en la optimización.

Esto se confirma al observar la figura 6-21 en la cual el contrapeso 3 tiene en la mayoría de los casos el máximo espesor posible asignado en el límite de la optimización.

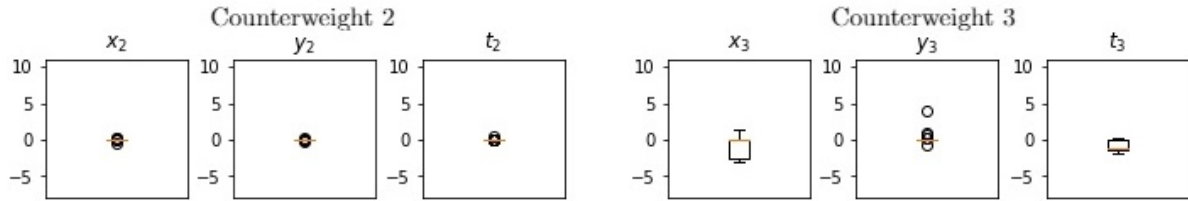


Figura 6-20.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.

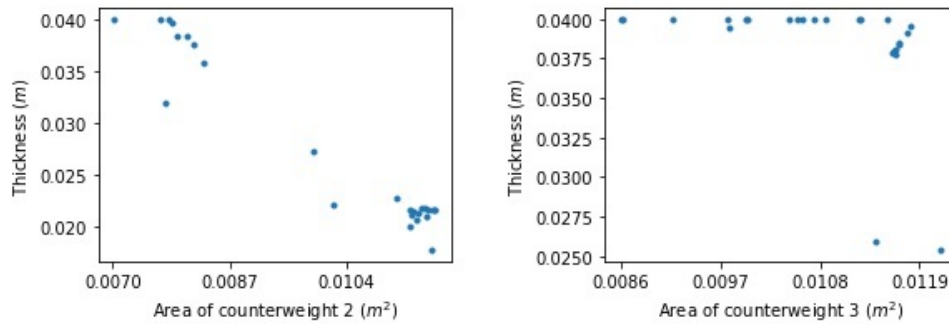


Figura 6-21.: Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan dos de ellos en el mecanismo de seis barras.

6.6.6. Un contrapeso

Regresar al índice

Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso

Regresar al índice

La figura **6-22** muestra el PF de los resultados de la optimización al emplear únicamente un contrapeso (a partir de los dos que quedaban en la solución anterior). Es claro que, en caso de que se desee emplear únicamente un contrapeso, la mejor elección sería el contrapeso 3, puesto que es el que permite mejores resultados en la optimización.

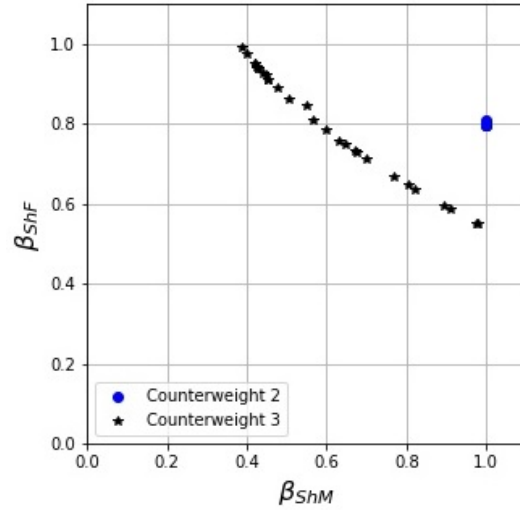


Figura 6-22.: Comparación de los PF al utilizar un contrapesos en el mecanismo de seis barras.

Análisis de resultados numéricos utilizando un contrapeso

Regresar al índice

Se seleccionan entonces tres soluciones del PF que se obtiene al utilizar únicamente el contrapeso 3, estas son:

1. Si el principal interés de la optimización consiste en minimizar la ShF se elige el punto $\beta_{ShM} = 0.977472344$, $\beta_{ShF} = 0.550353509$ que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.047483153 \quad y_{c3} = -0.027557823 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma la ShF se reduce en un 44.97 %, en tanto que el ShM se reduce únicamente un 2.26 %.

2. En cambio, si el interés principal se centra en minimizar el ShM, se elige el punto $\beta_{ShM} = 0.390023915$, $\beta_{ShF} = 0.989743371$, que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.057456052 \quad y_{c3} = 0.005807245 \quad t_{c3} = 0.04$$

En este caso el ShM se reduce un 61.00 %, mientras que el ShF se reduce un 1.03 %.

3. Por último, si lo que se busca es minimizar tanto el ShF como el ShM, el punto seleccionado es $\beta_{ShM} = 0.697736308$, $\beta_{ShF} = 0.713112655$, que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.052595252 \quad y_{c3} = -0.014033018 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma se reduce el ShF en un 28.69 % y el ShM en un 30.23 %.
El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura **6-23**.

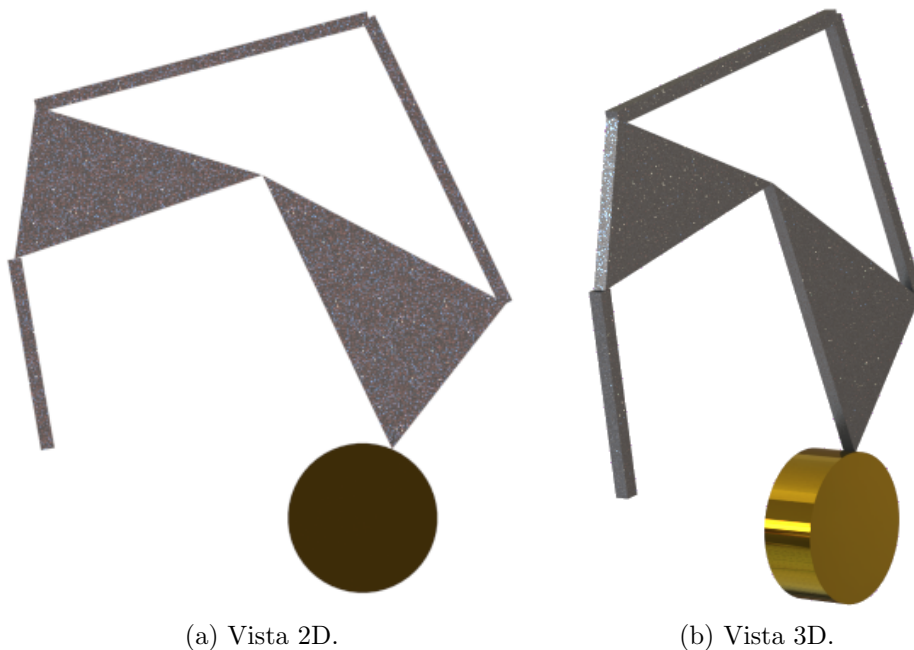


Figura 6-23.: Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando un contrapeso.

Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando un contrapeso

Regresar al índice

La figura **6-24** muestra los diagramas de caja correspondientes a los resultados de evaluar las soluciones del PF en las derivadas parciales de la función objetivo. Se aprecia que tanto x_3 como y_3 se encuentran cercanos a cero, de ahí que sus límites son adecuados, sin embargo t_3 tiene valores negativos, lo cual indica que esta variable está tratando de exceder el límite superior asignado para la optimización. Esto se confirma al observar la figura **6-25** que muestra la relación entre el espesor y el área del contrapeso 3.

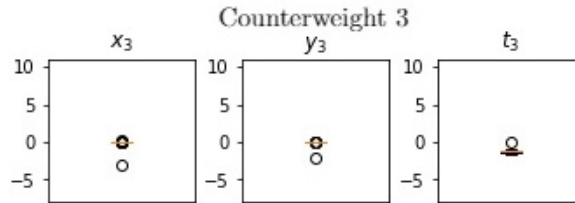


Figura 6-24.: Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapesos en el mecanismo de seis barras.

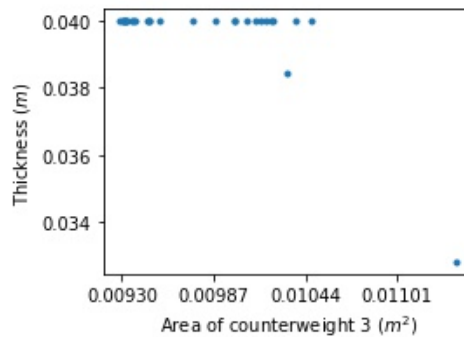


Figura 6-25.: Relación entre área y espesor, cuando se implementan sólo el contrapeso 3 en el mecanismo de seis barras.

6.6.7. Comparación de los PF al reducir el número de contrapesos

Regresar al índice

La figura **6-26** muestra una comparación entre los PF de los diferentes resultados de la optimización en tanto se redujo el número de contrapesos para lograr el balanceo. Es posible apreciar que se obtienen resultados muy similares al emplear cinco, cuatro y tres contrapesos, por lo tanto en la mayoría de los casos se sigue únicamente emplear tres.

Por otra parte, en la tabla **6-3** se muestra la comparación entre los resultados de la optimización al utilizar diferentes combinaciones de contrapesos, la elección de la mejor solución dependerá en cada caso de los objetivos concretos que se busquen al llevar a cabo la optimización del balanceo.

Tabla 6-3.: Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras.

		Optimización de ShF	Optimización de ShM
Usando 5 contrapesos	Optimizando ShF	72.91 %	7.59 %
	Optimizando ShM	6.72 %	76.41 %
	Optimizando ShF y ShM	44.2 %	41.99 %
Usando los contrapesos 1,2,3 y 5	Optimizando ShF	76.82 %	3.59 %
	Optimizando ShM	3.21 %	76.97 %
	Optimizando ShF y ShM	44.31 %	40.73 %
Usando los contrapesos 1,2 y 3	Optimizando ShF	75.95 %	0.5 %
	Optimizando ShM	3.53 %	77.21 %
	Optimizando ShF y ShM	45.69 %	46.81 %
Usando los contrapesos 2 y 3	Optimizando ShF	56.98 %	6.52 %
	Optimizando ShM	0.17 %	67.00 %
	Optimizando ShF y ShM	41.66 %	34.18 %
Usando solo el contrapeso 3	Optimizando ShF	44.97 %	2.26 %
	Optimizando ShM	1.03 %	61.00 %
	Optimizando ShF y ShM	28.69 %	30.23 %

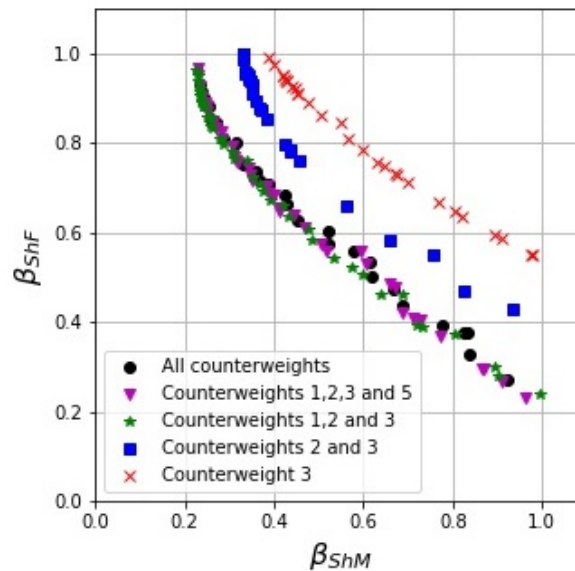


Figura 6-26.: Comparación de los PF utilizando diferente cantidad de contrapesos en el mecanismo de seis barras.

6.7. Conclusiones

Regresar al índice

Entre los principales aportes de este capítulo se encuentra el desarrollo de la matriz de masas en dos dimensiones para elementos formados por tres puntos básicos, a nuestro conocimiento esa matriz no ha sido propuesta hasta el momento en la bibliografía consultada y puede ser aplicada a infinidad de mecanismos más complejos que utilicen eslabones de este tipo. Al utilizar FCC se demostró que incluso en los mecanismos más complejos es posible obtener ecuaciones relativamente simples para definir el ShM y la ShF, y llevar a cabo la optimización del balanceo a través de algoritmos como el DE obteniendo excelentes resultados.

Para el mecanismo de seis barras estudiado en este capítulo, se logró la reducción de hasta un 76.82% de la ShF y hasta de un 77.21% del ShM utilizando únicamente contrapesos.

Se demostró también la eficacia del método que se propone a lo largo de esta tesis para realizar el análisis de los límites de las variables a utilizar por medio de los diagramas de caja de las derivadas parciales de las variables a optimizar, pudiendo de esta forma plantear mejoras en la optimización siempre cuando las características mecánicas del eslabonamiento lo permitan.

Por otra parte, empleando el método propuesto del análisis de los PF, se demostró que es posible lograr hasta un 44.97% de mejora en el balanceo de la ShF del mecanismo, o hasta un 61% de mejora en el balanceo del ShM al utilizar únicamente el tercero de los contrapesos propuestos, simplificando de esta forma la implementación de la solución.

La importancia del balanceo de mecanismos de seis barras puede apreciarse en áreas como la robótica móvil puesto que este tipo de eslabonamientos se utilizan para la simulación del movimiento, por ejemplo, en una pierna biónica [177]; además de su presencia en las máquinas de rehabilitación [178] en donde el balanceo evita las reacciones que se provocan con el movimiento y que repercuten en las personas que las utilizan.

7. Conclusiones

Regresar al índice

A lo largo de este trabajo se ha explicado en forma detallada el uso de FCC para definir la matriz de masas de diferentes tipos de mecanismos, y de esta forma poder obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM de los mismos. Se ha podido observar la simplicidad de su uso, contándose así con una herramienta que se puede incluso automatizar a través de software para llevar a cabo el balanceo de diferentes tipos de mecanismos en una manera sencilla.

Adicionalmente se presentó el desarrollo para la obtención de una matriz de masas bidimensional, utilizando FCC, que puede ser empleada para definir elementos formados por tres puntos básicos, ampliando así la capacidad de análisis de mecanismos más complejos.

El desarrollo para la obtención de las matrices de masas de cada elemento, así como de la matriz de masas de cada mecanismo propuesto, fue realizado en forma detallada, permitiendo de esta forma la comprensión puntual del método propuesto, y permitiendo con ello que este método sea replicado en futuras investigaciones.

La optimización del balanceo de los mecanismos presentados a lo largo de este trabajo presenta siempre el reto de tratar con multi-objetivos. El uso de la combinación lineal de funciones demostró ser una forma simple pero robusta de manejarlos.

En el capítulo 5 se presentó la optimización del mecanismo de cuatro barras mediante el algoritmo de Descenso de Gradiente Proyectado (PGD) Simplificado, siendo este un método de optimización simple basado en gradientes, que permitió obtener información valiosa sobre los límites de optimización y demostró excelentes resultados al lograr minimizar las reacciones en la base del mecanismo en forma significativa.

Tanto en el capítulo 4 como en el capítulo 6 se empleó el algoritmo de DE para la optimización del balanceo de los mecanismos analizados; este algoritmo demostró su eficiencia para la solución de este tipo de problemas, logrando muy buenos resultados sin la necesidad de recurrir a algoritmos más complejos.

Con la finalidad de conocer la idoneidad de los límites propuestos para las variables a optimizar, se propuso un método a través del análisis de diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo al ser evaluadas en las soluciones resultantes de la optimización. Este método permite que, en caso de que hubiera la posibilidad, se conociera qué límite podría ampliarse con la finalidad de lograr mejores resultados en la optimización del balanceo. Ello reduce el tiempo de análisis de la optimización y permite realizar ajustes en los límites seleccionados.

Por último, se demostró la eficiencia de los PF para llevar a cabo el análisis de los resultados de la optimización, permitiendo discriminar entre aquellos más importantes y aquellos que otorgan resultados no tan buenos. Además, al utilizar el PF para analizar los resultados de la optimización, realizando la comparación de los PF de las diferentes soluciones al disminuir el número de contrapesos, es posible tener claridad sobre las implicaciones que se tienen en el balanceo al eliminar uno o varios contrapesos.

En el caso del mecanismo manivela-biela se logró una reducción de hasta el 97.56 % del ShM o una reducción de hasta el 94.58 % del ShF (reduciendo en ambos casos también las otras reacciones).

Para el mecanismo de cuatro barras se logró reducir la ShF y el ShM en un 99.70 % y un 28.69 % respectivamente cuando se da mayor importancia al índice de balance correspondiente al ShF; mientras que el ShM y la ShF se redujeron en un 83.99 % y un 8.47 % respectivamente cuando se dio mayor importancia a la optimización del índice de balanceo relacionado con el ShM. El uso del método propuesto para la comparación de PF demostró que incluso utilizando solo un contrapeso, la ShF se puede reducir un 78.74 % o bien, se puede reducir un 73.61 % cuando se le da especial importancia al balanceo de la ShM.

Por último, para el mecanismo de seis barras, se logró la reducción de hasta un 76.82 % de la ShF y hasta de un 77.21 % del ShM utilizando únicamente contrapesos. También se presentó el análisis para la sensibilidad a los contrapesos utilizados, demostrando que el contrapeso 3 es el que realiza mayor aporte para el balanceo final del mecanismo, de forma que éste puede optimizarse hasta lograr una mejora en el ShF de cerca del 50 % o bien una mejora en el ShM del 61 % al agregar únicamente un contrapeso, garantizando de esta forma una solución sumamente sencilla de implementar.

Puede observarse que en los ejemplos propuestos se lograron buenos resultados de optimización del balanceo de los mecanismos, todos ellos a través de la adición únicamente de contrapesos, y a través de algoritmos básicos de optimización. Recuérdese que al implementar únicamente contrapesos es imposible lograr el balanceo dinámico completo de los mecanismos, sin embargo la implementación de este tipo de solución resulta sumamente sen-

cilla en la práctica y ofrece una buena alternativa para la mejora del balanceo reduciendo de esta forma la fatiga, el desgaste y todas las implicaciones mecánicas que la falta de balance puede provocar en los mecanismos.

7.0.1. Trabajo futuro

Regresar al índice

Como trabajo futuro resultaría interesante:

- Realizar experimentos que permitan la validación de los resultados con prototipos de mecanismos en forma experimental (cuando se vuelva a tener acceso en forma normal a laboratorios).
- Definir las matrices de masa para eslabones en dos dimensiones que estén formados por cuatro o más puntos básicos, y probarlas a través del balanceo de mecanismos que requieran este tipo de eslabones.
- Probar los algoritmos de optimización propuestos a lo largo de este trabajo para llevar a cabo el balanceo de mecanismos en los que además de contrapesos se incluyan contra inercias, pues de esta forma sería posible lograr mejores resultados de la optimización.
- Llevar a cabo la optimización del balanceo de mecanismos tridimensionales con métodos similares a los propuestos, utilizando FCC, y analizando los resultados mediante los diagramas de caja y los PF, tal como se realizó en este trabajo con los mecanismos bidimensionales.
- Implementar otros algoritmos de optimización, sobre todo para mecanismos complejos, como el tratado en el Capítulo 6, para comprobar así su rendimiento, realizando un comparativo de los resultados.
- Implementar un software que permita el balanceo de mecanismos bidimensionales en forma automática bastando con la introducción de los parámetros físicos y las restricciones mecánicas.
- Llevar a cabo una optimización mixta que permita el balanceo de mecanismos de cuatro o seis barras que hagan el seguimiento de una trayectoria previamente especificada, lo cual tendría gran aplicación en robótica móvil y máquinas de rehabilitación.

Publicaciones

Regresar al índice

Durante el tiempo que duró este programa de doctorado se realizaron las siguientes publicaciones:

7.0.2. Artículos de revista

Regresar al índice

- M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velázquez and E. Haro *Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates*. En: IEEE Latin America Transactions, vol. 17, no. 06, pp. 983-990, June 2019, doi: 10.1109/TLA.2019.8896821.
- Orvañanos-Guerrero, María T.; Sánchez, Claudia N.; Rivera, Mariano; Acevedo, Mario; Velázquez, Ramiro *Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates*. En: Applied Sciences 9 (2019), 10, Nr. 19, p. 4115.
- Acevedo, M.; Orvañanos-Guerrero, M.T.; Velázquez, R.; Arakelian, V. *An Alternative Method for Shaking Force Balancing of the 3RRR PPM through Acceleration Control of the Center of Mass*. Appl. Sci. 2020, 10, 1351.

7.0.3. Capítulos de libro

Regresar al índice

- Acevedo M., Orvañanos-Guerrero M.T. (2020) *Force Balancing of the 2RRR Planar Parallel Manipulator via Center of Mass Acceleration Control Using Fully Cartesian Coordinates*. En: Hernandez E., Keshtkar S., Valdez S. (eds) Industrial and Robotic Systems. LASIRS 2019. Mechanisms and Machine Science, vol 86. Springer, Cham
- Acevedo M., Orvañanos T., Velázquez R. (2019) *Shaking Moment Balancing of a Four-Bar Mechanism Using Actuation Redundancy*. En: Uhl T. (eds) Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science, vol 73. Springer, Cham

7.0.4. Congresos

Regresar al índice

- Orvañanos-Guerrero, María T. ;Sánchez, Claudia N.; Dávalos-Orozco, Óscar ;Rivera, Mariano ;Velázquez, Ramiro; Acevedo, Mario: *Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms*. En: Proceedings - 2018 Nanotechnology for Instrumentation and Measurement, NANOFIM 2018, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 4 2019. – ISBN9781538691618.
- Orvañanos-Guerrero, María T. ;Acevedo, Mario; Sánchez, Claudia N.; Giannoccaro, Nicola Ivan ;Visconti, Paolo; Velazquez, Ramiro: *Balancing Optimization of a Crank-Connecting Rod Mechanism Using Natural Coordinates*. En: IEEE ANDESCON, 2020, Aceptado.

A. Anexo: Ecuaciones correspondientes al ShF y ShM de un mecanismo de seis barras obtenidas mediante Python

Regresar al índice

$$\begin{aligned} ShF_i = & V_{AX} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 - (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} * \\ & * 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2) + \\ & V_{AX} * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) - (2 * m_{b2} + 2 * \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) * (m_{b2} * x_{b2} + \\ & \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2))) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2))) + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * \\ & x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) * \\ & * 2 / 2) / l_2 ** 2) + V_{AY} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 + V_{BX} * (K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * \\ & t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \\ & \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - \\ & (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + \\ & V_{BX} * (K_{x3} ** 2 * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) * \\ & * 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3 ** 2) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + K_{x3} * (2 * \\ & I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3 ** 2) + K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * \\ & (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * \\ & (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\ & * 2) ** 2 / 4) / l_3 ** 2 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{BX} * (K_{x3} ** 2 * \\ & (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3 * \\ & * 2) + 2 * K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * \\ & t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3 ** 2) - K_{x3} * (2 * I_{xb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\ & * 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 2) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + 1 - (2 * m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\ & * 2)) * (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (l_3 * (m_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2))) + \\ & (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / l_3 ** 2 - (2 * \\ & m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * (m_{b3} + \\ & \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2))) + (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + \\ & (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{CX} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 - (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2) + V_{CX} * \\
 & (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
 & * 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} * \\
 & * 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{CX} * (K_{x1} ** 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * \\
 & (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + \\
 & (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * \\
 & l_1) + V_{CX} * (K_{x1} ** 2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) * \\
 & * 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) + 2 * K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - K_{x1} * \\
 & (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
 & y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 2) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + 1 + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * \\
 & t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} * \\
 & * 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) * (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} * \\
 & * 2 + y_{c1} ** 2)) / (l_1 * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) + (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) * \\
 & (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) + (2 * \\
 & I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{CY} * (-m_{b2} - \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} * \\
 & * 2)) * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2))) + \\
 & V_{DX} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + V_{DX} * \\
 & (K_{x1} * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
 & * 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{DX} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * \\
 & l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} * \\
 & * 2) + V_{DX} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) - (2 * m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * \\
 & (m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + (I_{zb4} + \\
 & \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} * \\
 & * 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2 + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{DY} * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 + V_{EX} * (K_{x1} * \\
 & (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * \\
 & l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{EX} * (K_{x3} * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
 & y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
 & x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3)) + V_{EX} * (K_{x1} ** 2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)/(K_{y1}*l_1**2)+(Iy_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2+(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{EX}*(K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/K_{y3}-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{EX}*(K_{x1}**2*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2)-K_{x1}*(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)+K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1**2)+K_{x1}*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(m_{b1}*x_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/l_1-(Iy_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2-(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)+V_{FX}*((m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5-(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2)+V_{FX}*(K_{x3}*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+V_{FX}*(K_{x3}**2*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3**2)+K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(Iy_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+V_{FX}*(K_{x3}**2*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3**2)+m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)-(2*m_{b5}+2*\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))*(m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2+(Iy_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2)+V_{FY}*(m_{b5}*y_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5+V_{GX}*((m_{b4}*x_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4-(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2)+V_{GX}*((I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2+(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2)+V_{GX}*((m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5-(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2)+V_{GY}*(-m_{b5}-\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))*(m_{b5}*y_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+V_{GY}*(-m_{b4}-\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))*(m_{b4}*y_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/(l_4*(m_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ShF_j &= V_{AX}*(-m_{b2}-\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))*(m_{b2}*y_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))+V_{AY}*((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2 / l_2 ** 2 + V_{AY} * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) - (2 * m_{b2} + 2 * \\
 & \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) * (m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * \\
 & t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2))) + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} * \\
 & * 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2 + V_{BY} * (K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
 & * 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
 & y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - (I_{xb3} + \\
 & \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2 + V_{BY} * (K_{x3} * \\
 & * 2 * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} * \\
 & * 2 * l_3 ** 2) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \\
 & \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3 ** 2) + K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\
 & * 2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / l_3 * \\
 & * 2 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{BY} * (K_{x3} ** 2 * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
 & y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3 ** 2) + 2 * K_{x3} * (m_{b3} * \\
 & y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + \\
 & y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3 ** 2) - K_{x3} * (2 * I_{xb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 2) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + 1 - (2 * m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) * (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \\
 & \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (l_3 * (m_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2))) + (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * \\
 & * 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / l_3 ** 2 - (2 * m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2)) * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * (m_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + \\
 & y_{c3} ** 2))) + (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
 & * 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2 + V_{CX} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * \\
 & t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 + V_{CY} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 - (I_{zb2} + \\
 & \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} * \\
 & * 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2 + V_{CY} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - \\
 & (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{CY} * (K_{x1} ** 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
 & * 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
 & x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + V_{CY} * (K_{x1} ** 2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) + 2 * K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
 & (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * \\
 & l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) * \\
 & * 2 / 2) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + 1 + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} * \\
 & * 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) * (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (l_1 * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Iy_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (2 * \\
& m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * (m_{b1} + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) + (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + \\
& (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + \\
& V_{DX} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * \\
& (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + V_{DY} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - \\
& (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * \\
& (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + V_{DY} * (K_{x1} * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
& ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{DY} * (K_{x1} * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
& y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \\
& \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{DY} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) - (2 * \\
& m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \\
& \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * \\
& (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2 + (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} * \\
& ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{EY} * (K_{x1} * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
& y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{EY} * (K_{x3} * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + \\
& y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} * \\
& ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3)) + V_{EY} * (K_{x1} ** 2 * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
& y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + (Iy_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
& ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 + (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) \\
& ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + V_{EY} * (K_{x3} * (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + \\
& y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * \\
& t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * \\
& t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + V_{EY} * (K_{x1} ** 2 * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
& ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} * \\
& ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + \\
& K_{x1} * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
& ** 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - (Iy_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
& y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
& ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{FX} * (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} * \\
& ** 2 + y_{c5} ** 2)) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2))) + V_{FY} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} * \\
& ** 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} * \\
& ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2) + V_{FY} * (K_{x3} * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} * \\
& ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} * \\
& ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3)) + V_{FY} * (K_{x3} ** 2 * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * \\
& t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3 ** 2) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &*)/(K_{y3}*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3**2)+K_{x3}* \\
 &(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+ \\
 &(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+ \\
 &\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}* \\
 &l_3))+V_{FY}*(K_{x3}**2*(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}** \\
 &*)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}* \\
 &l_3**2)+m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)-(2*m_{b5}+2*\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))*(m_{b5}* \\
 &x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}* \\
 &t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}** \\
 &*)**2/2)/l_5**2+(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)* \\
 &*)**2/4)/l_3**2)+V_{GX}*(m_{b5}*y_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5+V_{GX}*(m_{b4}*y_{b4}+\pi*\rho_{c4}* \\
 &t_{c4}*y_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4+V_{GY}*((m_{b4}*x_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4-(I_{zb4}+ \\
 &\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+ \\
 &y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2)+V_{GY}*((I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2* \\
 &(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2+(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}** \\
 &*)**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4* \\
 &*)**2)+V_{GY}*((m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5-(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}** \\
 &*)**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ShM = Matrix([&[A_X*(V_{AY}*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)-(2*m_{b2}+2*\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)) \\
 &*(m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))/(l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))) \\
 &+(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}* \\
 &t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2)+V_{CX}*(m_{b2}*y_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2+ \\
 &V_{CY}*((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}** \\
 &*)**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2))-A_Y* \\
 &(V_{AX}*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)-(2*m_{b2}+2*\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))*(m_{b2}* \\
 &x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))/(l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))+(I_{zb2}+\pi* \\
 &\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+ \\
 &y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2)+V_{CX}*((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}* \\
 &t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}** \\
 &*)**2/2)/l_2**2)+V_{CY}*(-m_{b2}-\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))*(m_{b2}*y_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}** \\
 &*)**2+y_{c2}**2))/l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))]+B_X*(V_{BY}*(K_{x3}**2*(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}* \\
 &t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)+2*K_{x3}* \\
 &(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3} \\
 &(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi* \\
 &\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/2)/(K_{y3}**2*l_3)+1-(2*m_{b3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))* \\
 &(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3*(m_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(I_{yb3}+ \\
 &\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(2*m_{b3}+2* \\
 &\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*(m_{b3}+\pi*\rho_{c3}* \\
 &t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+(I_{xb3}+ \\
 &\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{EY}*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) / (K_{y1} * l_1) + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{DY} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
 & * 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{EY} * (K_{x1} ** 2 * (-I_{xb1} - \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - \\
 & K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * \\
 & y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - \\
 & (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) - C_Y * (V_{AX} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2} * \\
 & * 2 + y_{c2} ** 2)) / l_2 - (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2) + V_{AY} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} * \\
 & * 2)) / l_2 + V_{CX} * (K_{x1} ** 2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) + 2 * K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - \\
 & K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 2) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + 1 + (I_{zb2} + \pi * \\
 & \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * y_{c2} * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} ** 2 * (x_{c2} ** 2 + y_{c2} ** 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} ** 2 + \\
 & y_{c2} ** 2) ** 2 / 2) / l_2 ** 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) * (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} * \\
 & * 2 + y_{c1} ** 2)) / (l_1 * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) + (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) * \\
 & (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2))) + (2 * \\
 & I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{DX} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * \\
 & (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
 & (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \\
 & \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{EX} * (K_{x1} * \\
 & * 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
 & * 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \\
 & \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 * \\
 & * 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + D_X * (V_{CY} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * \\
 & l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} * \\
 & * 2 + V_{DY} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) - (2 * m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * \\
 & x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * \\
 & t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} * \\
 & * 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2 + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *2/4)/K_{y1}**2)+V_{EY}*(K_{x1}*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1))+V_{GX}*(m_{b4}*y_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4+V_{GY}*((m_{b4}*x_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4-(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2))-D_Y*(V_{CX}*(K_{x1}*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/K_{y1}-(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)-(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/K_{y1}**2)+V_{DX}*(m_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)-(2*m_{b4}+2*\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))*(m_{b4}*x_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/(l_4*(m_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)))+(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2+(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/K_{y1}**2)+V_{EX}*(K_{x1}*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1))+V_{GX}*((m_{b4}*x_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/l_4-(I_{zb4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2)+V_{GY}*(-m_{b4}-\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))*(m_{b4}*y_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))/(l_4*(m_{b4}+\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2+y_{c4}**2))))+E_X*(V_{BY}*(K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/K_{y3}-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{CY}*(K_{x1}**2*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2)-K_{x1}*(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)+K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1**2)+K_{x1}*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(m_{b1}*x_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/l_1-(I_{yb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2-(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1))+V_{DY}*(K_{x1}*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1))+V_{EY}*(K_{x1}**2*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2)-K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1**2)+(I_{yb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2+(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{FY}*(K_{x3}*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3))-E_Y*(V_{BX}*(K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/K_{y3}-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{CX}*(K_{x1}**2*(-Ix_{b1}-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2)-K_{x1}*(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)+K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1**2)+K_{x1}*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_{GX} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} * \\
& * 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2) + V_{GY} * \\
& (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) / (l_5 * (m_{b5} + \\
& \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2))) + G_X * (V_{DX} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * y_{b4} + \\
& \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + V_{DY} * ((m_{b4} * x_{b4} + \\
& \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * \\
& y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + V_{FX} * (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * \\
& t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * \\
& (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2))) + V_{FY} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * \\
& x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) * \\
& ** 2 / 2) / l_5 ** 2) + V_{GY} * ((I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + \\
& y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2 + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} * \\
& * 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) - G_Y * \\
& (V_{DX} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + \\
& y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + \\
& V_{DY} * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 + V_{FX} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} * \\
& * 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + \\
& y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2) + V_{FY} * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} * \\
& * 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 + V_{GX} * ((I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} * \\
& * 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2 + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + \\
& y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2)]]])
\end{aligned}$$

Bibliografía

Regresar al índice

- [1] ABB, “Información detallada para: IRB 760.”
- [2] PROFILE magazine, “Cutout camera.”
- [3] C. Coello Coello, G. B. Lamont, and D. A. van Veldhuizen, *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Springer US, 2 ed., 2007.
- [4] Christoph Kramer, “LCTM Lista de Correo de Trenes Märklin,” 2017.
- [5] V. Arakelian and S. Briot, *Balancing of Linkages and Robot Manipulators*, vol. 27 of *Mechanisms and Machine Science*. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [6] G. G. Lowen and R. S. Berkof, “Survey of Investigations into the Balancing of Linkages,” *Journal of Mechanisms*, vol. 3, no. 4, pp. 221–231, 1968.
- [7] J. J. Uicker, G. R. Pennock, and J. E. Shigley, *Theory of machines and mechanisms*, vol. 1. Oxford University Press New York, NY, 2011.
- [8] K. J. Waldron, G. L. Kinzel, K. Waldron, and G. Kinzel, *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*. John Wiley & Sons, 2016.
- [9] V. Arakelian, “Inertia forces and moments balancing in robot manipulators: a review,” *Advanced Robotics*, vol. 31, pp. 717–726, 7 2017.
- [10] V. Arakelian, M. Dahan, and M. Smith, “A Historical Review of the Evolution of the Theory on Balancing of Mechanisms,” in *International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM 2000*, pp. 291–300, Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.
- [11] C. M. Gosselin, B. Moore, and J. Schicho, “Dynamic balancing of planar mechanisms using toric geometry,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 44, pp. 1346–1358, 9 2009.
- [12] R. L. Norton, *Design of machinery : an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*. McGraw-Hill Higher Education, 2004.

-
- [13] T. Li and S. Payandeh, “Design of spherical parallel mechanisms for application to laparoscopic surgery,” *Robotica*, vol. 20, pp. 133–138, 3 2002.
- [14] J.-P. Merlet and C. Gosselin, “Parallel Mechanisms and Robots,” in *Springer Handbook of Robotics* (B. Siciliano, , and O. Khatib, eds.), pp. 269–285, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [15] V. van der Wijk, *Methodology for analysis and synthesis of inherently force and moment-balanced mechanisms: theory and applications*. PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 4 2014.
- [16] V. van der Wijk, J. L. Herder, and B. Demeulenaere, “Comparison of various dynamic balancing principles regarding additional mass and additional inertia,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 1, pp. 1–9, 11 2009.
- [17] M. Acevedo Alvarado, “Balancing conditions of the rss’r, spatial mechanism: an alternative method using natural coordinates,” 2017.
- [18] J. Garcia de Jalon and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems : the Real-Time Challenge*. Springer New York, 1994.
- [19] J. Garcia De Jalon, J. Cuadrado, A. A. Vello, and J. M. Jimenez, “Kinematic and Dynamic Simulation of Rigid and Flexible Systems with Fully Cartesian Coordinates,” *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, vol. 268, pp. 285–323, 1994.
- [20] E. Bayo, J. Garcia De Jalon, A. Avello, and J. Cuadrado, “An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates*,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, no. 3, pp. 377–395, 1991.
- [21] B. Paul and D. Krajinovic, “Computer Analysis of Machines With Planar Motion Part 1-Kinematics,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 37, no. 3, pp. 697–702, 1970.
- [22] B. Paul and D. Krajinovic, “Computer Analysis of Machines With Planar Motion Part 2-Dynamics,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 37, no. 3, pp. 703–712, 1970.
- [23] P. Sheth and J. Uicker, “IMP (Integrated Mechanisms Program), A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkage,” *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 94, no. 2, pp. 454–464, 1972.
- [24] D. Smith, M. Chace, and A. Rubens, “The Automatic Generation of a Mathematical Model for Machinery Systems,” *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 95, no. 2, pp. 629–635, 1973.

-
- [25] S. S. Kim and M. J. Vanderploeg, “A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations 1,” tech. rep., 1986.
- [26] H. A. Attia, “Dynamic modelling of the double wishbone motor-vehicle suspension system,” tech. rep., 2002.
- [27] A. Avello, J. Garcia, and D. E. Jalon, “Dynamics of flexible multibody systems using cartesian co-ordinates and large displacement theory,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, no. 8, pp. 1543–1563, 1991.
- [28] J. Garcia de Jalón, M. A. Serna, and R. Avilés, “Computer Method for Kinematic Analysis of Lower-Pair Mechanisms-I Velocities and Accelerations,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, no. 5, pp. 543–556, 1981.
- [29] J. Garcia de Jalon, M. Serna, and R. Avilés, “Computer Method for Kinematic Analysis of Lower-Pair Mechanisms-II Position Problems,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, no. 5, pp. 557–566, 1981.
- [30] M. A. Serna, R. Avilés, and J. García de Jalón, “Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 17, no. 6, pp. 397–403, 1982.
- [31] J. Garcia de Jalon, M. A. Serna, F. Viadero, and J. Flaquer, “A Simple Numerical Method for the Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 104, no. 1, pp. 78–82, 1982.
- [32] J. G. de Jalón, “Twenty-five years of natural coordinates,” *Multibody System Dynamics*, vol. 18, pp. 15–33, 8 2007.
- [33] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization*. Springer, 2006.
- [34] Claudio Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*. Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1a. edición ed., 1995.
- [35] R. Storn and K. Price, “Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces,” *Journal of Global Optimization*, vol. 11, pp. 341–359, 1997.
- [36] S. Er kaya, “Investigation of balancing problem for a planar mechanism using genetic algorithm,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 27, pp. 2153–2160, 7 2013.
- [37] E. K. P. Chong and S. H. Zak, *An introduction to optimization*. United States of America: John Wiley & Sons, second edition ed., 2013.

- [38] G. Khademi, H. Mohammadi, and D. Simon, “Gradient-Based Multi-Objective Feature Selection for Gait Mode Recognition of Transfemoral Amputees,” *Sensors*, vol. 19, p. 253, 1 2019.
- [39] M. Akbari, P. Asadi, M. K. B. Givi, and G. Khodabandehlouie, “Artificial neural network and optimization,” in *Advances in Friction-Stir Welding and Processing*, pp. 543–599, Elsevier Ltd, 10 2014.
- [40] O. Fisher, “Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik,” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, vol. 47, pp. 429–466, 1902.
- [41] G. Lowen, F. Tepper, and R. Berkof, “Balancing of linkages - An update,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 213–220, 1983.
- [42] V. P. Goryachkin, “The forces of inertia and their balancing,” *Collection of scientific works. Ed. "Kolos", Moscow*, pp. 283–418, 1914.
- [43] V. Yudin, “The balancing of machines and their stability,” *Edition of Academy of Red Army, Moscow*, 1941.
- [44] R. Kreutzinger, “Über die bewegung des Schwerpunktes beim Kurbelgetriebe,” *Getriebetechnik*, vol. 10, no. 9, pp. 397–398, 1942.
- [45] V. A. Shchepetil’nikov, “The Determination of the Mass Centers of Mechanisms in connection with the Problem of Mechanism Balancing,” *Journal of Mechanisms*, vol. 3, no. 4, pp. 367–389, 1968.
- [46] V. A. Shchepetil, “The Balancing of Bar Mechanisms with Unsymmetrical Links,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 10, no. 6, pp. 461–466, 1975.
- [47] V. van der Wijk, “Shaking-moment balancing of mechanisms with principal vectors and momentum,” *Frontiers of Mechanical Engineering*, vol. 8, no. 1, pp. 10–16, 2013.
- [48] V. van der Wijk and J. L. Herder, *The Method of Principal Vectors for the Synthesis of Shaking Moment Balanced Linkages*, vol. 7 of *Mechanisms and Machine Science*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
- [49] F. R. E. Crossley, *Dynamics in machines*. Ronald Press Company, 1954.
- [50] R. L. Maxwell, *Kinematics and dynamics of machinery*. Prentice Hall, 1960.
- [51] M. R. Smith and L. Maundert, “INERTIA FORCES IN A FOUR-BAR LINKAGE,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 9(3), pp. 218–225, 1967.

- [52] G. L. Talbourdet and P. R. Shepler, "Mathematical solution of 4-bar linkages-IV. Balancing of linkages," *Machine Design*, vol. 13, pp. 73–77, 1941.
- [53] P. P. Cormac, *A treatise on engine balance using exponentials*. Chapman & Hall, 1923.
- [54] W. E. Dalby, *The balancing of engines*. E. Arnold, 1906.
- [55] G. Delagne, "Certaines propriétés générales d'équilibrage des machines à piston d'après la méthode des vecteurs tournants symétriques," *CR Acad. Sci*, vol. 206, no. 22, pp. 1617–1618, 1938.
- [56] E. Doucet, "Équilibrage dynamique des moteurs en ligne," *Tech. Automobile et Arienne*, vol. 37, no. 230–232, pp. 30–31, 1946.
- [57] A. Kobayashi, "Analytical study of crank effort in reciprocating engines," *Memoirs, Ryojun College of Engineering*, vol. 4, p. 127, 1931.
- [58] Lanchester F.W., "Engine Balancing," *The institution of automobile engineers*, pp. 195–271, 1914.
- [59] R. E. Root, *Dynamics of engine and shaft*. New York: Wiley, 1932.
- [60] I. Artobolevsky, "Methods of balancing of inertia forces in working machines with complex kinematic schemes. Acad. Naouk SSSR," 1938.
- [61] I. I. Artobolevsky and B. V. Edelshtein, "Methods of inertia calculation for mechanisms of agricultural machines," *Selkhozizdate, Moscow*, 1935.
- [62] I. I. Artobolevckii, "Mechanism and machine theory, Ed," *Naouka, Moscow*, p. 644, 1988.
- [63] T. H. Davies, "The kinematics and design of linkages, balancing mechanisms and machines," *Machine Design Eng*, vol. 40, pp. 40–51, 1968.
- [64] V. A. Kamenskii, "On the Problem of the Number of Counterweights in the Balancing of Plane Linkages," tech. rep., 1968.
- [65] H. Hilpert, "Weight Balancing of Precision Mechanical Instruments," tech. rep., 1968.
- [66] V. Arakelian, "Équilibrage dynamique complet des mecanismes," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 4, pp. 425–436, 1998.
- [67] V. H. Arakelian and M. R. Smith, "Complete shaking force and shaking moment balancing of linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, no. 8, pp. 1141–1153, 1999.

- [68] Y. L. Gheronimus, "An Approximate Method of Calculating a Counterweight for the Balancing of Vertical Inertia Forces*," *Mechanisms*, vol. 3(4), pp. 283–288, 1968.
- [69] Y. L. Gheronimus, "On the Application of Chebyshev's Methods to the Problem of Balancing Mechanismst," *Mechanisms*, vol. 3(4), pp. 235–281, 1968.
- [70] A. P. Bessonov, "Dynamics of the mechanisms with variable mass links,," 1967.
- [71] A. P. Bessonov, "Balancing a planar mechanism with variable mass links," in *MECHANICAL ENGINEERING*, vol. 91, p. 45, ASME-AMER SOC MECHANICAL ENG 345 E 47TH ST, NEW YORK, NY 10017, 1969.
- [72] I. Emöd and A. Jurek, "Massenausgleich am Kurbelgetriebe von Sechszylinder- viertakt-V-motoren mit 6 Kurbeln und 60 Zylinderwinkeln," *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, vol. 11, no. 3-4, pp. 205–211, 1967.
- [73] M. V. Semenov, "The Synthesis of Partly Balanced Plane Mechanisms," *Mechanisms*, vol. 3, no. 4, pp. 339–353, 1968.
- [74] A. L. Urba, "Disposition of the correction mass for the best balancing of planar linkages, Collection: Balancing of machines and apparatuses, Moscow, Ed," *Mechanical engineering*, pp. 226–230, 1978.
- [75] A. L. Urba, "Study of the elliptic harmonics and the possibility of their balancing by a counterweight," *Collection of the scientific works of the Academy of agricultural science of Lithuania*, vol. 26, no. 3/28, pp. 43–49, 1980.
- [76] Berkof R.S. and Lowen G.G., "A New Method for Complete Force Balancing Simple Linkages," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 91 B, no. 1, pp. 21–26, 1969.
- [77] M. R. Smith, "Dynamic analysis and balancing of linkages with interactive computer graphics," *Computer Aided Design*, vol. 7, no. 1, pp. 15–19, 1975.
- [78] F. Tepper and G. Lowen, "General Theorems Concerning Full Force Balancing of Planar Linkages by Internal Mass Redistribution," *TransASME*, vol. 94B, no. 3, pp. 789–796, 1972.
- [79] R. S. Berkof, "Complete Force and Moment Balancing of Inline Four-Bar Linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 8, no. 3, pp. 397–410, 1973.
- [80] I. Esat and H. Bahai, "Theory of complete force and moment balancing of planer linkage mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, no. 6, pp. 903–922, 1999.

- [81] Cemil Bagci, "Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Link Mechanisms Using Balancing Idler Loops," *Journal of Mechanical Design*, vol. 104, no. 2, pp. 482–493, 1982.
- [82] A. C. Rao, "Elastodynamic balancing of machines," 1977.
- [83] K. Zobairi, S. S. Rao, and B. Sahay, "Kineto-elastodynamic balancing of 4R-four bar mechanisms combining kinematic and dynamic stress considerations," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 21, no. 4, pp. 307–315, 1986.
- [84] M. A. K. Zobairi, S. S. Rao, and B. Sahay, "Kineto-elastodynamic balancing of 4R-four-bar mechanisms by internal mass redistribution," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 21, no. 4, pp. 317–323, 1986.
- [85] R. S. Berkof and G. G. Lowen, "Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 93B, no. 1, pp. 53–60, 1971.
- [86] W. L. Carsont and J. M. Stephens, "Feasible Parameter Design Spaces for Force and Root-Mean-Square Moment Balancing an In-Line 4R 4-Bar Synthesized for Kinematic Criteria," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 13, no. 6, pp. 649–658, 1978.
- [87] F. Freudenstein, "Quasi lumped-parameter analysis of dynamical systems," in *Proc. 3rd Appl. Mech. Conf., Paper*, no. 27, Oklahoma State University, 1973.
- [88] G. Lowen and R. S. Berkof, "Determination of Force-Balanced Four-Bar Linkages With Optimum Shaking Moment Characteristics," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 93, no. 1, pp. 39–46, 1971.
- [89] S. Sconfeld, "Dynamische Synthese ebener Koppelgetriebe mide dun Programm-system KOGOP," *Maschinenbautechnik*, vol. 23, no. 3, pp. 119–124, 1974.
- [90] S. J. Tricarno and G. G. Lowen, "A Novel Method for Prescribing the Maximum Shaking Force of a Four-Bar Linkage with Flexibility in Counterweight Design 1," *Journal of Mechanical Design*, vol. 105, no. 3, pp. 511–519, 1983.
- [91] S. J. Tricarno and G. G. Lowen, "Simultaneous Optimization of Dynamic Reactions of a Four-Bar Linkage With Prescribed Maximum Shaking Force," *Journal of Mechanical Design*, vol. 105, no. 3, pp. 520–525, 1983.
- [92] J. P. Macey and E. R. Maki, "Optimum Balancing of Combined Pitching and Yawing Moments in High-Speed Machinery," *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, no. 3, pp. 571–577, 1981.

- [93] J. Wiederrich and B. Roth, "Momentum Balancing of Four-Bar Linkages," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 98, no. 4, pp. 1289–1295, 1976.
- [94] H. Dresig and S. Schönfeld, "Trägheitskraftausgleich für ebene Koppelgetriebe," *Wiss. Techn. Univ. Dresden*, vol. 20, no. 5, pp. 1341–1349, 1971.
- [95] H. Dresig, S. Naake, and L. Rockhausen, *Vollständiger und harmonischer Ausgleich ebener Mechanismen*. VDI-Verlag, 1994.
- [96] H. Dresig and P. Jacobi, "Vollständiger trägheitskraftausgleich von ebenen koppelgetrieben durch anbringen eines zweischlages," *Maschinenbautechnik*, vol. 23, no. 1, pp. 5–8, 1974.
- [97] J. L. Elliott and D. Tesar, "The Theory of Torque, Shaking Force, and Shaking Moment Balancing of Four Link Mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, vol. 99, no. 3, p. 715, 1977.
- [98] F. Tepper and G. Lowen, "On the Distribution of the RMS Shaking Moment of Unbalanced Planar Mechanisms: Theory of Isomomental Ellipses," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 95, no. 3, pp. 665–671, 1973.
- [99] A. L. Urba, "Geometric disposition of the points with rms value of shaking moment of spatial mechanisms," *Collection of the scientific works of the Academy of agricultural science of Lithuania*, vol. 27, no. 3/89, pp. 40–49, 1981.
- [100] S. Briot and V. Arakelian, "Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 57, pp. 13–26, 11 2012.
- [101] V. van der Wijk, S. Krut, F. Pierrot, and J. L. Herder, "Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 32, pp. 744–759, 6 2013.
- [102] M. Acevedo, "Active Dynamic Balancing of the Redundantly Actuated 2RR Planar Parallel Manipulator," tech. rep., 2014.
- [103] M. Acevedo, "Conditions for Dynamic Balancing of Planar Parallel Manipulators Using Natural Coordinates and their Application," *proceedings of the 14th IFToMM world congress.*, pp. 419–427, 2015.
- [104] L. V. Berestov, "Comparative Analysis of the Reactions in the Kinematic Pairs of the Four-Bar Linkages for the Different Balancing Methods," *Mekhanika Machin*, pp. 61–70, 1977.

- [105] L. V. Berestov, "Full dynamic balancing of pinned four-bar linkage," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Series: Mashinostroenie*, vol. 11, pp. 62–65, 1975.
- [106] G. Feng, "Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Four Types of Six-Bar Linkages," *Mechanical and Machine Theory*, vol. 24, no. 4, pp. 275–287, 1989.
- [107] G. Feng, "Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four-, five- and six-bar linkages with prismatic pairs," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, no. 2, pp. 183–192, 1990.
- [108] G. Feng, "Complete shaking force and shaking moment balancing of 17 types of eight-bar linkages only with revolute pairs," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, no. 2, pp. 197–206, 1991.
- [109] G. Feng, "Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four, five and six-bar linkages with prismatic pairs," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, no. 2, pp. 183–192, 1991.
- [110] Y. Q. Yu and M. R. Smith, "The effect of link form on the dynamic response of flexible mechanisms," in *Proc. of 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, (Milan, Italy), 1995.
- [111] P. Jacobi and W. Rose, "Experimentelle Untersuchung Dynamisch Ausgeglichenener ebener Koppelgetriebe," *Maschinenbautechnik*, vol. 21, no. 8, pp. 354–358, 1972.
- [112] O. C, "Experimentelle untersuchungen an Koppelgetrieben mit Leistungsausgleich," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 9, no. 2, pp. 239–246, 1974.
- [113] M. J. Walkers and R. S. Haines, "An experimental study of the effects of counterweights on a six-bar chain," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 17, no. 6, pp. 355–360, 1982.
- [114] S. Tricamo and G. Lowen, "A New Concept for Force Balancing Machines for Planar Linkages 1. Parti: Theory," *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, no. 3, pp. 637–642, 1981.
- [115] S. J. Tricamo and G. G. Lowen, "A New Concept for Force Balancing Machines for Planar Linkages. Part 2: Application to Four-Bar Linkage and Experiment," *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, no. 4, pp. 784–792, 1981.
- [116] M. Semenov, "Balancing of Spatial Mechanisms," *Journal of Mechanisms*, vol. 3, no. 4, pp. 355–365, 1968.
- [117] S.-T. Chiou and R.-J. Tsai, "The ideal shaft locations of three-rotating-mass balancers for spatial mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, no. 3, pp. 405–416, 1995.

- [118] R. E. Kaufman, "Complete Force Balancing of Spatial Linkages.," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 93, no. 2, pp. 620–626, 1971.
- [119] T. T. Gappoev, "Singularities of the balancing of the spatial mechanisms, Balancing of the machines and the apparatuses, Moscow, ed," *Mechanical engineering*, pp. 243–251, 1979.
- [120] V. A. Schcepetilnikov, "Balancing of mechanisms," 1982.
- [121] N. Chen and Q. Zhang, "A method for full shaking force balancing of spatial linkages and the relevant force balancing theory," in *Proceedings of the Sixth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi*, vol. 1, (New Delhi), pp. 329–332, 1983.
- [122] N.-x. Chen, "The complete shaking force balancing of a spatial linkage," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 19, no. 2, pp. 243–255, 1984.
- [123] N.-x. Chen, "Partial balancing of the shaking force of a spatial 4-bar RCCC linkage by the optimization method," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 19, no. 2, pp. 257–265, 1984.
- [124] Y.-Q. Yu, "Research on complete shaking force and shaking moment balancing of spatial linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 22, no. I, pp. 27–37, 1987.
- [125] Y.-Q. Yu, "Optimum shaking force and shaking moment balancing of the RSS'R spatial linkage," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 22, no. I, pp. 39–45, 1987.
- [126] Y.-Q. Yu, "Complete shaking force and shaking moment balancing of spatial irregular force transmission mechanisms using additional links," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 23, no. 4, pp. 279–285, 1988.
- [127] J. Wawrzecki, "A method of the balancing of spatial mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 8, pp. 1195–1209, 1998.
- [128] J. Wawrzecki, "The conditions of optimal balancing spatial mechanisms," in *Proceedings of the Tenth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland*, vol. 4, pp. 1589–1594, 1999.
- [129] I. Belonovskaya, F. Dimentberg, and L. Maysuk, "Design of self-balanced spatial mechanisms," *Machinovedenie*, vol. 1, pp. 3–9, 1987.
- [130] S. Zhang, "A constituting method of objective function for the dynamic optimum balance of shaking forces in linkage," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, no. 6, pp. 829–835, 1994.

- [131] J. Zhang and C. R. McInnes, "Reconfiguration of a four-bar mechanism using phase space connections," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 81, pp. 43–59, 12 2016.
- [132] I. S. Kochbv, "General method for full force balancing of spatial and planar linkages by internal mass redistribution," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 22, no. 4, pp. 333–341, 1987.
- [133] I. S. Kochev, "A new general method for full force balancing of planar linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 23, no. 6, pp. 475–480, 1988.
- [134] I. S. Kochev and G. Gurdev, "General criteria for optimum balancing of combined shaking force and shaking moment in planar linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 23, no. 6, pp. 481–489, 1988.
- [135] I. S. Kochev and G. H. Gurdev, "Balancing of linkages under the combined action of inertia and external forces," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 24, no. 2, pp. 93–98, 1989.
- [136] I. S. Kochev, "Full shaking moment balancing of planar linkages by a prescribed input speed fluctuation," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, no. 4, pp. 459–466, 1990.
- [137] I. Kochev, "Theory of symmetrical mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, no. 4, pp. 467–478, 1990.
- [138] I. Kochev, "Contribution to the theory of torque, shaking force and shaking moment balancing of planar linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, no. 3, pp. 275–284, 1991.
- [139] I. S. Kochev, "Optimum balancing of a class of multiloop linkages by function cognate transformations," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, no. 3, pp. 285–297, 1991.
- [140] I. Kochev, "r.m.s. shaking force along a given direction loci. principal axes and other properties," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 37–43, 1992.
- [141] I. Kochev, "Active balancing of the frame shaking moment in high speed planar machines," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 53–58, 1992.
- [142] Kochev I.S., "Balancing of planar linkages for prescribed principal axes and minor/major ratio of the r.m.s. shaking force," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 45–51, 1992.
- [143] I. Kochev, "Qualitative theory of the reactions and stresses in high speed planar linkages," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, no. 1, p. 6, 1992.

- [144] I. S. Kochev, “Planar assemblies of sub-linkages with optimal dynamic characteristics,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, no. 3, pp. 275–282, 1992.
- [145] M. Acevedo, M. Ceccarelli, and G. Carbone, “Application of counter-rotary counterweights to the dynamic balancing of a spatial parallel manipulator,” in *Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics*, vol. 162 of *Applied Mechanics and Materials*, pp. 224–233, Trans Tech Publications Ltd, 4 2012.
- [146] R. W. Mayne and J. P. Sadler, “Optimum Mechanism Design Combining Kinematic and Dynamic-Force Considerations,” *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 97, no. 2, pp. 662–670, 1975.
- [147] B. Porter and D. Sandler, “Synthesis of dynamically optimal four-bar linkages,” in *Proc. Conf. Mechanisms*, pp. 24–28, 1972.
- [148] J. P. Sadler and R. W. Mayne, “Balancing of mechanisms by nonlinear programming,” in *Third Applied Mechanism Conference, Paper*, no. 29(17), pp. 1–29, Oklahoma State Univ., 1973.
- [149] J. P. Sadler, “Balancing of six-bar linkages by nonlinear programming,” in *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 139–144, 1975.
- [150] H. Dresig and S. Schönfeld, “Rechnergestützte Optimierung der Antriebs- und Gestellkraftgrößen ebener Koppelgetriebe-Teil I,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 11, no. 6, pp. 363–370, 1976.
- [151] H. Dresig and S. Schönfeld, “Rechnergestützte Optimierung der Antriebs- und Gestellkraftgrößen ebener Koppelgetriebe-Teil II,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 11, no. 6, pp. 371–379, 1976.
- [152] P. Jacobi, “Bestimmung optimaler Koppelgetriebe nach dem Hauptkriterium Kräfte und Momente am Gestell,” *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule, Karl-Marx-Stadt*, vol. 14, no. 1, pp. 45–49, 1972.
- [153] J. M. O’Leary and G. W. Gatecliff, “Computer Aided Balance of Single-Cylinder Slider-Crank IC Engines,” *SAE Technical Paper 891767*, pp. 128–141, 1989.
- [154] N. Ming and E. Pennestri, “Optimum balancing of four-bar linkages Une méthode optimale pour l’équilibrage des quadrilatères articulés: A refined algorithm,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, no. 3, pp. 337–348, 1991.
- [155] M. J. Walker and R. S. Haines, “A study of counterweight synthesis for a 6-bar chain,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 17, no. 5, pp. 327–334, 1982.

- [156] R. Haines, “Minimum RMS shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, pp. 185–195, 1 1981.
- [157] F. R. Tepper and G. G. Lowen, “Shaking Force Optimization of Four-Bar Linkage With Adjustable Constraints on Ground Bearing Forces,” *Journal of Engineering for Industry*, vol. 97, pp. 643–651, 5 1975.
- [158] S. Segla, C. Kalker-Kalman, and A. Schwab, “Statical balancing of a robot mechanism with the aid of a genetic algorithm,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 1-2, pp. 163–174, 1998.
- [159] M. R. Farmani, A. Jaamialahmadi, and M. Babaie, “Multiobjective optimization for force and moment balance of a four-bar linkage using evolutionary algorithms,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25, pp. 2971–2977, 12 2011.
- [160] M. Bošković, S. Šalinić, R. Bulatović, and G. Miodragović, “Multiobjective optimization for dynamic balancing of four-bar mechanism,” in *6th International Congress of Serbian Society of Mechanics*, (Mountain Tara, Serbia), Serbian Society of Mechanics, 2017.
- [161] B. Demeulenaere, E. Aertbeliën, M. Verschuure, J. Swevers, and J. De Schutter, “Ultimate limits for counterweight balancing of crank-rocker four-bar linkages,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 128, pp. 1272–1284, 11 2006.
- [162] A. Zamuda, J. Brest, B. Boskovic, and V. Zumer, “Differential evolution for multi-objective optimization with self adaptation,” in *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 3617–3624, IEEE, 9 2007.
- [163] B. Feng, N. Morita, T. Torii, and S. Yoshida, “Optimum Balancing of Shaking Force and Shaking Moment for Spatial RSSR Mechanism Using Genetic Algorithm,” *Chemical Pharmaceutical Bulletin*, vol. 43, no. 3, pp. 691–696, 2000.
- [164] J. Bergstra and Y. Bengio, “Random Search for Hyper-Parameter Optimization,” *Journal of Machine Learning Research*, vol. 13, no. Feb, pp. 281–305, 2012.
- [165] G. Etesami, M. E. Felezi, and N. Nariman-Zadeh, “Pareto Optimal Multi-Objective Dynamical Balancing of a Slider-Crank Mechanism Using Differential Evolution Algorithm,” *International Journal of Automotive Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 3021–3032, 2019.
- [166] S. Slesongsom and S. Bureerat, “Vibration suppression of a single-cylinder engine by means of multi-objective evolutionary optimisation,” *Sustainability (Switzerland)*, vol. 10, 6 2018.

- [167] M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velázquez, and E. Haro, “Optimum balancing of the four bar linkage using fully cartesian coordinates,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 17, no. 06, pp. 983–990, 2019.
- [168] M. T. Orvananos-Guerrero, C. N. Sanchez, O. Davalos-Orozco, M. Rivera, R. Velazquez, and M. Acevedo, “Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms,” in *Proceedings - 2018 Nanotechnology for Instrumentation and Measurement, NANOofIM 2018*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 4 2019.
- [169] P. S. Shiakolas, D. Koladiya, and J. Kebrle, “On the optimum synthesis of six-bar linkages using differential evolution and the geometric centroid of precision positions technique,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, pp. 319–335, 3 2005.
- [170] SciPy.org, “scipy.optimize.differential_evolution,” 2020.
- [171] K. Chaudhary and H. Chaudhary, “Optimal design of planar slider-crank mechanism using teaching-learning-based optimization algorithm,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, pp. 5189–5198, 12 2015.
- [172] K. Chaudhary and H. Chaudhary, “Optimum Balancing of Slider-crank Mechanism Using Equimomentental System of Point-masses,” *Procedia Technology*, vol. 14, pp. 35–42, 2014.
- [173] M. T. Orvañanos-Guerrero, C. N. Sánchez, M. Rivera, M. Acevedo, and R. Velázquez, “Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates,” *Applied Sciences*, vol. 9, p. 4115, 10 2019.
- [174] M. Acevedo, “An Efficient Method to Find the Dynamic Balancing Conditions of Mechanisms: Planar Systems,” in *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, (Boston, Massachusetts, USA), p. V05BT08A068, ASME, 8 2015.
- [175] Q. Wang, J. Yin, A. Noureldin, U. Iqbal, Q. Wang, J. Yin, A. Noureldin, and U. Iqbal, “Research on an Improved Method for Foot-Mounted Inertial/Magnetometer Pedestrian-Positioning Based on the Adaptive Gradient Descent Algorithm,” *Sensors*, vol. 18, p. 4105, 11 2018.
- [176] F. Domingo-Perez, J. L. Lazaro-Galilea, I. Bravo, A. Gardel, and D. Rodriguez, “Optimization of the Coverage and Accuracy of an Indoor Positioning System with a Variable Number of Sensors,” *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 16, no. 6, 2016.
- [177] K. Xu, H. Liu, X. Zhu, and Y. Song, “Kinematic analysis of a novel planar six-bar bionic leg,” in *Mechanisms and Machine Science*, vol. 73, pp. 13–21, Springer Netherlands, 2019.

-
- [178] Y. Shao, Z. Xiang, H. Liu, and L. Li, “Conceptual design and dimensional synthesis of cam-linkage mechanisms for gait rehabilitation,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 104, pp. 31–42, 10 2016.