

UNIVERSIDAD PANAMERICANA

CAMPUS AGUASCALIENTES

ESCUELA DE INGENIERÍA

**“LAS DIFICULTADES PARA CONCEPTUALIZAR LEYES DE SENOS Y
COSENOS CON ALUMNOS DE SEGUNDO SEMESTRE DE BACHILLERATO”.**

TESIS

QUE PRESENTA

PÁVEL OCTAVIO GUTIÉRREZ MEDINA

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CON RECONOCIMIENTO DE VALIDEZ OFICIAL DEL INSTITUTO DE
EDUCACIÓN DE AGUASCALIENTES SEGÚN ACUERDO NÚMERO 0383 CON
FECHA DE NOVIEMBRE DE 2000.

DIRECTOR DE TESIS

MIE Adán Moisés García Medina

Aguascalientes, Ags., noviembre de 2013

Agradecimientos:

A mis maestros:

Por haberme compartido su sabiduría y conducirme al camino del éxito.

A mi esposa: Por haber comprendido mis ausencias, cuando no estuve con ella por estar estudiando.

A mis padres: Por haberme apoyado cuando muchas veces no tuve la solvencia económica para trasladarme a estudiar a la escuela y ellos me apoyaron incondicionalmente.

A mi hijo: Igual que con mi esposa, por no haber estado en momentos importantes para él y estar ausente por los dos años que duró la maestría.

Índice:

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.1.1 La competencia matemática.....	1
1.1.2 México en la perspectiva internacional.....	2
1.1.3 Porcentajes del estudiante por nivel de desempeño.....	3
1.2 El reconocimiento de una situación problemática.....	5
1.3 Objetivo de la investigación.....	10
1.3.1 Propósito de la investigación.....	11
1.4 Justificación.....	11
2 MARCO TEÓRICO	13
2.1 La corriente constructivista como base teórica para la elaboración de la propuesta de intervención pedagógica.....	13
2.1.1 Conceptualizar.....	14
2.1.2 Estructura clásica del concepto.....	14
2.1.3 Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget.....	15
2.1.3.1 Etapa Sensomotora (del nacimiento a los 2 años).....	18
2.1.3.2 Etapa Pre operacional (de 2 a 7 años).....	19

2.1.3.3	Etapa de operaciones concretas (de 7 a 11 años).....	19
2.1.3.4	.Etapa de las operaciones formales (de 11 a 12 años y en adelante).....	20
2.1.4	Contribuciones de la Teoría de Piaget a la educación.....	23
2.1.5	Teoría del desarrollo cognoscitivo de Vygotsky.....	25
2.1.6	Contribuciones educativas de la teoría de Vygotsky.....	29
2.1.7	La influencia de los conocimientos previos en el aprendizaje de los adolescentes.....	30
2.1.8	La Importancia de los conocimientos previos.....	34
2.2	Conceptos básicos relacionados con las leyes de senos y cosenos	35
2.2.1	Concepto de trigonometría.....	35
2.2.2	Concepto de Seno y Coseno.....	36
2.2.3	Concepto de Función.....	36
2.2.4	“Las funciones trigonométricas básicas”.....	37
2.2.5	Triángulos oblicuángulos.....	39
2.2.6	Ley de Senos.....	40

2.2.6.1	Deducción de la ley de Senos.....	40
2.2.6.2	Demostración de Baldor (2002, p. 372-373).....	42
2.2.6.3	Aplicación de la ley de Senos.....	45
2.2.6.4	Ejemplo práctico de la ley de senos.....	46
2.2.7	Ley de los cosenos.....	47
2.2.7.1	Deducción de la ley de cosenos.....	47
2.2.7.2	Demostración de Baldor (2002, p. 373 – 374).....	50
2.2.7.3	Aplicación de la ley de los cosenos.....	52
2.2.7.4	Ejemplo práctico de la ley de cosenos.....	53
3	Metodología.....	54
3.1	Diseño de la investigación.....	54
3.1.2	Grupo Experimental.....	54
3.1.1	Grupo Control.....	55
3.2	Muestra y población.....	56
3.3	Instrumentos y técnicas de obtención de información.....	59
4	Propuesta de intervención pedagógica.....	60
4.1	Datos de identificación.....	60
4.2	Antecedentes.....	61
4.3	Objetivo.....	62

4.4	Contenido por abordar.....	63
4.5	Descripción de las sesiones.....	64
4.6	Criterios de evaluación.....	90
5	Resultados obtenidos a partir del análisis de la propuesta didáctica.....	92
5.1	Análisis sintético de la información de logro.....	92
5.2	Guía de observación del grupo experimental y de control.....	98
	Conclusiones.....	119
	Referencias bibliográficas.....	121

Introducción.

El siguiente trabajo consta de cinco apartados: Planteamiento del problema, Marco Teórico, Metodología, Propuesta de intervención pedagógica y Resultados obtenidos a partir de la propuesta didáctica.

En el primero, titulado Planteamiento del problema, se hablará de la definición de competencia vista desde diferentes perspectivas, la mundial (OCDE) que está concebida como las competencias esenciales para el desarrollo de las personas en una sociedad que se va modificando día con día, enfrentando situaciones de la vida cotidiana utilizando el razonamiento matemático para aclarar y resolver problemas. También se tomó a México desde una perspectiva internacional, donde es comparado con otros países en nivel de desempeño educativo, así como también haciendo un balance de la situación en la que se encuentra y sus necesidades. Por último, en el primer capítulo se habla de las causales que motivaron a este tema de estudio.

En el segundo capítulo, titulado Marco Teórico se explicarán las teorías que sientan las bases psicológicas del método constructivista del aprendizaje, desde el punto de vista teórico, basado en las investigaciones de Piaget y de Vygotsky. La teoría de Piaget aporta a los educadores cómo entender la interpretación del mundo por parte del niño y el adolescente. La de Vygotsky sirve para comprender los procesos sociales que influyen en los procesos de sus habilidades intelectuales.

En el capítulo tres, denominado La metodología, se describirán los procedimientos que se utilizaron en la intervención pedagógica. En primer lugar, se aplicó un examen pretest que permitió saber con qué conocimientos previos contaban los estudiantes antes de la intervención; posteriormente, se aplicó la propuesta de intervención pedagógica y al final un *postest* que permitió conocer el grado de avance a partir de la aplicación del trabajo presentado.

En el capítulo cuatro, llamado Propuesta de Intervención Pedagógica, se hablará del proceso que se llevó durante la PIP. Se presentan las planeaciones didácticas, que permiten analizar de manera detallada las actividades que se realizaron durante este trabajo, y que a su vez se apoyó en fundamentos pedagógicos que sustentaron el trabajo realizado.

En el capítulo cinco, se presentan los Resultados obtenidos a partir de la propuesta didáctica. El capítulo está dividido en dos partes, la primera presenta de forma sintética el grado en que los alumnos fueron incrementando su nivel de logro a partir del trabajo de intervención que se realizó. En la segunda parte, se incluyen resultados de una observación, donde se informa de manera detallada todo lo que ocurrió durante el desarrollo de la PIP y que nos permite ver el proceso de evolución del aprendizaje, tanto del grupo experimental como del grupo control.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes.

Las matemáticas en la actualidad son concebidas como las competencias esenciales para el desarrollo de las personas, en una sociedad que se va modificando día con día, y ésta a su vez se hace más demandante y competitiva. Esto exige que las personas que tengan aspiraciones de seguirse superando sean competentes en la Lectura, Ciencias y Matemáticas.

Toda persona que enfrenta situaciones de la vida cotidiana, utiliza el razonamiento matemático para aclarar y resolver problemas que se le van presentando. Estos usos matemáticos se basan en las habilidades y conocimientos adquiridos en la escuela, pero estos conocimientos también deben de aplicarse en contextos menos estructurados, donde le permitan al individuo decidir cuál conocimiento adquirido será el más eficaz para resolver el problema que se le plantea.

1.1.1 La competencia matemática.

PISA define la competencia matemática como: “La capacidad del individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, especiales, de probabilidad o de otro tipo. Además, esta competencia tiene que ver con la capacidad para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios

fundados, y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que pueda satisfacer las necesidades de la vida diaria de un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OECD, 2010).

Las matemáticas se desempeñan en tres dimensiones: el “Contenido”, que tiene como finalidad el tipo de tema abordado en los problemas y tareas matemáticas; la segunda se refiere a los “Procesos” que conciernen a la activación de los fenómenos que se presentan con las matemáticas y el modo en que éstos sean resueltos; por último, la tercera dimensión corresponde a la “Situación” refiriéndose a la ubicación de los problemas matemáticos.

1.1.2 México en la Perspectiva internacional del logro educativo.

Los resultados de la prueba PISA que se viene aplicando cada tres años desde 2003, indican que en México más de la mitad de sus estudiantes de 15 años no alcanza siquiera niveles de logro en Matemáticas considerados como básicos. México está al mismo nivel que países con economías par similares; en cambio, algunos países como Corea, Finlandia o la provincia de Shanghai-China han tenido un auge importante con medias de desempeño cercanos a los 600 puntos. En cuanto América Latina, Uruguay es el que se encuentra con la mejor posición con una media de 427 puntos.

1.1.3 Porcentajes de estudiantes por nivel de desempeño.

La escala de matemáticas mostró que México sólo tiene el 5% de estudiantes en niveles altos, 44% en los niveles intermedios y 51% en los más bajos; esto es preocupante, porque estamos a una escala muy lejana de los países asiáticos, destacando en América Latina Uruguay con la mejor distribución con 10% en los niveles más altos.

En cuanto a las perspectivas nacionales, cuatro entidades tuvieron un desempeño superior en la media: Distrito Federal, Nuevo León, Chihuahua y Aguascalientes, pero éstas no alcanzaron el promedio de la OCDE de 496 puntos.

En conclusión, el informe 2009 de PISA analiza que hubo un incremento en el desempeño de alumnos, atribuyéndose a que hubo un aumento en el nivel de vida de la población mexicana. El informe también hace referencia a los resultados 2006 de PISA, argumentando con cautela que el Sistema Educativo Mexicano debe de enfrentar dos problemas: que existe un excesivo alumnado en los niveles de logro inferiores, argumentando que los alumnos no tienen la preparación suficiente para los estudios superiores o enfrentarse con éxito al mercado laboral y que en los niveles superiores de logro se presenta una alta disminución del alumnado, argumentando de este último que no se ha preparado adecuadamente para los futuros niveles directivos del país.

Algo muy importante que debe resaltarse, es que PISA hace la recomendación siguiente: no solamente basta con aumentar la cantidad de recursos económicos dedicados a la educación, sino también deben de modificarse las prácticas

escolares que con el paso del tiempo se han ido arraigando, y que a causa de estos patrones que se van heredando de generación en generación, estas prácticas prevalecen en la sociedad.

Como comentario final PISA revela que en nuestro país hay muchas cosas por hacer para que los estudiantes alcancen un nivel que les permita analizar, razonar y comunicarse de manera satisfactoria, de tal forma que tengan la capacidad de resolver problemas de la vida cotidiana.

Nuestro país mantiene porcentajes muy altos de estudiantes con niveles bajos de desempeño y, por contraparte, niveles muy bajos en los altos niveles de desempeño. Esta situación preocupa, porque esto significa que muchos estudiantes tendrán enormes dificultades para seguir aprendiendo a lo largo de su vida y como dice el estudio realizado, no podrán constituirse como participantes productivos en la sociedad.

También tiene como meta principal, formar alumnos que sean capaces de procesar y darle sentido a las consignas matemáticas, de comprender lo que éstas les presentan, de llegar a inferencias y deducciones y de irlos relacionando con los conocimientos previos, que les permitan a ellos establecer juicios de contenido y calidad.

PISA argumenta que para que nuestro país forme individuos competentes, implica seguir reforzando las prácticas de enseñanza en las aulas, que les permitan desarrollar competencias matemáticas de mayor complejidad y esto a su

vez de mejorar los procesos de formación profesional de los maestros, tomando en cuenta a su vez para atender sus dificultades y necesidades.

1.2 El reconocimiento de una situación problemática.

El tema que elegí lleva por título **Las dificultades para conceptualizar leyes de senos y cosenos con alumnos de segundo semestre de bachillerato.**

Las preguntas que surgieron al trabajar con este tema son las siguientes:

1. ¿Por qué a los alumnos se les dificulta conceptualizar las leyes de senos y cosenos?
2. ¿Por qué se les dificulta resolver problemas relacionados con leyes de senos y cosenos?
3. ¿Qué causas motivan a esta deficiencia?
4. ¿Cómo se puede lograr ese aprendizaje significativo si el alumno carece de conocimientos previos?
5. ¿Cuál es el grado de profundidad con la que trabaja la Escuela Secundaria los temas relacionados a la trigonometría?
6. ¿Qué consecuencia trae el no conceptualizar los aprendizajes?
7. ¿De qué forma influye la pedagogía del maestro?
8. ¿Qué debe de fomentar el docente para obtener aprendizajes significativos esperados?
9. ¿Cómo influye la conducta de los alumnos en los aprendizajes esperados?
10. ¿Qué método de enseñanza será más útil para la conceptualización de las identidades trigonométricas?

Estas preguntas surgieron al trabajar los temas relacionados a la trigonometría, en particular “Leyes de senos y cosenos”, al darme cuenta que los alumnos de segundo de bachillerato no lograban entender a cabalidad cómo se resuelven este tipo de ejercicios y por más que les demostraba, no interpretaban la intención de éstos, lo que me llevó a entender que no estaban conceptualizando las leyes de senos y cosenos.

Noté que al no poder conceptualizar las leyes de senos y cosenos se les dificultó el resolver ejercicios, tomando en cuenta que este tipo de prácticas involucran un grado de abstracción matemático y un dominio del álgebra, involucrando temas como fracciones algebraicas, ecuaciones y, si redundo en este último, también es tema de estudio por el grado de abstracción y complejidad.

Una cuestión importante que no debemos olvidar es que, lo habitual es que trabajemos los cursos de matemáticas con un fuerte énfasis en la memorización, y suele dársele menos importancia a la reflexión, perjudicando que a los alumnos no se les permite visualizar de una manera exhaustiva las múltiples formas de solucionar los problemas matemáticos.

Un elemento adicional que ocasiona que los estudiantes no entiendan esta clase de problemas (Leyes de senos y cosenos), es porque carecen de conocimientos previos, de lo cual se hablará más adelante. Asimismo, al no dominar el álgebra se convierte para los alumnos en un martirio pues, como se sabe, el álgebra es fundamental en la resolución de estos problemas porque facilitan y ayudan a reducir tiempos cuando se le aprovechan para simplificar; sin embargo, resulta que la mayoría de los alumnos no la dominan en su totalidad, dificultándose el

proceso de resolución; en cuanto a las fórmulas trigonométricas básicas, el hecho de que las memoricen y no las reflexionen, dificulta también en el proceso de resolución de estos ejercicios, porque no logran identificar en el momento preciso cuándo hay que sustituir una fórmula que permita resolver de manera más sencilla los problemas que se presentan.

En lo que respecta a los conocimientos previos, el problema es que en las escuelas secundarias de donde provienen, los programas no son lo suficientemente profundos y retoman los temas de trigonometría de una manera muy superficial, porque le dan más importancia a cuestiones donde por medio de ejercicios de aplicación, lleguen a resolver problemas sin tener una idea clara de lo que están haciendo y en no pocas ocasiones los temas de trigonometría se dejan inconclusos o simplemente no se revisan siquiera.

El Programa de Estudio de Secundaria (2006; p. 11) señala que “El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sustenta en programas para la educación secundaria consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y formular argumentos que validen los resultados”.

En el mismo Programa de Estudio de Secundaria (2006; p. 11) también se enfatiza que “La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización”

Como se comentó con anterioridad, los conocimientos previos que tiene el alumno de Secundaria son muy vagos y son carentes de profundidad, que se refleja

cuando no puede comprender cuáles son los aprendizajes esperados, por lo que se convierten en conocimientos complejos para el estudiante, del cual mi intención es buscar estrategias para su mayor comprensión, porque se espera de esto que ellos puedan resolver problemas que aparenten complejidad a simple vista, pero con técnicas eficaces se logre rescatar y conceptualizar los aprendizajes.

Al no llegar a un aprendizaje significativo, el alumno pierde el interés por aprender. Esto lleva como resultado a que las clases sean largas y aburridas para los alumnos, también he notado que dejan de entrar a clases, en casos esporádicos se pierde la disciplina grupal, pero lo más preocupante es que el índice de reprobación se eleva y eso es lo que menos se pretende; al contrario, se espera que el alumno logre la reflexión y la conceptualización del conocimiento.

El papel del maestro es también un factor que influye en el aprendizaje del estudiante, porque él enseña como aprendió en su época de estudiante de forma “conductista” y se apega a esa pedagogía que consistía en la transmisión de los conocimientos carentes de reflexión, por lo que provoca que el alumno no desarrolle habilidades y competencias que le permitan desarrollarse, haciendo de él una persona dependiente.

El Programa de Estudios (2006; p. 7) también señala que “La actitud positiva hacia las matemáticas consiste en despertar y desarrollar en los alumnos la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, la creatividad para formular conjeturas, la flexibilidad para modificar su propio punto de vista y la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas; así mismo consiste en asumir una postura de confianza en la capacidad de aprender.”

Comentando al respecto, mientras no se acabe con esta costumbre pedagógica, será imposible llegar al propósito planteado, puesto que cuando un docente está acostumbrado a trabajar de una forma que le ha funcionado por muchos años no se arriesgará a modificarlo, también para ellos y para los mismos alumnos es muy drástico, el trabajar de una manera reflexiva, porque para los mismos maestros las consignas son complejas y difíciles de contestar, por lo tanto ¿Cómo serán para los alumnos?

La conducta del alumno es también un factor que influye en su aprendizaje. Hasta este momento solamente he hablado del docente, se debe de reconocer que es imposible dedicarle a esta parte mucho porque también sería tema de estudio, pero generalizando, la edad en la que se encuentran (14 a 16 años), la relación que tienen con su familia, pares, afecta en el rendimiento escolar, y muchas veces aunque se tenga al mejor de los maestros no se puede llegar a tener aprendizajes esperados, hasta aquí sería la opción idónea, la participación de los padres en colaboración con los maestros para ayudar al joven a retomar el estudio y así que él adquiera una educación de calidad.

Es de vital importancia conocer qué métodos pedagógicos tendrán mayor resultado para el aprendizaje de las Leyes de senos y cosenos, porque en la actualidad nuestro sistema educativo nacional está apostando por una educación por competencias.

Por otro lado, haré comparaciones con diferentes grupos que me permitan saber a groso modo, qué método pedagógico será el más útil para la enseñanza de las Leyes de senos y cosenos.

1.3 Objetivos de investigación

El siguiente trabajo tiene como finalidad buscar estrategias de enseñanza que permitan que el alumno de segundo semestre de bachillerato adquiera las competencias necesarias que le permitan desarrollar el aprendizaje y conceptualización de las Leyes de senos y cosenos, sabiendo de antemano que éstas por su grado de abstracción y complejidad requieren de procesos de enseñanza progresista.

Para lograr el propósito planteado, se pretende que el alumno de segundo de bachillerato reciba actividades de estudio que despierten en ellos el interés por aprender y reflexionar, encontrando diferentes formas de resolver problemas, formulando ellos argumentos que les permitan validar sus resultados. Para eso no se trata de que el maestro busque explicaciones sencillas, sino en analizar y proponer problemas interesantes para que el alumno aproveche lo que ya sabe y avance con el uso de técnicas y razonamientos más eficaces. También se harán comparaciones con grupos diferentes, aplicando enseñanza tradicional por un lado y por otro aplicando actividades que generen y despierten su interés por aprender. A partir de esta propuesta, se trabajará con alumnos que se enfrentarán con nuevos retos que reclaman actitudes distintas frente al conocimiento matemático e ideas diferentes de lo que significa enseñar y aprender.

1.4 Justificación

El propósito principal de este trabajo es buscar estrategias pedagógicas que permitan mejorar el desempeño escolar de los estudiantes, que encuentren el gusto por las matemáticas, con el uso de problemas interesantes que permitan analizar, reflexionar, ponerlo en plenaria con sus compañeros y al final que lo validen para llegar a un conocimiento significativo.

Hemos visto con incertidumbre que los resultados académicos no son los esperados, también es desilusionante que a pesar de que trabaja con esmero y dedicación, los temas relacionados con Leyes de senos y cosenos no son de su agrado, por el grado de complejidad y solamente algunos alumnos buscan por su cuenta (ya sea consultando en libros, buscando asesorías, en internet etc.), cómo resolver estos problemas, pero la inmensa mayoría simplemente se muestran indiferentes a estos aprendizajes, no son autodidactas y los mismos docentes hemos hecho muy poco sobre este aspecto, porque no se ha fomentado la investigación, ni el uso de la reflexión.

Otro factor que debemos de tomar en consideración es que los estudiantes no están llegando al bachillerato bien preparados, carecen de conocimientos indispensables que les permitan asimilar los nuevos conocimientos, convirtiéndose en complejo, por lo que la responsabilidad académica para los maestros es aún mayor.

Tampoco se ha fomentado el auténtico trabajo en equipos, sabiendo de antemano que ofrece la posibilidad de expresar sus ideas y enriquecerla con la opinión de los

demás, desarrollando la colaboración y habilidad para argumentar; de esta manera, se facilita la puesta en común de los procedimientos encontrados.

Biblioteca UP Aguascalientes

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 La corriente constructivista como base teórica para la elaboración de la propuesta de intervención pedagógica

Al observar a los jóvenes de segundo semestre de Bachillerato noté que ellos no se encontraban motivados por aprender ¿Qué causaba esta situación? ¿Por qué para ellos no era significativo ese aprendizaje?

El primer capítulo de esta investigación está orientado en conocer los factores constructivistas de aprendizaje basado en una idea muy simple: el adolescente crea su conocimiento del mundo a partir de sus interacciones con el ambiente, para ellos es necesario operar sobre la información, manipularla para que tenga significado.

Dentro de este capítulo se explicarán las teorías que sientan las bases psicológicas del método constructivista del aprendizaje, desde el punto de vista teórico, basado en las investigaciones de Piaget y de Vygotsky. La teoría de Piaget aporta a los educadores cómo entender la interpretación del mundo por parte del niño y el adolescente. La de Vygotsky sirve para comprender los procesos sociales que influyen en los procesos de sus habilidades intelectuales.

2.1.1 Conceptualizar

Según la Real Academia de la Lengua Española (RAE) conceptualizar se entiende como “la Idea que concibe o forma el entendimiento”; los conceptos cumplen esa función: agrupar y organizar los contenidos y las cosas del mundo conservando y relacionando sus rasgos, “el entorno resultaría enormemente caótico si nuestras interacciones no estuvieran medidas por una visión estructurada de los acontecimientos que suceden en él” (Benlloch, 1997, p.21).

2.1.2 Estructura Clásica del Concepto

Desde una perspectiva clásica “un concepto está constituido por una serie de atributos necesarios y suficientes de tal modo que todos sus ejemplares tienen unos atributos comunes y ningún ejemplar podría poseer esos atributos”. (Pozo, 1989, p. 22). El sujeto al iniciar la tarea no conoce el concepto y debe de tratar de descubrirlo. No parece muy probable que la formación de conceptos con significados siga estrategias, supone que la formación de conceptos se reduce a unos procesos de comprobación de hipótesis, cuyos mecanismos básicos consisten en la búsqueda de rasgos que después sean reestructurándolos a un pensamiento más complejo.

Según Benlloch (1989, p. 25) las críticas a la formación de conceptos como estructura clásica son las siguientes:

- Usan conceptos muy simples desprovistos de significado (colores formas, etc.)

- Las tareas suelen existir casi siempre y básicamente identificando conceptos, no estudian la formación de conceptos.
- No dicen nada sobre la formación de conceptos con nuevos significados.

2.1.3 Teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget.

“Según el enfoque constructivista del aprendizaje el adolescente igual que el niño crea su conocimiento del mundo a partir de sus interacciones con el ambiente, los profesores facilitan el proceso centrando su atención, haciéndole preguntas y estimulando su pensamiento”. (Messe, 1997, p. 101)

De esta forma el autor (1997, p. 101) afirma “que el constructivismo se basa en una idea muy simple: el adolescente debe de construir su conocimiento del mundo donde vive.” El conocimiento no es algo que el maestro pueda transmitir directamente a los estudiantes, es necesario operar sobre la información, manipularla y transformarla si queremos que tenga un significado en ellos; por lo tanto la función de maestro consiste en ayudar a los alumnos a representar sus ideas formulándoles preguntas que no se les habían ocurrido, por lo que la función constructivista del aprendizaje es la forma en la que el adolescente concibe el mundo.

Así mismo el autor comenta que todos incluso los niños, “comienzan a organizar los conocimientos del mundo que los rodea llamándolos esquemas por lo que se puede decir que el niño conoce su mundo a través de acciones físicas que realiza,

mientras que los de mayor edad pueden realizar operaciones mentales y usar símbolos”, por lo tanto el niño a medida que va pasando sus etapas cognitivas, mejora su capacidad de emplear esquemas más complejos y abstractos que le permiten organizar su conocimiento, por lo que se puede concluir que el desarrollo cognitivo no consiste tan sólo en construir nuevos esquemas sino en reorganizar y diferenciar los ya existentes. (Messe, 1997, p. 102)

Las personas nacen con la tendencia a organizar procesos del pensamiento en estructuras psicológicas o sistemas para comprender y relacionarse con el mundo, “las estructuras simples se combinan y coordinan continuamente para perfeccionarse y con ellos ser más eficaces”. (Pearson, 1997, p. 28)

Existen principios básicos que Piaget llama Funciones Invariables que rigen el desarrollo intelectual del adolescente. El primero es la organización, una predisposición innata en todas las especies. Conforme el niño va madurando integra los patrones físicos simples o esquemas mentales a sistemas más complejos. El segundo el principio en la adaptación. “Para Piaget todos los organismos nacen con la capacidad de ajustar sus estructuras mentales o conductas de las exigencias del ambiente”. (Messe, 1997, p. 103)

Otro principio importante es la asimilación, proceso que consiste en moldear activamente la nueva información para encajarla en los sistemas existentes; la asimilación no es un proceso pasivo, a menudo se requiere modificar y transformar la información nueva para incorporarla a la ya existente es en ese momento cuando se convierte en compatible con lo que ya se conoce.

Al respecto Pearson (1997, p. 29) afirma que “la asimilación tiene lugar cuando la gente utiliza los esquemas que posee para dar sentido a los acontecimientos del mundo; incluye el intento de entender algo nuevo y ajustarlo a lo que ya conoce”.

Otro principio es la acomodación, que “es el proceso de modificar los esquemas existentes para encajar la nueva información discrepante”. (Messe, 1997, p. 103), de acuerdo con Piaget es la búsqueda del balance, pues “la gente pone a prueba lo adecuado de sus procesos del pensamiento para alcanzarlos”. (Pearson, 1997, p. 29)

El mismo Pearson (1997, p. 29) comenta que el proceso de equilibrio funciona de la siguiente manera:

Hay equilibrio al aplicar un esquema en particular a un acontecimiento o una situación donde el esquema funciona, pero si el esquema no produce un resultado satisfactorio, entonces hay un desequilibrio y nos sentimos incómodos. Esa incomodidad nos motiva a buscar una solución mediante la asimilación y la acomodación con lo que nuestro pensamiento avanza, Para equilibrar nuestros esquemas de comprensión del mundo y los datos que éste proporciona, asimilamos continuamente nueva información mediante nuestros esquemas y acomodamos el pensamiento siempre que los intentos desafortunados de asimilación produzcan un desequilibrio.

De igual manera, el autor afirma “que el equilibrio es la tendencia innata de conservar estable las estructuras cognoscitivas aplicando para ello los procesos de asimilación y de acomodación”. El equilibrio es un concepto original de la teoría de Piaget y designa la tendencia innata del ser humano a mantener en equilibrio sus estructuras cognoscitivas; también, sostuvo que “los estados de desequilibrio son tan intrínsecamente insatisfactorios que nos sentimos impulsados a modificar nuestras estructuras cognoscitivas con tal de restaurar el equilibrio”. (Pearson, 1997, p. 29)

2.1.3.1 Etapa sensomotora (del nacimiento a los 2 años).

Durante el periodo sensorio motor, el niño aprende los esquemas de dos competencias básicas: Primera, la conducta orientada a metas y segunda la permanencia de los objetos. “Piaget las consideraba estructuras básicas del pensamiento simbólico y de la inteligencia humana”. (Messe, 1997, p. 104)

Con relación a lo anterior se puede comentar que en esta etapa, es evidente la transición del lactante reflejo en acciones orientadas a una meta al momento de nacer, su comportamiento está controlado fundamentalmente por los reflejos (succionar, llorar y mover el cuerpo). Ya al final de esta etapa el niño empieza a experimentar otra forma de alcanzar sus metas cuando no logra resolver un problema con los esquemas actuales “como por ejemplo, si el juguete está fuera de su alcance posiblemente quiera alcanzarlo con un objeto”. (Messe, 1997, p. 104)

2.1.3.2 Etapa pre operacional (de 2 a 7 años).

La capacidad de pensar en objetos, hechos o personas ausentes marca el comienzo de la etapa pre operacional; entre los 2 a 7 años, “el niño demuestra una mayor habilidad para emplear símbolos, con los cuales puede representar las cosas reales del entorno”. (Messe, 1997, p. 106)

Messe afirma que las primeras formas eran la imitación diferida, como la capacidad de repetir una secuencia simple de acciones o sonidos horas o días después que se reprodujeron inicialmente, también este tipo de pensamiento permite al niño adquirir el lenguaje, “comienza a representar el mundo a través de pinturas o imágenes mentales, lo cual ha hecho que algunos expertos califiquen de lenguaje silencioso el arte infantil.” (1997, p. 106)

2.1.3.3 Etapa de las operaciones concretas (de 7 a 11 años).

Durante los años de primaria, el niño empieza a utilizar las operaciones mentales y la lógica para reflexionar sobre los hechos y los objetos de su ambiente, “esta capacidad le permite abordar problemas en forma más sistemática que el niño que se encuentra en la etapa pre operacional”. (Messe, 1997, p. 111)

De la misma forma Messe afirma que el niño ha logrado varios avances en la etapa de las operaciones concretas, primero su pensamiento muestra menos rigidez y mayor flexibilidad, entiende que las operaciones pueden invertirse o negarse mentalmente, esto es “decir que puede volver a su estado original un

estímulo”. (1997, p. 111); esta acción es conocida como seriación, capacidad de ordenar los objetos en progresión lógica; por ejemplo del más pequeño al más alto, “los niños de primaria pueden ordenar los conceptos de tiempo a partir de una magnitud creciente o decreciente”. (Messe, 1997, p. 112)

2.1.3.4 Etapa de las operaciones formales (11 a 12 años y en adelante).

Se da el nombre de operaciones formales a la capacidad de pensar de forma abstracta y de razonar, “cuando los niños inician la etapa de las operaciones formales su pensamiento empieza a distinguir entre lo real (concreto) y lo posible (abstracto)”. (Messe, 1997, p. 115)

De la misma forma el autor comenta que “una vez lograda la capacidad de resolver problemas como los de seriación, el niño de 11 a 12 años comienza a formarse un sistema coherente de lógica formal...” (1997, p. 115) es en la etapa de las “operaciones formales” en la que el pensamiento hace transición de lo real a lo posible, los niños de primaria razonan lógicamente, pero sólo en lo tocante a personas, lugares o cosas tangibles y concretas, en cambio los adolescentes piensan en cosas con las cuales nunca han tenido contacto, pueden generar ideas acerca de eventos que nunca ocurrieron, los adolescentes de mayor edad pueden discutir complejos problemas sociopolíticos, que incluyen ideas abstractas, también pueden resolver problemas algebraicos, realizar pruebas de geometría, etc.

Otra opinión acerca de las operaciones formales es la de Pearson (1997, p. 37), quien afirma que “son tareas que comprenden el pensamiento abstracto y la

coordinación de diversas variables”. De esta forma en este nivel de operaciones formales siguen dándose las operaciones y habilidades dominadas en etapas anteriores, es decir el pensamiento formal es reversible e interno y está organizado en un sistema de elementos interdependientes; sin embargo, “el centro del pensamiento cambia de lo que es a lo que puede ser”. (Pearson, 1997, p. 37)

Es importante mencionar que, al llegar a la etapa de la adultez, las operaciones mentales corresponden a cierto tipo de operaciones lógicas denominada lógica de proposiciones, la cual según Piaget eran indispensable para el desarrollo del pensamiento de esta etapa. “La lógica proposicional es la capacidad de extraer una inferencia lógica a partir de una relación entre dos afirmaciones o premisas en el lenguaje cotidiano que puede expresarse en una serie de proposiciones hipotéticas”. (Messe, 1997, p. 117)

Al respecto, Piaget dice que este razonamiento lógico proporcional consiste en reflexionar sobre la relación entre dos afirmaciones, es decir los adolescentes parecen comprender que los argumentos lógicos tiene una vida propia imposible; también la lógica proposicional, es indispensable para razonar acerca de problemas científicos, como determinar la manera de clasificar un animal o una planta, un ejemplo sería “Si todos los mamíferos amamantan a su cría, entonces todos serán mamíferos”. (Messe, 1997, p. 117)

Messe (1997, p. 111) afirma que “a medida en que el adolescente aprende a utilizar una lógica proposicional, empiezan a abordar los problemas de un modo

más sistemático, formulando de este modo hipótesis, determina cómo compararlas con los hechos y excluye las que le resulten falsas.”

Por lo tanto el uso del pensamiento hipotético-deductivo, que es la “capacidad de generar y probar hipótesis de un modo lógico y sistemático” es utilizado de gran manera por los adolescentes. (Messe, 1997, p. 111)

En relación con lo anterior, es relevante mencionar que el razonamiento hipotético deductivo, conocido como la estrategia de solución de problemas de las operaciones formales es donde “el que el individuo empieza por identificar todos los factores que influyen en el problema para luego deducir y evaluar sistemáticamente las soluciones concretas”. (Pearson, 1997, p. 37)

Según Pearson esto es “quien maneja las operaciones formales puede considerar una situación hipotética y razonar deductivamente, la capacidad de considerar posibilidades abstractas es crucial para buena parte de las matemáticas y las ciencias”. El pensamiento organizado y científico de las operaciones formales requiere que los estudiantes generen sistemáticamente diferentes posibilidades para determinada situación y por último al pensar hipotéticamente sobre alternativas, identificar todas las combinaciones posibles y analizar el pensamiento propio tiene consecuencias interesantes. Los adolescentes también pueden deducir el conjunto de posibilidades que sean mejores e imaginar mundos ideales, por lo que se puede decir que es la razón de “que muchos estudiantes de esta edad se interesan en utopías, causas políticas y problemas sociales” (Pearson, 1997, p. 37). El egocentrismo adolescente es la suposición de que todos los

demás comparten los pensamientos, los sentimientos y las preocupaciones de uno. El autor afirma que a diferencia de los niños egocéntricos los adolescentes no niegan que otras personas puedan tener percepciones e ideas distintas, concentrando más bien en las propias y en el análisis de sus opiniones y actitudes, “considerando también el pensamiento de los demás, por lo general suponen que los demás comparten su interés por sus pensamientos, sentimientos y conductas.” (1997, p. 38)

2.1.4 Contribuciones de la teoría de Piaget a la educación

Piaget pensaba que “aprender a aprender” debe ser el eje central de la instrucción y que los niños construyen su conocimiento a partir de las interacciones con el ambiente.

Mesee (1997, p.124) comenta que “una de las contribuciones más importantes de la obra de Piaget se refiere a los propósitos de la educación, él critica los métodos que hacen referencia a la transición y memorización de conocimientos”, por lo que él afirmaba que estos desalentaban al alumno a aprender a pensar, ni menos a confiar en sus procesos de pensamiento, por contraparte creía que “aprender a aprender” debe ser la meta la educación, de modo que los niños se conviertan en pensadores, creativos , inventivos e independientes, por lo que la educación debe moldear la mente del niño. “Según Piaget, se estimula el aprendizaje cuando las actividades están relacionadas con lo que ya se conoce, pero a un poco por encima del nivel actual del conocimiento”. (Mesee, 1997, p. 125)

Según el mismo autor (Messee, 1997, p. 125) “el aprendizaje se facilita al máximo cuando las actividades están relacionadas con lo que el niño ya conoce, pero al mismo tiempo, superando su nivel actual de comprensión para provocar un conflicto cognoscitivo”, de esta forma que el niño se sienta motivado para reestructurar su conocimiento, cuando entra en contacto con la información o experiencias ligeramente incongruentes con lo que ya conoce.

Otra aportación que hizo Piaget a la educación se refiere a la función que tiene la interacción social dentro del desarrollo cognoscitivo del niño. Piaget (1976) señaló que “Ninguna actividad intelectual puede llevarse a cabo mediante acciones experimentales e investigaciones espontáneas, sin la colaboración espontánea, sin la colaboración voluntarias entre individuos, esto es entre estudiantes.” (Messee, 1997, p. 125). En los niños que sean de mayor edad, especialmente entre los adolescentes, la interacción que se haga entre ellos y los adultos es una fuente natural que provoca el conflicto cognoscitivo, conflicto que aclara sus ideas, conociendo otras opiniones y conciliando con las ideas ajenas. (Messee, 1997, p. 125).

Piaget sostuvo que el “aprendizaje está subordinado al desarrollo no a la inversa”... su teoría rompe radicalmente con la creencia de que el aprendizaje puede estimular el desarrollo... para Piaget esta etapa del desarrollo limita a que los niños pueden aprender y la manera en que lo harán. No es posible acelerar el desarrollo por medio de experiencias del aprendizaje.” (Messee, 1997, p. 125)

Con relación con lo anterior la meta de la educación no es solamente aumentar el conocimiento, sino crear la posibilidad de que el niño invente y descubra, cuando se enseña demasiado rápido, se impide que haga eso, “enseñar significa crear las situaciones donde puedan describirse las estructuras (mentales), no significa transmitir estructuras que no pueden asimilarse más que al nivel verbal.” (Messee, 1997, p. 125)

2.1.5 Teoría del desarrollo cognoscitivo de Vygotsky

Su teoría pone de relieve las relaciones del individuo con la sociedad. Afirmó que no es posible entender el desarrollo del niño si no conoce la cultura donde se cría. Pensaba que los patrones de pensamiento del individuo “no se deben a factores innatos, sino que son producto de las instituciones culturales y de las actividades sociales”. (Messee, 1997, p. 127)

El autor dice que por medio de las actividades sociales el niño aprende a incorporar a su pensamiento herramientas culturales como el lenguaje, los sistemas de conteo, la escritura, el arte y otras invenciones sociales por lo que se “puede interpretar que la historia de la cultura del niño como la de su experiencia personal son importantes para comprender su desarrollo cognitivo.” (Messee, 1997, p. 127).

Vygotsky proponía que el desarrollo cognoscitivo depende en gran medida de las relaciones con la gente que está presente, con la gente del mundo del niño y las

herramientas que la cultura le da para apoyar el pensamiento. Los niños adquieren su conocimiento, ideas, actividades y valores a través del trato con los demás. “No se aprende de la exploración solitaria del mundo, sino al aprendizaje o “tomar por sí” la forma de actuar y pensar que su cultura le ofrece”. (Pearson, 1997, p. 45). Además comenta también el autor, que Vygotsky creía que las herramientas reales y simbólicas como las imprentas, los lápices (y hoy en día podríamos incluir a las computadoras), los números y los sistemas matemáticos, los signos y los códigos, así como el lenguaje, desempeñan un papel muy importante en el desarrollo cognoscitivo. (Pearson, 1997, p. 45)

“Vygotsky no creía que el conocimiento se construye de modo individual como propusiera Piaget, sino que se construye entre las personas mientras interactúan.” De la misma forma el autor comenta que el conocimiento no se sitúa en el ambiente del niño, más bien se localiza dentro de un contexto cultural o social determinado, en otras palabras creería que los procesos mentales del individuo como recordar, resolver problemas o planear tienen un origen social. (Messee, 1997, p.128)

Otro aspecto importante es la interiorización que “indica el proceso de formar una representación mental de las acciones físicas externas o de operaciones mentales... Vygotsky pensaba que el desarrollo cognoscitivo consiste en interiorizar funciones que ocurren antes en lo que ellos llaman plano social.” (Messee, 1997, p. 129)

El lenguaje es crucial para el desarrollo cognoscitivo. Pearson proponía que el medio para expresar ideas y plantear preguntas, es entender las categorías, los conceptos para el pensamiento y los vínculos entre el pasado y el futuro. Vygotsky destacó mucho más que Piaget la forma del lenguaje en el desarrollo cognoscitivo, porque “consideraba que bajo la forma del habla privada (hablarse a uno mismo) el lenguaje orienta al desarrollo cognoscitivo.” (Pearson, 1997, p. 45). A su vez el autor comenta que más que ser una inmadurez cognoscitiva, esos susurros cumplen una función importante en el desarrollo cognoscitivo. Los niños se están comunicando, así sea con ellos mismos, para orientar su conducta y su pensamiento.

Para Vygotsky el lenguaje es la herramienta psicológica que más influye en el desarrollo cognoscitivo “El desarrollo intelectual del niño se basa en el dominio del medio social del pensamiento es decir el lenguaje”. Vygotsky identificó tres etapas en el uso del lenguaje por parte del niño: etapa social, egocéntrica y del habla interna. (Messee, 1997, p. 131)

De la misma forma, el autor afirma que el habla social consiste en que el niño se sirve del lenguaje fundamentalmente para comunicarse, el pensamiento y el lenguaje cumplen con funciones independientes; el habla egocéntrica cuando comienza a usar el habla para regular su conducta y su pensamiento por lo que el niño habla en voz alta para consigo mismo, cuando realiza tareas, el habla interna sirve para dirigir su pensamiento y su conducta, en esta fase pueden reflexionar sobre la solución de problemas y las secuencias de las acciones manipulando el lenguaje en su cabeza.

Vygotsky identificó esta transición del habla privada audible al habla interna saliente como un proceso fundamental para el desarrollo cognoscitivo. Gracias a este proceso, “el niño utiliza el lenguaje para cumplir actividades cognoscitivas importantes como dirigir la atención, resolver problemas, plantear formas conceptos y desarrollo autocontrol.” (Pearson, 1997, p. 46)

Vygotsky creía que el desarrollo cognoscitivo ocurre a través de las conversaciones e intercambios que el niño sostiene con miembros más conocedores de la cultura, adultos o compañeros más capaces. “Estas personas sirven como guías y maestros que ofrecen la información y el apoyo necesarios para que el niño crezca de manera intelectual”. (Pearson, 1997, p. 46)

A su vez comenta el autor que la interacción “era mucho más que un método de enseñanza; era el origen de los procesos mentales superiores, como la solución de problemas” (Pearson, 1997, p. 47). Suponía que cada función en el desarrollo cultural de un niño aparece dos veces: primero, en el nivel social y luego en lo individual; primero entre personas y luego dentro del niño.

Una de las aportaciones más importantes de la teoría de Vygotsky a la psicología y a la educación es el desarrollo en el concepto de zona de desarrollo proximal. A Vygotsky le interesaba el potencial del niño para el crecimiento intelectual más que su nivel real de desarrollo. La zona de desarrollo proximal incluye las funciones que están en el proceso de desarrollo pero que no se desarrollan plenamente. (Messee, 1997, p. 131).

De la misma forma el autor define a la zona de desarrollo proximal como aquellas funciones que todavía no maduran, sino que se encuentran en proceso de maduración, funciones que madurarán mañana pero que actualmente están en estado embrionario. “Deben de llamarse “botones” o “flores” del desarrollo y no sus “frutos”. El actual nivel de desarrollo se caracteriza en forma retrospectiva, mientras que la zona de desarrollo proximal lo caracteriza de forma prospectiva. (Messee, 1997, p. 131).

Al respecto Pearson (1997, p. 47) opina que “la zona de desarrollo proximal es el área en la que el niño no puede resolver por sí mismo un problema, pero que lo hace si recibe la orientación de un adulto o la colaboración de un compañero más avanzado”. En este punto la instrucción tiene éxito porque el aprendizaje real es posible, a menudo el adulto ayuda a un niño a resolver un problema o a cumplir una tarea usando apoyos verbales y estructurados.

2.1.6 Contribuciones educativas de la teoría de Vygotsky.

En la teoría de Vygotsky el habla egocéntrica es “un medio con el que los niños realizan la transición de ser regulados por otros, a regularse ellos mismos mediante su pensamiento”. (Messee, 1997, p. 133)

Messee, afirma también que “el habla privada cumple una función importantísima como función autorreguladora. Es el medio que permite a los niños orientar su pensamiento y su conducta.” Realizan el habla externa autorreguladora antes de recurrir al habla interior; al efectuar la transición en los primeros grados necesitan

aprender las actividades que les permitan hablar en voz alta mientras resuelven el problema. (1997, p. 133)

2.1.7 La influencia de los conocimientos previos en el aprendizaje de los adolescentes.

Aprender cualquiera de los contenidos escolares supone, atribuir un sentido y construir sus significados implicados en dicho concepto. El alumno construye permanentemente un significado sobre la base de los significados que ha podido construir previamente. “Justamente, gracias a esta base es posible continuar aprendiendo, continuar construyendo nuevos significados.” (Miras, 1993)

Miras (1993), comenta que los alumnos presentan una determinada disposición para llevar a cabo el aprendizaje en general que se les plantea. Esta disposición o enfoque con la que abordan esta situación de aprendizaje de nuevos contenidos no es en general algo inexplicable o impredecible, sino que es un resultado de la confluencia de numerosos factores de índole personal e interpersonal.

De la misma forma la autora (Miras, 1993) comenta que “ante cualquier situación de aprendizaje, los alumnos disponen de determinadas capacidades, instrumentos, estrategias y habilidades generales para llevar a cabo un proceso”. Por una parte el alumno cuenta con determinadas capacidades cognitivas generales o en términos más corrientes, con unos niveles de inteligencia, razonamiento y memoria que le van a permitir un determinado grado de comprensión y realización de la tarea.

Desde el punto de vista constructivista entendemos que el aprendizaje de nuevos contenidos es, en último término, el producto de una actividad mental constructiva que lleva a cabo el alumno, actividad mediante la cual construye o incorpora a su estructura mental los significados o representaciones relativos al nuevo contenido. Ahora bien esa actividad mental constructiva no puede llevarse a cabo en el vacío, partiendo de la nada. “La posibilidad de construir un nuevo significado, de asumir un nuevo contenido; en definitiva, la posibilidad de aprender, pasa necesariamente por la posibilidad de entrar en contacto con el nuevo conocimiento.” (Miras, 1993)

Al respecto C. Coll (1990) señala que “cuando el alumno se enfrenta a un nuevo contenido de aprendizaje, lo hace siempre armado con una serie de conceptos, concepciones, representaciones y contenidos adquiridos en el transcurso de sus experiencias previas que utiliza como instrumentos de lectura e interpretación y que determinan en buena parte la información que seleccionará, cómo la organizará y qué tipo de relaciones habrá entre ellas.” Así pues gracias a lo que el alumno ya sabe puede hacer una lectura del nuevo contenido, atribuyéndole al primer nivel el significado y sentido e iniciar el proceso de aprendizaje del mismo.

Miras (1993), comenta que “un aprendizaje es tanto más significativo cuantas más relaciones con sentido es capaz de establecer el alumno entre lo que ya conoce, sus conocimientos previos y el nuevo contenido que se le presenta como objeto de aprendizaje.” Esto quiere decir en definitiva que el contacto con la ayuda y guías necesarias, ayuda gran parte a la actividad mental constructiva de los alumnos e influyen además en la movilización y actualización de sus conocimientos

anteriores para tratar de entender la relación o relaciones que guardan con el nuevo contenido.

La autora se hace la siguiente reflexión “¿existen siempre conocimientos previos en el alumno?” Situándose desde la perspectiva del alumno, en la lógica de la concepción constructivista, es posible afirmar que siempre pueden existir conocimientos previos respecto al nuevo contenido que vaya a aprenderse, ya que de otro modo no sería posible atribuir en el significado inicial al nuevo conocimiento, no será posible “leer” en una primera aproximación. (Miras, 1993).

¿Qué se debe de hacer cuando los conocimientos sean total o prácticamente inexistentes, erróneos o desorganizados? Es preciso suplirlos antes de abordar la enseñanza de los nuevos contenidos o bien adaptar y redefinir nuestros objetivos y nuestra planificación previa en relación a dichos contenidos, en cuanto los conocimientos erróneos y mal organizados, es conveniente solucionar estos problemas mediante actividades específicas que vayan encaminadas a resolver cuestiones que redefinan el nuevo conocimiento.

La actualización y la disponibilidad de los conocimientos previos que poseen los alumnos es una condición necesaria para que puedan llevar a cabo un aprendizaje lo más significativo posible, pero esta condición no podemos darla por supuesto aun sabiendo que los alumnos poseen estos conocimientos. (Miras, 1993)

La autora comenta también que los alumnos pongan en juego los conocimientos previos necesarios en el momento adecuado, puede depender de muchos factores. En ocasiones, la no disponibilidad puede ser también un problema

transitorio de falta de atención. A veces, el hecho de que los alumnos no actualicen sus conocimientos previos puede ser debido a la falta de sentido que atribuyen a la actividad o una escasa motivación para establecer relaciones entre los conocimientos, optando entonces por un enfoque superficial y una memorización mecánica del nuevo contenido. (Miras, 1993)

De la misma forma que para la exploración de los conocimientos previos, un recurso muy útil es explorar en la propia experiencia del docente. Aunque esta siempre pueda mejorarse y revisarse, lo cierto es que la práctica docente continuada en determinados niveles y áreas de contenido nos proporciona indicaciones bastante fiables sobre cuáles son las dificultades más habituales respecto al aprendizaje de un determinado contenido.

Así mismo que dadas las características de los procesos de enseñanza y aprendizaje, parece más adecuado utilizar instrumentos de tipo abierto siempre que sea posible. El dialogo entre el profesor y el alumno permite una exploración más flexible y en consecuencia más rica, pero además, permite preservar la dinámica del aula, y evita el riesgo de que los alumnos vivan la exploración de los conocimientos previos como algo más a un examen, que a una ayuda a una preparación para el nuevo aprendizaje.

2.1.8 Importancia de los conocimientos previos

El autor comenta que el conocimiento previo influye de diversas maneras en los procesos de retención. A medida que el niño va adquiriendo conocimientos, le resulta más fácil identificar la información relevante y organizarla en formas significativas. (Meseee, 1997, p. 156)

Esto quiere decir que mientras el alumno va aprendiendo nuevos conocimientos, éstos a su vez le sirven de base para los nuevos conocimientos formando una cadena de conocimientos.

A su vez la autora comenta que el perfeccionamiento de los procesos de retención también refleja cambios en el número y la solidez de las conexiones entre las ideas y conceptos guardados en la memoria. Una base de conocimientos más integrados o estructurados agiliza el procesamiento de la información en uso más eficiente de las estrategias del procesamiento profundo y de los recursos cognoscitivos. (Meseee, 1997, p. 157)

Para cerrar este apartado es importante destacar que las teorías de Piaget y de Vygotsky, tienen mucha aportación para este trabajo de investigación por la razón que todos los estudiantes aprenden cuando interactúan con su medio social, el conocimiento adquirido debe ser utilizado, transformado y comparado con las estructuras existentes para formar un nuevo conocimiento. También es importante que los docentes adecuen actividades que les sean interesantes a los alumnos para obtener aprendizajes significativos. Otro aspecto importante, es que las actividades que se les deben de presentar a los alumnos son aquellas que ya

conocen, pero al mismo tiempo que superen su nivel actual de comprensión provocando en ello un conflicto cognoscitivo que motive al estudiante a analizar, deducir, descubrir e investigar, reestructurando con esto el conocimiento existente cuando éste entra en contacto con las experiencias que ya conocen, por último la importancia de los conocimientos previos, puesto que estos les permiten a los alumnos mediante la cual construyen, incorporan en su estructura mental los significados de los nuevos contenidos mediante la movilización y actualización de los conocimientos anteriores para tratar de entender esa relación que guardan con el nuevo contenido. En el capítulo siguiente se hablará de los conceptos básicos que permite conocer la trigonometría, llevándonos paso a paso para llegar al final a las Leyes de senos y cosenos, su construcción de cada una de ellas, hasta llegar a ejemplos de su aplicación.

2.2 Conceptos básicos relacionados con la Leyes de senos y cosenos.

2.2.1 Concepto de trigonometría.

La trigonometría se considera como una rama de las matemáticas, que como indica el nombre, se ocupa de la medida de los elementos del triángulo. En la determinación de esas medidas desempeñan un papel importante las funciones circulares, por lo que se suelen denominar funciones trigonométricas y su estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. (Guzmán, 2002, p. 101)

El estudio de las relaciones entre ángulos y lados de los triángulos. A esta rama de las matemáticas se le conoce con el nombre de trigonometría. (Escalante, 2010, p. 118)

La palabra trigonometría significa atendiendo a las dos palabras griegas que la forman medida de los triángulos. (Niles, 1974, p. 20)

2.2.2 Concepto de seno y coseno.

Seno: Cociente entre la ordenada del extremo final del arco y el radio de la circunferencia, tomando el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el extremo inicial del arco sobre la parte positiva del eje de abscisas. RAE

Coseno: Seno verso del complemento de un ángulo o de un arco. RAE.

2.2.3 Concepto de función.

El concepto de función es muy importante en las matemáticas. En matemáticas elementales, una función establece usualmente una correspondencia entre dos conjuntos de números. Existen muchas maneras de establecer esta correspondencia; tablas, gráficas, fórmulas, etc.

Una función consta de tres partes:

1.- Un conjunto llamado dominio.

2.- Un conjunto asociado, llamado recorrido de la función; cada elemento de este conjunto es la imagen de cuando menos un elemento del dominio; pero no pueden existir dos imágenes para un solo elemento de dominio.

Todo conjunto que contiene (propio o impropriamente) al recorrido recibe el nombre de codominio o contradominio de la función.

3.- Una (regla) o manera para la correspondencia la cual sirve para asignar a cada elemento del dominio uno, y sólo uno, del recorrido, en las condiciones ya explicadas en la parte dos.

Definición: Una función es un conjunto de pares ordenados tales que para cada primer elemento del par, existe un segundo elemento, determinado en forma única. El conjunto de los primeros elementos se llama dominio y el del segundo se llama recorrido. (Niles, 1974, p. 20)

A su vez el autor dice que el símbolo $f(x)$ denota la imagen asignada a x por la función f y existen dos maneras de leerlo: “ f en x ” y “ f de x ”. (Niles, 1974, p. 20)

2.2.4 “Las funciones trigonométricas básicas”

Se sabe por geometría que los lados y los ángulos de cualquier triángulo son independientes. La trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta tendencia, y para este objeto emplea las razones de los lados. Estas razones se llaman funciones trigonométricas básicas. (Granville, 1974, p. 2)

Las funciones trigonométricas básicas de un triángulo rectángulo son las razones o relaciones entre sus lados. (Guzmán, 2002, p. 101)

Definición de las denominadas funciones trigonométricas básicas. Existen seis de esas funciones: la función seno, función coseno, función tangente, función cotangente, función secante, función cosecante. En vez de usar una sola letra para representar cada una de las funciones trigonométricas se emplearán tres letras para cada una de ellas: *sen* para la función seno, *cos* para la función coseno, *tan* para la función tangente, *ctg* para la función cotangente, *sec* para la función secante, *csc* para la función cosecante. (Niles, 1974, p. 20)

Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, como A, se designan como sigue:

$$\text{Sen } A = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cos } A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tan } A = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\text{Ctg } A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}$$

$$\text{Sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\text{Csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

El hecho esencial, es que el valor numérico de cualquiera de esas funciones dependa solamente de la magnitud del ángulo A, es decir que es independiente del punto B el cual se traza la perpendicular al otro lado. (Granville, 1974, p.3)

2.2.5 Triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando no presenta un ángulo recto, si tiene sus tres ángulos agudos, se denominan triángulos oblicuángulos acutángulo, pero si tienen un ángulo obtuso entonces se trata de un triángulo oblicuángulo obtusángulo. (Escalante, 2010, p. 162)

Según Guzmán (2002, p. 152) “Cuando se conocen tres elementos de un triángulo oblicuángulo, siendo estos necesariamente un lado, es fácil su solución usando las fórmulas de ley de senos, ley cosenos y ley de tangentes por lo que hay cuatro casos”:

1. Dado un lado y los ángulos adyacentes.

2. Dados dos lados y el ángulo comprendido.
3. Dados sus tres lados.
4. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

2.2.6 Ley de senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.
(Baldor, 2002, p. 372)

Ley de los senos “Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos del ángulo opuesto. (Baldor, 2002, p. 372)

2.2.6.1 Deducción de la ley de senos

En la figura se muestra un triángulo oblicuángulo cualquiera, al cual se le ha trazado una altura $CD = h$

$$1. \operatorname{sen} A = \frac{h}{b}$$

$$2. \operatorname{sen} B = \frac{h}{a}$$

Si despejamos de 1 el valor de h ;

$$h = b \operatorname{sen} A \text{ --- (3)}$$

$$\text{De (2)} \quad h = a \operatorname{sen} B \text{ --- (4)}$$

Como dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí, igualaremos (3) con (4) y

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \text{ --- (6)}$$

Si ahora dividimos la (5) entre $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, y la (6) entre $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$ obtenemos:

$$\text{De la (5) --- } \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

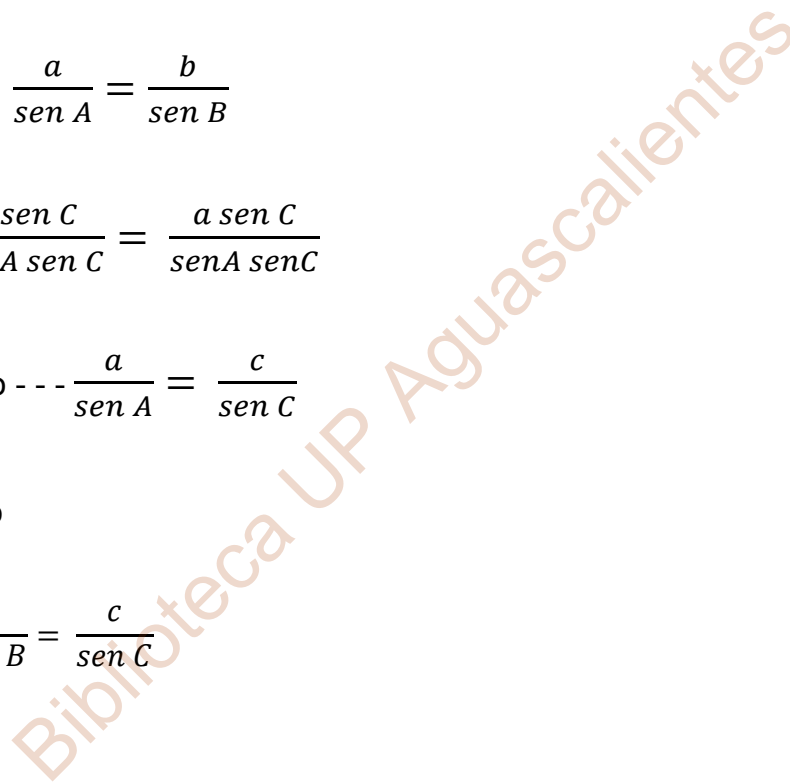
$$\text{O sea --- } \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\text{De la (6) } \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C} = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$\text{Simplificando --- } \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Concluyendo

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Por lo tanto ¿Qué es la ley de senos? En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. (Guzmán, 2002, p. 153)

Ley de los senos “Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”

2.2.6.2 Demostración de Baldor (2002, p. 372-373)

Para la demostración consideremos dos casos:

Primer caso: El triángulo es acutángulo. Sea ABC un triángulo acutángulo.

Tracemos las alturas CD y AE

$$\therefore CD = b \operatorname{sen} A \quad (1)$$

$$\text{En el } \triangle BCD: \frac{CD}{a} = \operatorname{sen} B$$

$$\therefore CD = a \operatorname{sen} B \quad (2)$$

$$\therefore \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad (3)$$

$$\therefore AE = b \operatorname{sen} C \quad (4)$$

$$\therefore AE = c \operatorname{sen} B \quad (5)$$

$$\therefore \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (6)$$

Comparando (1) y (2) tenemos:

$$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$$

En el Δ ACD: $\frac{AE}{b} = \operatorname{sen} C$

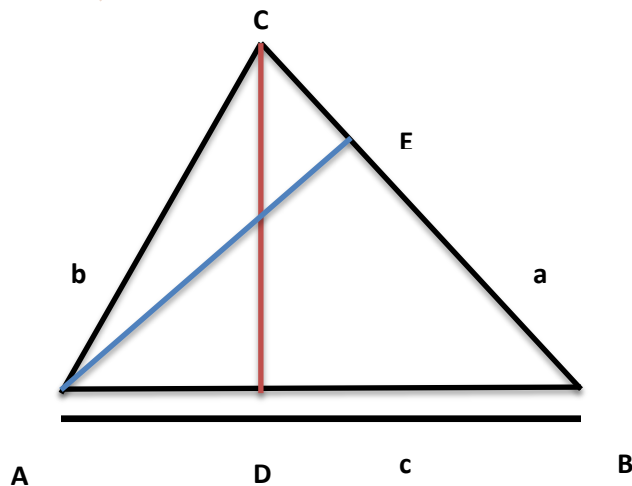
En el Δ ABE: $\frac{AE}{c} = \operatorname{sen} B$

Comparando (3) y (4) tenemos:

$$b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$$

Comparando (3) y (6), tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Segundo caso: El triángulo es obtusángulo. Sea el triángulo ABC un triángulo obtusángulo.

Tracemos las alturas CD y AE.

$$\text{En el } \Delta CDB: \quad \frac{CD}{a} = \text{sen } B \quad \therefore CD = a \text{ sen } B \quad (1)$$

$$\text{En el } \Delta CDA: \quad \frac{CD}{b} = \text{sen } (180 - A) = \text{sen } A$$

$$\therefore CD = b \text{ sen } A \quad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$$

$$\therefore \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad (3)$$

En el ΔAEC :

$$\frac{AE}{b} = \text{sen } C$$

$$\therefore AE = b \text{ sen } C \quad (4)$$

En el ΔAEB :

$$\frac{AE}{c} = \text{sen } B$$

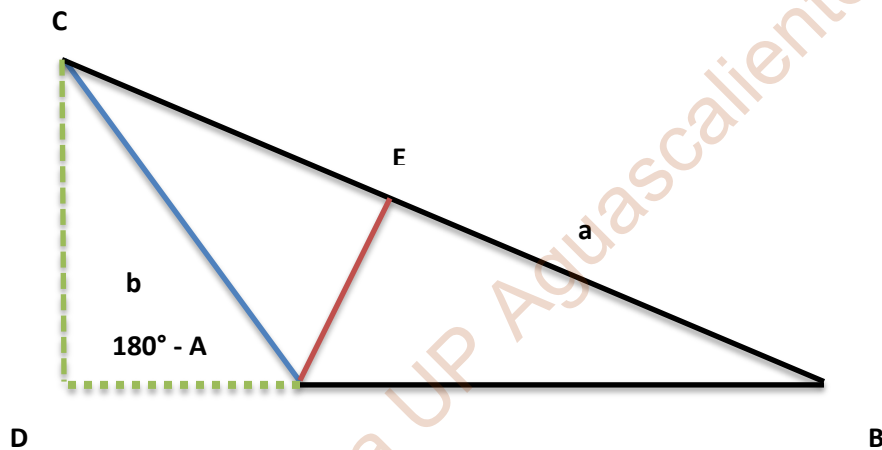
$$\therefore AE = c \text{ sen } B$$

Comparando (4) y (5) tenemos:

$$b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$$

$$\therefore \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (6) \text{ Comparando (3) y (6) tenemos:}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



2.2.6.3 Aplicación de la ley de senos:

Dados $a = 40$, $b = 30$, $A = 75^\circ$; Hallar los elementos restantes.

Solución. Como $a > b$ y A es agudo hay solamente una solución.

Por la ley de senos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\text{De donde, } \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{30 \times 0.9659}{40} = .7244$$

O sea, $B = 46^\circ 25'$, que es el único valor admisible de B.

Entonces, $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 121^\circ 25' = 58^\circ 35'$.

Para hallar c, por la ley de senos,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

$$\text{De donde } c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{40 \times 0.8534}{.9659} = 35.34$$

(Granville, 1969, p. 134)

2.2.6.4 Ejemplo práctico de la ley de Senos

1.- Se requiere hallar la distancia horizontal de un punto A un punto inaccesible B de la orilla del lado opuesta del río. Para ello medimos una distancia horizontal conveniente, como AC, y luego medimos los ángulos CAB y ACB

$$68.8^\circ + 38^\circ + B = 180^\circ$$

$$B = 180^\circ - 68.8^\circ - 38^\circ$$

$$B = 73.2^\circ$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

$$c = \frac{283 \times .9191}{.9573}$$

$$c = 271 \text{ m}$$

2.2.7 Ley de los cosenos

En todo triángulo el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo que lo forman. (Guzmán, 2002, p.154)

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman. (Baldor, 2002. P. 373)

En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. (Escalante, 2010, p.167)

2.2.7.1 Deducción de la ley de cosenos

En la figura vemos que aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$m^2 + h^2 = a^2 \text{ --- (1)}$$

$$n^2 + h^2 = b^2 \text{ --- (2)}$$

Restando (2) de (1) queda:

$$m^2 - n^2 = a^2 - b^2 \text{ --- (3)}$$

El primer miembro de (3) es igual a: $(m + n)(m - n)$, entonces:

$$(m + n)(m - n) = a^2 - b^2 \text{ --- (4)}$$

Pero como la figura $m + n = c$ --- (5)

Sustituyendo en (4) queda:

$$c(m - n) = a^2 - b^2$$

$$m - n = a^2 - b^2 / c \text{ --- (6)}$$

Si sustituimos y restamos (5) y (6)

$$m + n = c$$

$$m - n = a^2 - b^2 / c \text{ queda:}$$

$$2m = a^2 - b^2 / c + c \text{ de donde } m = a^2 - b^2 + c^2 / 2c \text{ por lo tanto}$$

$$m = a^2 + c^2 - b^2 / 2c \text{ --- (7)}$$

$$\text{y restándolos quedan: } n = a^2 - b^2 - c^2 / 2c \text{ --- (8)}$$

Recordando que los cosenos de los ángulos suplementarios son iguales y de signos contrarios, si consideramos los triángulos rectángulos de la figura BCD y ACD, se tiene que:

$$m = a \cos B \text{ y } n = b \cos DAC = -b \cos A$$

Si sustituimos estos valores en las dos últimas igualdades, (7) y (8), obtenemos:

$$(9) \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ y}$$

$$(10) \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Por conclusión se obtiene que:

$$(11) \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

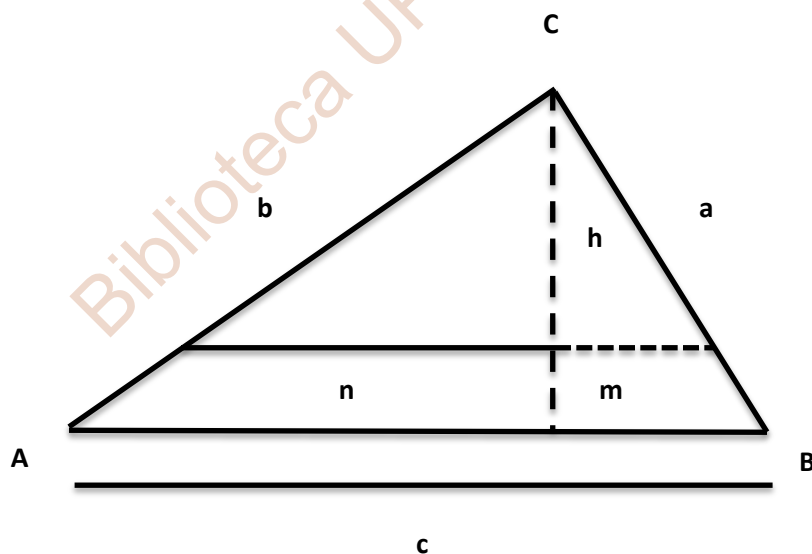
Si de (9), (10) y (11) despejamos en (9), a^2 , en (10), b^2 y c^2 en 11, resultará:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(Guzmán, 2002, p.154)



2.2.7.2 Demostración de Baldor (2002, p. 373-374)

Para la demostración consideremos dos casos:

Primer caso: El triángulo es acutángulo. Sea ABC un triángulo acutángulo.

Tracemos la altura BD.

Por el teorema generalizado de Pitágoras, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b AD \quad (1)$$

$$\text{Pero: } \frac{AD}{c} = \cos A \quad \therefore AD = c \cos A. \quad (2)$$

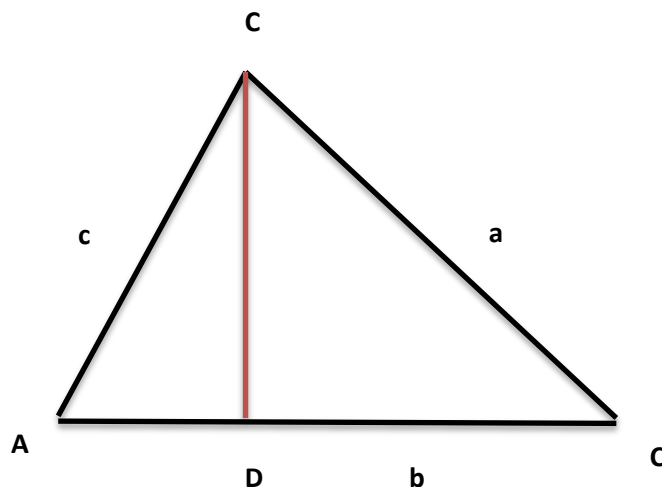
Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos A$$

Analógicamente se demuestra:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Segundo caso: El triángulo es obtusángulo:

Tracemos la altura BD, prolongando AC. Sea $\angle A > 90^\circ$.

Por el teorema generalizado de Pitágoras, tenemos:

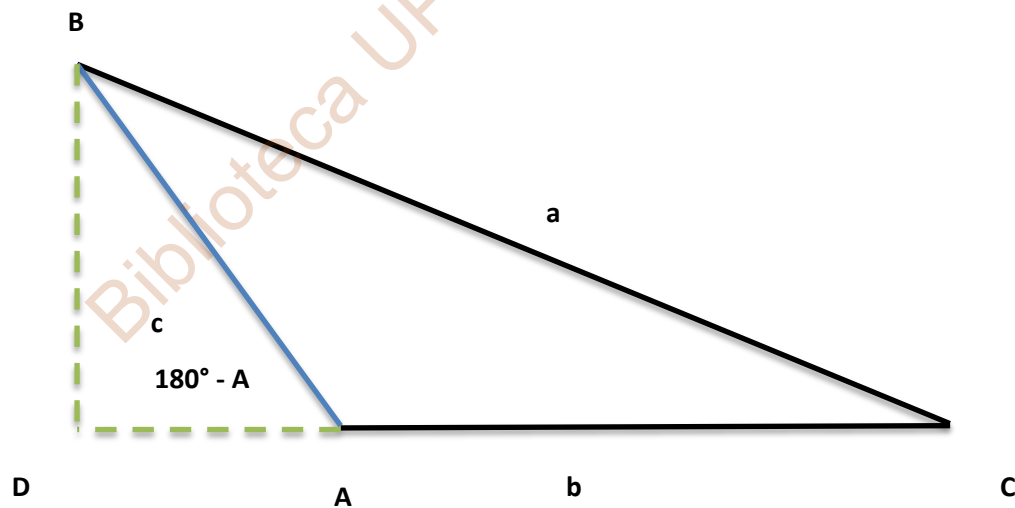
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b AD \quad (1)$$

Pero: $\frac{AD}{c} = \cos (180 - A) = -\cos A; \quad \therefore AD = -c \cos A. \quad (2)$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b (-c \cos A)$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos A$$



2.2.7.3 Aplicación de la ley de cosenos

1.- Resolver un triángulo dados $A = 47^\circ$, $b = 8$, $c = 10$.

Solución. Para hallar el lado a usemos.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 64 + 100 - 2 \times 8 \times 10 \times 0.6820 \end{aligned}$$

De donde,

$$a = \sqrt{54.88} = 7.408$$

Para hallar los ángulos C y B usemos la ley de los senos.

$$\text{Sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{8 \times 0.7314}{7.408} = .9872$$

De donde, $B = 52^\circ 10'$

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } A}{a} = \frac{10 \times 0.7314}{7.408} = 0.9872$$

De donde $C = 80^\circ 50'$

Comprobación: $A + B + C = 47^\circ + 52^\circ 10' + 80^\circ 50'$

2.- Resolver un triángulo, dados $a = 7$, $b=3$, $c= 5$

Solución, Usando las fórmulas para hallar los ángulos, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2} = -0.5000$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{7^2 + 5^2 - 3^2}{2 \times 30 \times 5} = \frac{13}{14} = .9286$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14} = 0.7857$$

De donde,

$$A = 120^\circ, B = 21^\circ 47' C = 38^\circ 13'$$

$$\text{Comprobación: } A + B + C = 120^\circ + 21^\circ 47' + 38^\circ 13' = 180$$

2.2.7.4 Ejemplo práctico de la ley de cosenos

Para calcular la distancia entre dos puntos A y B, separados por un estanque se ha escogido una estación C y se han medido las distancias CA = 426 metros, CB = 322.4 metros y el ángulo ACB = $68^\circ 42'$ ¿Cuál es la distancia de AB?

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 322.4^2 + 426^2 - 2(322.4)(426)(.3677)$$

$$c^2 = 103941.76 + 181476 - 101001.60$$

$$c^2 = 184416.159$$

$$c = 429.437$$

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Diseño de la investigación

3.1.1 Grupo experimental

Para el grupo experimental lo primero que se aplicó fue un pretest que consistió en seis preguntas generales del conocimiento de la ley de senos y cosenos que permitiría saber qué tanto los alumnos conocían sobre este tema (conocimiento previo), preguntas como ¿Qué es triángulo oblicuángulo?, ¿Sabes si la ley de senos y cosenos tienen aplicaciones en la vida real?, al final se propusieron dos problemas de aplicación de senos y cosenos.

A continuación se aplicaron las cartas descriptivas que fueron las planeaciones para la Intervención pedagógica y consistieron en ocho sesiones.

Para la primera sesión, se inició la clase preguntándoles en lluvia de ideas si sabían qué era un triángulo oblicuángulo, después se planteó un problema de aplicación donde tuvieron que resolver un triángulo oblicuángulo usando solamente las funciones trigonométricas básicas. Después se les pidió que explicaran el proceso que emplearían para conseguirlo. En la segunda sesión se diseñó una propuesta que permitió demostrar la fórmula de la ley de senos con la cual se resolvería el problema de la clase anterior. Para la tercera sesión, se les pidió que aplicando el proceso similar al de la clase anterior que trazaran las alturas correspondientes a los otros dos lados, comprobando así que la afirmación de la fórmula de la ley de senos se mantiene verdadera para sus vértices. En la

cuarta sesión ya quedando demostrada la fórmula de la ley de senos se aplicó su utilidad en algunos ejercicios. Para la quinta sesión se diseñó una propuesta que permitiría llegar a demostrar la ley de los cosenos. Así en la sexta sesión ya demostrada la ley de cosenos se demostró su utilidad en algunos ejercicios. En la séptima sesión se presentaron situaciones donde se puso a prueba al estudiante en aplicaciones de la vida real de las leyes de senos y cosenos. Para finalizar en la última sesión, se presentó “El día de la Trigonometría” que fueron actividades donde los alumnos demostraron los conocimientos adquiridos por medio de maquetas donde midieron distancias por medio de la aplicación de las leyes de senos y cosenos.

Después se aplicó el examen Postest, el cual consistió en la resolución de cuatro problemas de aplicación, de los cuales dos eran aplicaciones en problemas reales.

3.1.2 Grupo control

Para el grupo control se aplicó el Pretest, igual al que se aplicó al grupo experimental que consistía también en seis preguntas, donde se ponían a prueba sus conocimientos previos sobre los triángulos oblicuángulos así como también de la aplicación de algunos problemas.

Al final después de haber dado las clases de forma tradicional se aplicó un examen Postest que consistió en cuatro problemas de aplicación, también dos de los cuales eran aplicaciones de la vida real.

3.2 Muestra y población

La escuela donde se aplicó la propuesta de intervención pedagógica es la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación “Profr. David Gutiérrez Acosta” la cual se encuentra ubicada en el municipio de Rincón de Romos, el cual cuenta con una población de aproximadamente de 45,000 habitantes de la cual la población económicamente activa se dedica al comercio y a la agricultura.

Es de importancia recalcar que las costumbres del municipio de Rincón de Romos, están muy influenciadas por la religión, por lo que sus festividades principales se hacen en el mes de enero, festejando al “Patrono de Nuestro Señor de las Angustias” el cual es visitado por muchas personas de los municipios aledaños por lo que se considera como una de las mejores ferias a nivel estatal.

La Escuela Preparatoria Federal por Cooperación “Profr. David Gutiérrez Acosta” se encuentra ubicada al sur de la cabecera municipal, en la colonia Santa Elena, detrás de la Clínica de Campo, la Parroquia del “Padre Nieves” y el Gimnasio Municipal.

La infraestructura de la preparatoria es la siguiente:

- 1.- Cuenta con un Patio Cívico (principal).
- 2.- Cuenta con doce aulas, distribuidas de la siguiente forma:
 - Tres aulas para los primeros grados.
 - Cuatro aulas para los segundos grados y
 - Cuatro aulas para los terceros grados.

3.- Tiene dos talleres:

- Informática.
- Dibujo técnico.

4.- Cuenta con un gimnasio techado.

5.- Una cancha de fútbol y dos de baloncesto.

En cuanto a la organización está constituido por:

- Director: Profr. Sergio Luis Gutiérrez Romo.
- Subdirector Académico: Profr. J. Carmen de Luna Jaime.
- Subdirector de Acción Cívica y Cultural. Profr. Fco. Javier Gutiérrez Castorena.

La planta docente está constituida por dieciocho profesores de los cuales algunos tienen grado de “Máster” por lo que cuenta con maestros capacitados en sus diferentes ramas.

Por ser una institución educativa general se divide en dos áreas:

1. Ciencias Naturales: Por lo que se brindan materias que encaminan al estudiante a estudiar carreras como Medicina, Ingenierías, etc.
2. Ciencias Sociales: Por lo que brindan materias que encaminan al estudiante a estudiar carreras como Derecho, Contador Público, etc.

3. La capacidad del alumnado en esta institución es aproximada a los cuatrocientos alumnos por lo que es considerada como una de las mejores escuelas de su tipo en la región, esto permite que el alumnado sea no solamente de la cabecera municipal, sino también de municipios aledaños como: Cosío, Pabellón de Arteaga, Tepezalá, San José de Gracia y San Francisco de lo Romo.

Los grupos con los que se trabajó pertenecen a los primeros años por los que se escogieron dos: El Primero “A” con el cual se aplicó la Propuesta de intervención pedagógica (Grupo Experimental), y el grupo de Primero “B” con el que se trabajó con el método tradicional (Grupo control).

El grupo experimental fue seleccionado por que está constituido por alumnos que por características propias tienen iniciativa al estudio, por lo que a ellos, en base a mi experiencia necesitan una enseñanza diferente a la tradicional para ellos es más interesante obtener conocimientos no solamente de forma dirigida por el docente, a su vez también adquirir conocimientos, por medio de investigaciones, descubrimientos, el autodidactismo, de tal forma que se estructuren conocimientos de forma diferente a lo tradicional. Es importante reconocer que ellos son alumnos que vienen con buenos promedios (De 9 de calificación hacia arriba). Por lo que se permitió pensar en “teoría” que la Propuesta de Intervención Pedagógica tendría éxito.

En cuanto al grupo control está constituido en su mayoría por alumnos que no saben qué es lo que quieren en la vida, pues cuando se les preguntó ¿Cuál es

la intención de venir a la escuela? Ellos dicen que vienen a estudiar, pero cuando se aplican los exámenes, sus notas son bajas, por lo que considero que es necesario trabajar de forma tradicional permitiendo esto, atacar principalmente su deficiencia en conocimientos previos, también que por medio de conocimientos dirigidos, se motiven a aprender.

3.3 Instrumentos y técnicas de obtención de información

El único instrumento que se aplicó en la Propuesta de Intervención Pedagógica, fue una guía de observación, que consistió en ir registrando día a día lo que se iba trabajando en clase, esto permitió analizar a detalle el avance de ésta, en la cual se iban registrando todos los pormenores que se presentaron, a su vez el progreso que iba obteniendo el grupo control en el transcurso de esta propuesta.

CAPÍTULO 4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

4.1 Datos de Identificación

El trabajo que a continuación se describe se trabajará en el nivel medio superior en la Escuela Preparatoria Federal por Cooperación “Profr. David Gutiérrez Acosta” que se encuentra ubicada en el municipio de Rincón de Romos, Aguascalientes, al sur de la cabecera municipal en la colonia Santa Elena.

La Escuela Preparatoria Federal “Profr. David Gutiérrez Acosta” consta de una plaza cívica, también con doce aulas, dos laboratorios, una sala de audiovisual, un gimnasio techado exclusivo para baloncesto y área deportiva para la práctica de deportes como fútbol y dos canchas para baloncesto y voleibol.

Los grupos de clases están distribuidos de la siguiente manera: tres en primer grado, cuatro en segundo grado y cuatro en tercer grado.

El grupo con el que se trabajó fue de primer grado grupo “A” el cual está conformado por treinta y siete mujeres y doce hombres, en su totalidad, es un grupo que tiene un buen desempeño académico.

La materia con la que se trabajó fue Trigonometría, de la cual el tema que se escogió fue “Las leyes de senos y cosenos” que tiene un amplio tema de estudio, porque se puede aplicar en situaciones reales y que permiten crear interés por aprender el tema.

El tiempo que se trabajó el tema de Leyes de Senos y Cosenos, fue aproximadamente once sesiones que equivalen en horas a once, pero tomando en

consideración que podría durar más por contratiempos y que en ocasiones las mismas planeaciones no son exactas en tiempo y no se culminan en el tiempo establecido, por lo cual se dispone de la siguiente clase para terminarla.

La intención de realizar este trabajo es buscar estrategias que permitan la conceptualización de los temas “Leyes de senos y Cosenos”, buscando alternativas diferentes a las convencionales, pues están los alumnos acostumbrados a que el docente proporcione la información ya lista para ser procesada, por lo cual cuando se les presenta algo diferente se sienten intimidados e incapaces de resolver, por lo cual los rechazan y en muchas ocasiones no los resuelven. También es buscar estrategias que creen la necesidad en alumno de aprender por medio de retos que se irán planteando en el transcurso de las sesiones donde se imparta este tema. Es de considerar que aunque con el grupo con el que se va a trabajar tiene un nivel aceptable en lo académico, rechazan estos métodos de enseñanza convencidos de que mientras el maestro no explique no existirá el entendimiento para poder resolver ejercicios y no habrá aprendizajes significativos.

4.2 Antecedentes.

Los temas que se trabajaron con anterioridad son: Teorema de Pitágoras funciones trigonométricas básicas, círculo unitario (función seno, coseno y tangente), identidades trigonométricas que son el antecedente que le permiten al alumno de tener mayor comprensión de las leyes de senos y cosenos, pues

desglosando cada una de ellas el Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas básicas son el antecedente directo, pues les permiten conocer a los alumnos que por medio de ellas se pueden resolver problemas de mediciones en triángulos rectángulos, el círculo unitario es de gran utilidad porque conocen el comportamiento de las funciones trigonométricas básicas y pueden sacar sus valores sin el uso de herramientas tecnológicas, como la calculadora, las identidades trigonométricas que es la combinación del álgebra con fórmulas trigonométricas.

Por otro lado, los temas que se nutrirán por los contenidos desarrollados en la PIP son la geometría analítica y el cálculo, que son otras áreas de las matemáticas donde se aplica la trigonometría y que les permiten aplicar lo visto en el curso.

4.3 Objetivo.

La finalidad de este trabajo es que el alumno busque estrategias de enseñanza que permitirán adquirir las habilidades necesarias, desarrollar el aprendizaje y conceptualización de las Leyes de senos y cosenos.

Para el logro del objetivo planteado se pretende que el alumno reciba actividades que creen el interés por aprender y reflexionar; de esta forma el maestro busque métodos sencillos para el análisis, por medio de problemas interesantes para los alumnos y de esta forma aprovechen sus conocimientos previos y avancen con el uso de técnicas y razonamientos más eficaces.

Al finalizar se pretende que el alumno obtenga aprendizajes significativos por medio de métodos que sean diferentes a los ya tradicionales, que le encuentren el gusto por aprender, fomentando en ellos la investigación, el autoaprendizaje, la colaboración, la discusión de ideas propositivas que creen entre ellos, la participación grupal que los conviertan en individuos autónomos que sean capaces de resolver problemas de la vida real.

4.4 Contenido por abordar

Contenidos a abordar	Número de sesiones.	Duración de cada sesión.
Ley de los Senos	5	50 min.
Ley de los cosenos	5	50 min.

4.5 Descripción de las sesiones

TEMA: Ley de Senos y Cosenos
SESIÓN : 1
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA
• Identifica las leyes de senos y cosenos así como los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.
ACTIVIDADES DE INICIO
Tiempo: 5 minutos.

Lluvia de ideas de las siguientes preguntas:

¿Qué es un triángulo oblicuángulo?, ¿Qué es un triángulo oblicuángulo acutángulo?, ¿Qué es un triángulo oblicuángulo obtusángulo?

Mostrar algunos ejemplos de triángulos oblicuángulos.

En la vida real preguntarles donde les sugiere que se aplica las leyes de senos y cosenos.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Tiempo: 35 minutos.

En equipos analiza la siguiente situación: desde lo alto de un helicóptero, se observa a dos personas en lados opuestos del mismo. Los ángulos de depresión hacia dichas personas son de 65° y 55° , respectivamente. Además la distancia desde el helicóptero, a la primera de ellas es de 120m. ¿Cuál es la distancia del helicóptero hacia la otra persona?

Empleando las funciones trigonométricas básicas ¿puedes calcular la distancia solicitada?

Describe el proceso que emplearías para conseguirlo.

Papel del Maestro: Para esta primera sesión el docente estará monitoreando el desenvolvimiento de los equipos, así como disipando las dudas que se les vayan presentando por medio del cuestionamiento directo.

ACTIVIDADES DE CIERRE

Tiempo: 10 minutos.

Que compartan entre compañeros de la clase las observaciones y realicen una lluvia de ideas que realmente los procesos empleados. A partir de esto que responda lo siguiente

¿Alguno pudo determinar la distancia trabajando con triángulos oblicuángulos?
PRODUCTOS
Participación individual.
EVALUACIÓN
Participación.

Fundamento Pedagógico

El enfoque didáctico de la “Guía para el maestro” del Programa Estudio 2011, Guía para el maestro/ Tercer grado nos muestra los siguientes beneficios de auto aprendizaje; (2011; 66): “Lograr que los alumnos se acostumbren a buscar por su cuenta la manera de resolver los problemas que se les plantean, mientras que el docente observa y cuestiona, localmente en equipos de trabajo, tanto para conocer los procedimientos y argumentos que se le ponen en práctica, como para aclarar ciertas dudas, destrabar procesos y lograr que puedan avanzar, logrará que los alumnos compartan sus ideas, habiendo acuerdos y desacuerdos, se expresaran con libertad y no habrá duda de que reflexionan en torno al problema que tratan de resolver”.

La lectura dice que la importancia de que el alumno trabaje de manera autónoma permite que se vuelva más reflexivo, puesto que se ve forzado a buscar la solución de los problemas que se le van presentando.

Dice también el enfoque didáctico de la “Guía para el maestro” del Programa Estudio 2011, Guía para el maestro/ Tercer grado (2011; 66): “Superar el temor a no entender cómo piensan los alumnos. Cuando el maestro explica cómo se solucionan los problemas y los alumnos tratan de reproducir, las explicaciones a resolver algunos ejercicios, se puede decir que las situaciones están bajo control. Difícilmente surgirá en la clase algo distinto a lo que el docente ha explicado, incluso muchas veces los alumnos manifiestan cierto temor a hacer algo diferente a lo que hizo el docente. Sin embargo, cuando éste plantea un problema y lo deja en manos de los alumnos, sin explicación previa de cómo se resuelve, usualmente surgen procedimientos y resueltos diferentes, que son producto de cómo piensan los alumnos y de lo que saben hacer. Ante esto el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a los alumnos a analizar y socializar lo que produjeron.

El autor aclara que si se le deja solo al profesor la enseñanza, el alumno será una persona que será dependiente de lo que él le enseñe y éste dejará de ser partícipe de su enseñanza, de esta forma se creará un estado de comodidad tanto para el maestro como para el alumno pero llevando como consecuencia que nunca se sabrá la capacidad de reflexión del alumno. En cambio si se le da autonomía al estudiante para su aprendizaje se notará de inmediato que cada uno formula sus propios procesos para la resolución de problemas.

El artículo “APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” Didáctica de matemáticas (1998; 52): “Los problemas a menudo ofrecen resistencia; las soluciones son casi siempre parciales, aun si destellos generales provocan avances espectaculares... que a veces no son reconocidos desde el principio”.

Es normal que el alumno se resista al cambio puesto que como se manejó con anterioridad se forma un ambiente de comodidad, pero si éste se ve modificado, el sentirá cierta desconfianza al cambio puesto que no está acostumbrado a resolver ejercicios por sí mismo y está a la voluntad y aprobación de lo que le diga el profesor.

El artículo “APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” Didáctica de matemáticas (1998; 52): “Uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo de las dificultades principales) de la enseñanza de las matemáticas, es precisamente que lo que se ha enseñado éste cargado de significado, tenga sentido para el alumno”.

El artículo “APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” Didáctica de matemáticas (1998; 52 y 53): “Para G. Brousseeau (1983) el sentido de un conocimiento matemático se define: No sólo por la colección de situaciones donde el conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la situación de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, errores que evita, de economías que procura y formulaciones que retoma, etc.”

Es importante señalar que todo lo que se le enseñe al alumno debe de tener sentido, puesto que de ahí parte el interés que tenga por aprender y de este modo el que comprenda que lo que se está aprendiendo tiene una utilidad en la vida real, de esta forma dejará de ver a las matemáticas como la simple resolución de algoritmos.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos SESIÓN : 2
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la

aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA • Identifica las leyes de senos y cosenos así como los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.
ACTIVIDADES DE INICIO Tiempo: 5 minutos Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior.
ACTIVIDADES DE DESARROLLO Tiempo: 35 minutos. Diseño de propuesta que permita llegar a demostrar la fórmula de la ley de los senos Papel del Maestro: Para la segunda sesión el docente se encargará de demostrar por medio de una propuesta, el diseño y la construcción de la fórmula de la función seno el cual se resolverá el problema presentado en la clase anterior.
ACTIVIDADES DE CIERRE Tiempo: 5 Lluvia de ideas que permitan disipar las dudas presentadas en la clase.

PRODUCTOS
Participación individual.
EVALUACIÓN
Participación.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos
SESIÓN : 3
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la

aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA • Distingue situaciones en la que es posible aplicar la ley de los senos y cosenos identificando los requerimientos de cada una. • Aprecia la utilidad de las leyes de senos y cosenos para la resolución de triángulos oblicuángulos.
ACTIVIDADES DE INICIO Tiempo: 5 minutos Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior.
ACTIVIDADES DE DESARROLLO Tiempo: 30 minutos. Empleando un proceso similar al anterior que compruebe que la relación se cumpla si trazamos las alturas que corresponden a los otros dos lados e incluso dibuje un triángulo obtusángulo y compruebe que la afirmación se mantiene verdadera para cualquiera de sus vértices. El Papel del Maestro: Para esta tercera sesión el docente estará monitoreando el desenvolvimiento de los equipos, así como disipando las

dudas que se les vayan presentando por medio del cuestionamiento directo.
ACTIVIDADES DE CIERRE Tiempo: 15 Realiza un mapa mental en el que incluyas los elementos de la afirmación anterior que debes de considerar al momento de aplicarla en la solución de triángulos y en general de situaciones reales que lo incluyan. Comparte con tus compañeros en plenaria los resultados obtenidos de ambas actividades.
PRODUCTOS Mapa conceptual. Participación.
EVALUACIÓN
Entrega del mapa conceptual

Fundamento pedagógico:

Dice el enfoque didáctico de la “Guía para el maestro” del Programa Estudio 2011, Guía para el maestro/ Tercer grado (2011; 66): “Acostumbrarlos a leer y analizar los enunciados de los problemas. Leer sin entender es una deficiencia muy común cuya solución no corresponde únicamente a la comprensión lectora a la asignatura de Español. Muchas veces los alumnos obtienen resultados diferentes que no por ello son incorrectos, sino que corresponden a una interpretación distinta al problema; por lo tanto, es necesario averiguar, cómo interpretan la información que reciben de manera oral y escrita”.

La interpretación de los problemas matemáticos nos permite saber muchas cosas, una de las cuales es el conocimiento previo, puesto que éste es el pilar con el cual se va a cimentar el nuevo conocimiento, también induce el grado de reflexión con el que cuenta el alumno, puesto que de estos parte cómo cada uno de ellos interpreta la información presentada y si le darán el rumbo que ellos crean pertinente para la resolución de los problemas.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos
SESIÓN : 4
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva,

comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otra persona de manera reflexiva.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA • Expresa en lenguaje ordinario y matemático las leyes de seno y coseno. • Valora las leyes de senos y cosenos para solucionar problemas teóricos y prácticos que involucren triángulos no rectángulos.
ACTIVIDADES DE INICIO Tiempo: 5 minutos Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Tiempo: 40 minutos.

Establecer la ley de los senos como sigue:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Viendo la utilidad en algunos ejercicios.

Resolver los siguientes ejercicios por equipos:

< A = 68°, <B = 52°, y c = 38 unidades, hallar: C, a, b.

<A = 66°, <B = 56°, a= 12 unidades, hallar: < C, c, b.

Papel del maestro: Para esta cuarta sesión el docente estará monitoreando el desenvolvimiento de los equipos, así como disipando las dudas que se les vayan presentando por medio del cuestionamiento directo.

ACTIVIDADES DE CIERRE

Tiempo: 5

Lluvia de ideas que permitan disipar las dudas presentadas en la clase.

PRODUCTOS
Participación individual
EVALUACIÓN
Participación.

Fundamento pedagógico:

Dice el enfoque didáctico de la “Guía para el maestro” del Programa Estudio 2011, Guía para el maestro/ Tercer grado (2011; 66): “Saber aprovechar el tiempo en clase. Se suele pensar que si se pone en práctica el enfoque didáctico, que consiste en plantear problemas, para que los resuelvan por sus propios medios, discutan y analicen, sus procedimientos, y resultados, no alcanza el tiempo para concluir el programa; por lo tanto se sigue trabajando con el esquema tradicional, en el que el docente “da la clase”, mientras los alumnos aprendan.

La experiencia dicta que mientras que esta decisión conduce a tener que repetir, en cada grado, mucho de lo que aparentemente ya habían aprendido; de manera que es más provechoso dedicar el tiempo necesario, para que los alumnos adquieran conocimientos con significado y desarrollen habilidades que les permitan resolver diversos problemas y seguir aprendiendo”.

El artículo “APRENDER (POR MEDIO DE) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” Didáctica de matemáticas (1998; 53): “La cuestión esencial de la enseñanza de las matemáticas es entonces: ¿Cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para los alumnos? El alumno debe de ser capaz de no sólo de repetir o de rehacer, sino también de resignificar, en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos, para resolver nuevos problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.

Como ya se había comentado con anterioridad, la construcción de autoaprendizaje tiene todo un proceso, puesto que el alumno está expuesto a algo desconocido para él, por lo que el temor al tomar el reto despertará todos sus instintos de análisis, discusión entre compañeros para darle el mejor destino a la solución de dicho problema.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos

SESIÓN : 5

ATRIBUTOS A DESARROLLAR

- **Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas.**

• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA
• Identifica las leyes de senos y cosenos así como los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.
ACTIVIDADES DE INICIO
Tiempo: 10 minutos Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior. Se tiene que dos de los lados de un triángulo miden 12 y 10 metros respectivamente; si el ángulo comprendido entre ellos es de 40°. Calcula la medida del tercer lado.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO	
Tiempo: 35 minutos. Diseño de propuesta que permita llegar a demostrar la fórmula de la ley de los cosenos. Papel del maestro: Para la quinta sesión el docente se encargará de demostrar por medio de una propuesta, el diseño y la construcción de la fórmula de la función coseno en el cual se resolverá el problema presentado en la clase anterior.	
ACTIVIDADES DE CIERRE	
Tiempo: 5 Lluvia de ideas que permitan disipar las dudas presentadas en la clase.	
PRODUCTOS	
Participación individual.	
EVALUACIÓN	
Participación.	

TEMA: Ley de Senos y Cosenos SESIÓN : 6
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otra persona de manera reflexiva.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA

- Aplica las leyes de seno y coseno en la resolución de problemas.
- Actúa de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.

ACTIVIDADES DE INICIO

Tiempo: 5 minutos

Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Tiempo: 40 minutos.

Establecer la ley de los cosenos como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc (\cos A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac (\cos B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab (\cos C)$$

Resolver en equipos los siguientes ejercicios:

Dos lados y el ángulo comprendido:

Datos: $a = 22$, $b = 28$ y $C = 72^\circ$

Hallar el valor de lado c .

Papel del Maestro: Para esta sexta sesión el docente estará monitoreando el desenvolvimiento de los equipos, así como disipando las dudas que se les vayan presentando por medio del cuestionamiento directo.

ACTIVIDADES DE CIERRE

Tiempo: 5

Lluvia de ideas que permitan disipar las dudas presentadas en la clase.

PRODUCTOS
Participación individual.
EVALUACIÓN
Participación.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos
SESIÓN : 7
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva y comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las

relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. • Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA • Actúa de manera propositiva al resolver los ejercicios planteados.
ACTIVIDADES DE INICIO Tiempo: 5 minutos Retroalimentación de lo que se vio en la clase anterior.
ACTIVIDADES DE DESARROLLO Tiempo: Tres clases. Resuelve las siguientes situaciones: 1. Dos personas parten de un mismo punto tomando direcciones que forman un ángulo de 50°. Después de un tiempo han avanzado 15 y 20 metros respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran una de la otra? 2. El ángulo de la cúspide de un triángulo isósceles mide 73° y su base

40 cm. Determina el perímetro de triángulo.

3. Un bebé mira la cara a su papá con un ángulo de elevación 25° . Él bebé gatea y logra acercarse 3 m, lo que ocasiona que su ángulo de elevación a se modifique a 31° . ¿A qué distancia de su papá queda el bebé si la altura del papá es de 1.90 m? ¿A qué distancia realizó el bebé la primera observación?
4. Desde cierta posición un pájaro observa dos gusanos en el piso, los cuales están separados 6 m. Si la distancia del ave son iguales a 8 m. Calcula el ángulo que forma las visuales del pájaro hacia ambos animalitos. ¿A qué altura se encuentra el pájaro?
5. Una antena de 3 m está fijada en lo alto de una casa. Desde un punto de observación Pablo midió los ángulos de elevación a los puntos más altos y más bajos de la antena que son de 55° y 26° respectivamente. Hallar la altura de la casa.
6. Un poste de la Comisión Federal de Electricidad de 8 m de altura se encuentra en la cima de una montaña como se muestra en la figura. Halla la distancia de la base de la montaña a la parte más alta del poste

El papel del Maestro: Para esta séptima sesión el docente estará monitoreando el desenvolvimiento de los equipos, así como disipando las dudas que se les vayan presentando por medio del cuestionamiento directo.

ACTIVIDADES DE CIERRE Tiempo: 5 Lluvia de ideas que permitan disipar las dudas presentadas en la clase.
PRODUCTOS Participación individual. Participación grupal.
EVALUACIÓN
Participación.

Fundamento pedagógico:

El enfoque didáctico de la “Guía para el maestro” del Programa Estudio 2011, Guía para el maestro/ Tercer grado nos muestra el siguiente beneficio del auto aprendizaje; (2011; 66): “Lograr que aprendan a trabajar de manera colaborativa. Es importante, porque ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus ideas y de enriquecerlas, con las opiniones de los demás ya que desarrollan la actitud de colaboración y la habilidad para argumentar; además de

esta manera se facilita la puesta en común de los procedimientos que se encuentran".

Es muy importante que parte de la construcción de conocimientos de los alumnos sea producto de intervención entre ellos, por esa sana discusión, les permitirá a cada uno de ellos, conocer la idea de los demás, así como también aclarar y modificar en caso necesario el conocimiento que se haya tenido con anterioridad, por uno nuevo más consistente y fundamentado.

TEMA: Ley de Senos y Cosenos SESIÓN : 8
ATRIBUTOS A DESARROLLAR
• Expresa ideas y conceptos mediante las representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. • Aporta punto de vista con apertura y considera de otras personas de manera reflexiva.
UNIDADES DE COMPETENCIA
• Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos, a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes.

• Cuantifica y representa magnitudes similares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. • Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.
SABERES REQUERIDOS PARA EL LOGRO DE LAS UNIDADES DE COMPETENCIA • Propone maneras creativas de solucionar problemas.
ACTIVIDADES DE INICIO Tiempo: 5 minutos Presentación del trabajo “El día de la trigonometría”
ACTIVIDADES DE DESARROLLO “El día de la trigonometría”. Actividades donde los alumnos van demostrar los conocimientos adquiridos por medio de maquetas donde medirán distancias por medio de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. Papel del maestro: El maestro observará la presentación de los trabajos presentados por los alumnos, además de ir analizando el desempeño de cada equipo y al final presentar las conclusiones pertinentes.
ACTIVIDADES DE CIERRE Tiempo: 5 Exposición de los trabajos.
PRODUCTOS

Participación individual.
Participación grupal.
EVALUACIÓN
Participación.

Biblioteca UP Aguascalientes

4.6 Criterios de evaluación

Para evaluar a los alumnos, se empleó la siguiente rúbrica que detalla los niveles de desempeño en los que se les situó.

Tabla 1. Nivel de desempeño

Nivel De Desempeño			
Calificaciones	10 – 9	8 – 7	6 - Menos
Conocimientos	Identifica e interpreta las leyes de senos y cosenos así como los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.	Identifica e interpreta las leyes de senos y cosenos pero no distingue los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.	Identifica las leyes de senos y cosenos pero no los elementos necesarios para la aplicación de una y otra.
Habilidades de aplicaciones de conocimientos	Emplea las leyes de senos y cosenos para resolver diversas situaciones teóricas que consisten en resolver triángulos oblicuángulos, además de aplicar lo anterior en la solución de problemas de su entorno.	Emplea las leyes de senos y cosenos para resolver diversas situaciones teóricas que consisten en resolver triángulos oblicuángulos, además de aplicar lo anterior en la solución de algunas situaciones de su entorno. En ambos	Emplea las leyes de senos y cosenos para resolver diversas situaciones teóricas que consisten en resolver triángulos oblicuángulos, pero no consigue resolver problemas de su entorno que las requiera.

Actitudes y valores	casos presenta inconsistencias para distinguir qué ley aplicar en cada situación.		
	Valora la importancia de las leyes de senos y cosenos para solucionar problemas teóricos o prácticos que involucren triángulos oblicuángulos, actuando de manera propositiva al resolver los problemas planteados y asumiendo una actitud constructiva y colaborativa en las actitudes que le son asignadas.	Valora la importancia de las leyes de senos y cosenos para solucionar problemas teóricos o prácticos que involucren triángulos oblicuángulos, actuando de manera propositiva al resolver los problemas y planteando y asumiendo una actitud poco constructiva y colaborativa en las actitudes que le son asignadas.	No valora la importancia de las leyes de senos y cosenos para solucionar problemas teóricos que involucren triángulos oblicuángulos, actuando de una manera un tanto reservada al resolver los problemas planteados y asumiendo una actitud poco constructiva y colaborativa en las actividades que le son asignadas.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS OBTENIDOS A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

En el presente capítulo se presentarán los resultados que se obtuvieron al aplicar la propuesta de intervención pedagógica, que se dio a conocer de forma detallada en el capítulo 4. El capítulo está dividido en dos partes, la primera presenta de forma sintética, el grado en que los alumnos fueron incrementando su nivel de logro a partir del trabajo de intervención que se realizó. En la segunda parte se incluye una guía de observación donde se informa de manera detallada todo lo que ocurrió durante el desarrollo de la PIP y que nos permite ver el proceso de evolución del aprendizaje tanto del grupo experimental como del grupo control.

5.1 Análisis sintético de la información de logro

Para tener una medición del nivel de logro de los estudiantes, se les aplicó tanto al grupo experimental como al grupo control, un examen sobre los contenidos que aborda la propuesta, al iniciar la intervención y otro examen al finalizar. A estas pruebas les he llamado pretest y posttest, respectivamente.

La información presentada indica que los alumnos obtuvieron un porcentaje relativamente similar y reprobatorio en el pretest. En el grupo experimental los resultados obtenidos en el pretest fue de 5.896, mientras que en el grupo control de 5.189, en cambio en los porcentajes que se consiguieron en el posttest fueron de 8.229 para el grupo experimental y para el control de 5.830 (véase tabla 1). Por

lo que estos resultados nos muestran que los alumnos tenían un conocimiento muy escaso de ese tema al iniciar con la intervención y que al finalizar se observó que con aquéllos con los que se trabajó la propuesta como parte de la tesis se consiguió un promedio aprobatorio y aceptable, pues se incrementó para el grupo experimental su porcentaje hasta el 8.224

Es importante reconocer que los grupos con los que se trabajó la tesis no contaban con los conocimientos necesarios por lo que la media demostró que en los exámenes posttest que se encontraron en promedios similares, también que la información que se presentó quedó en nivel descriptivo, por lo que es necesario realizar pruebas de hipótesis que robustezcan los resultados.

Tabla 1. Promedio y desviación típico de cada grupo, error típico de la media, tanto el pretest como en el posttest.

Grupo			Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
<i>Control</i>	<i>Par 1</i>	<i>Puntaje en el posttest</i>	5.830	53	1.5284	.2099
		<i>Puntaje en el pretest</i>	5.189	53	.3950	.0543
<i>Experimental</i>	<i>Par 1</i>	<i>Puntaje en el posttest</i>	8.229	48	1.8012	.2600
		<i>Puntaje en el pretest</i>	5.896	48	.3087	.0446

Para considerar que los grupos estaban en condiciones similares al inicio, y por tanto resulta inapropiado sólo comparar los resultados del posttest, se analizó lo que cada uno, de forma independiente, avanzó respecto al pretest.

Lo que se encontró es que mientras el grupo control avanzó 0.641 puntos, en el grupo experimental hubo una ganancia de 2.333 puntos en promedio en el grupo. Esos datos ya van mostrando que el haber trabajado con la PIP que se diseñó para esta tesis tuvo mayores beneficios que en comparación con la manera tradicional de dar las clases y que está establecida por el currículum.

Sin embargo, para indagar si los resultados son estadísticamente sólidos, se utilizó para cada uno de los grupos (experimental y control) una prueba de hipótesis de T-Student para datos apareados, de tal manera que compara si estadísticamente hubo un avance.

Un requisito para usar la prueba de T-Student es que las poblaciones tengan una distribución normal. Para conocerlo, se utilizó una prueba de Kolmogorov-Smirnov. Los datos indican, con un nivel de significancia de 0.13 y 0.193, para el grupo experimental y de control, respectivamente, que ambas poblaciones se distribuyen de forma normal y por tanto, es plausible la utilización de la prueba de T-Student para datos apareados.

Los resultados indican que el avance que consiguieron ambos grupos es estadísticamente significativo (nivel de significancia de .003 para grupo experimental y 0.000 para grupo control); sin embargo, al revisar los intervalos de confianza se pudo apreciar que mientras que la utilización de una metodología de

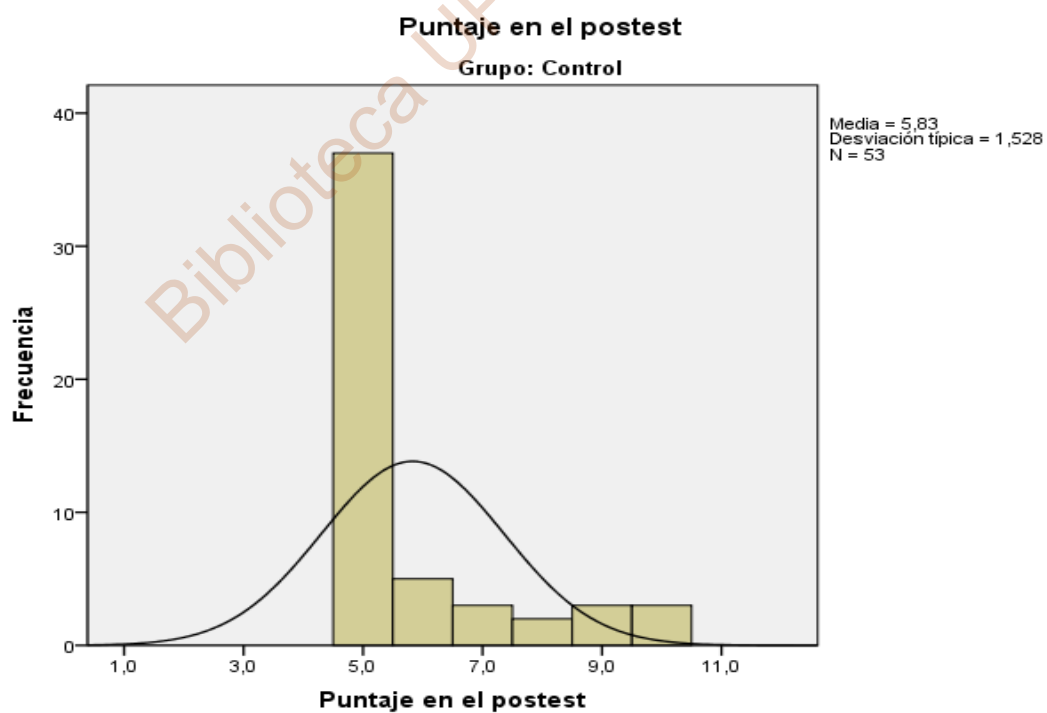
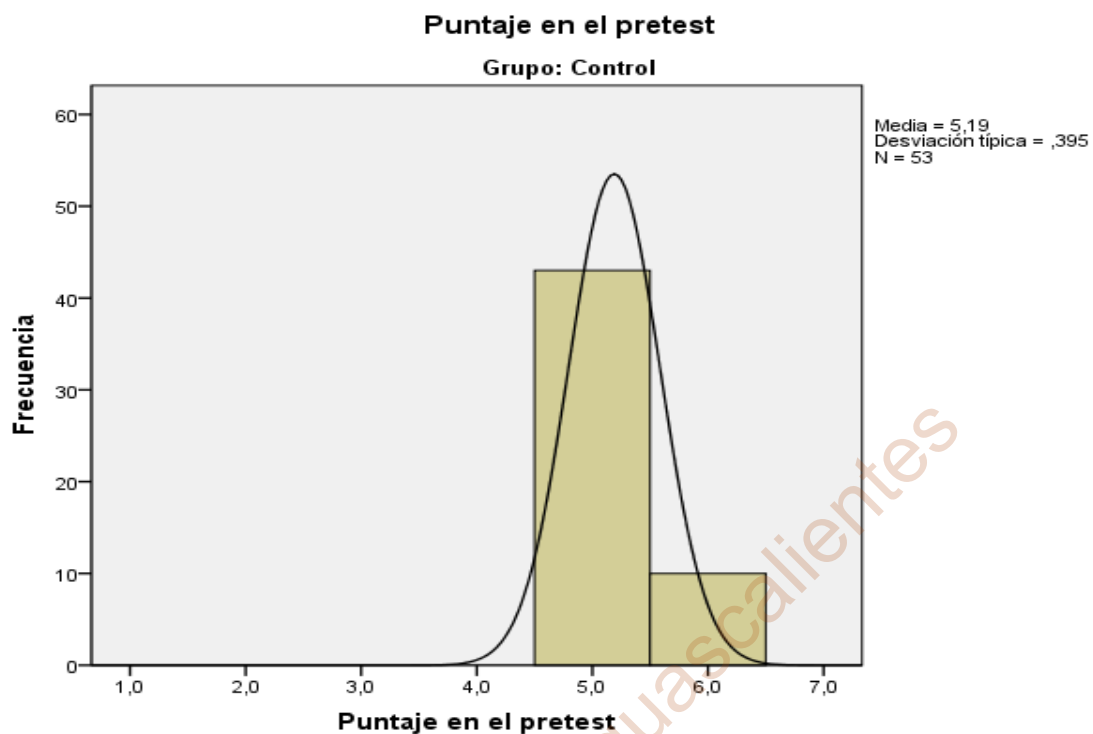
trabajo semejante a la que se utilizó con el grupo control tiene una probabilidad del 95% de conseguir un avance de entre .2260 hasta 1.0571 puntos; en cambio, la utilización de una metodología como la que se aplicó con el grupo experimental, tiene un 95 de probabilidad que consiga un avance de entre 1.8418 hasta 2.8248 puntos en los grupos (véase tabla 2).

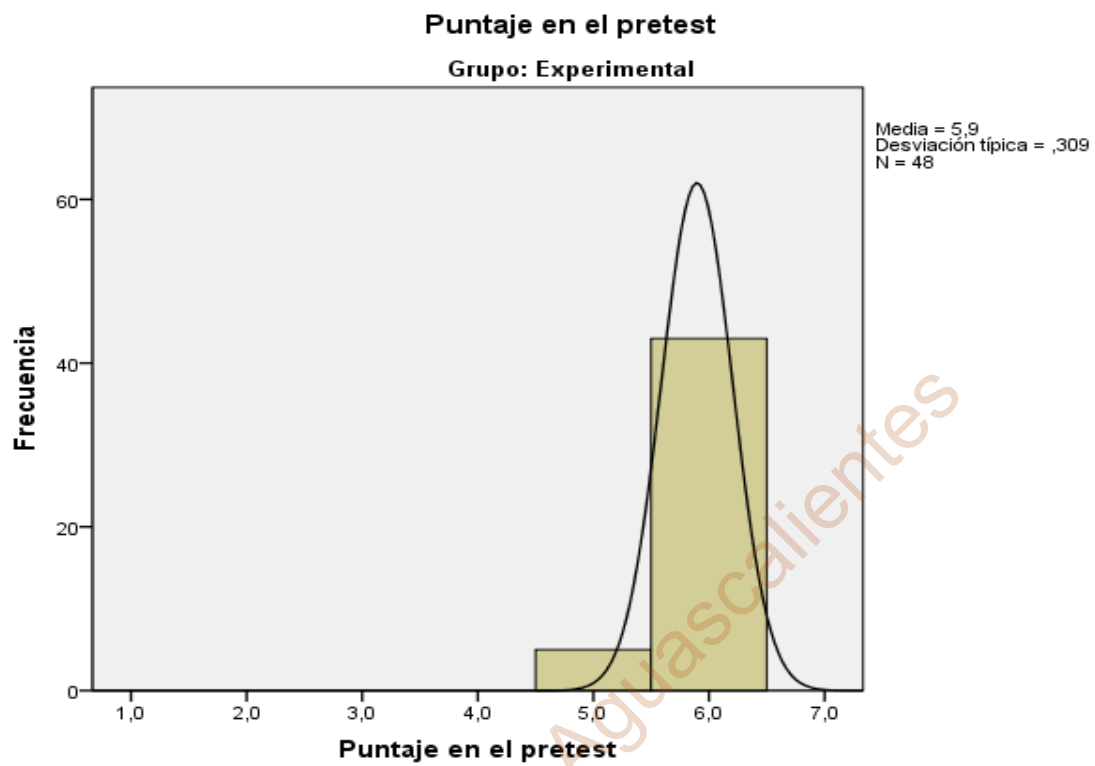
Por lo que se puede concluir que la propuesta metodológica que se aplicó al grupo experimental tuvo éxito y se comprobó estadísticamente que el avance que ellos tuvieron fue significativamente comprobada, pues así que en la actualidad los alumnos requieren una enseñanza basada en las competencias y construcción significativa de los conocimientos.

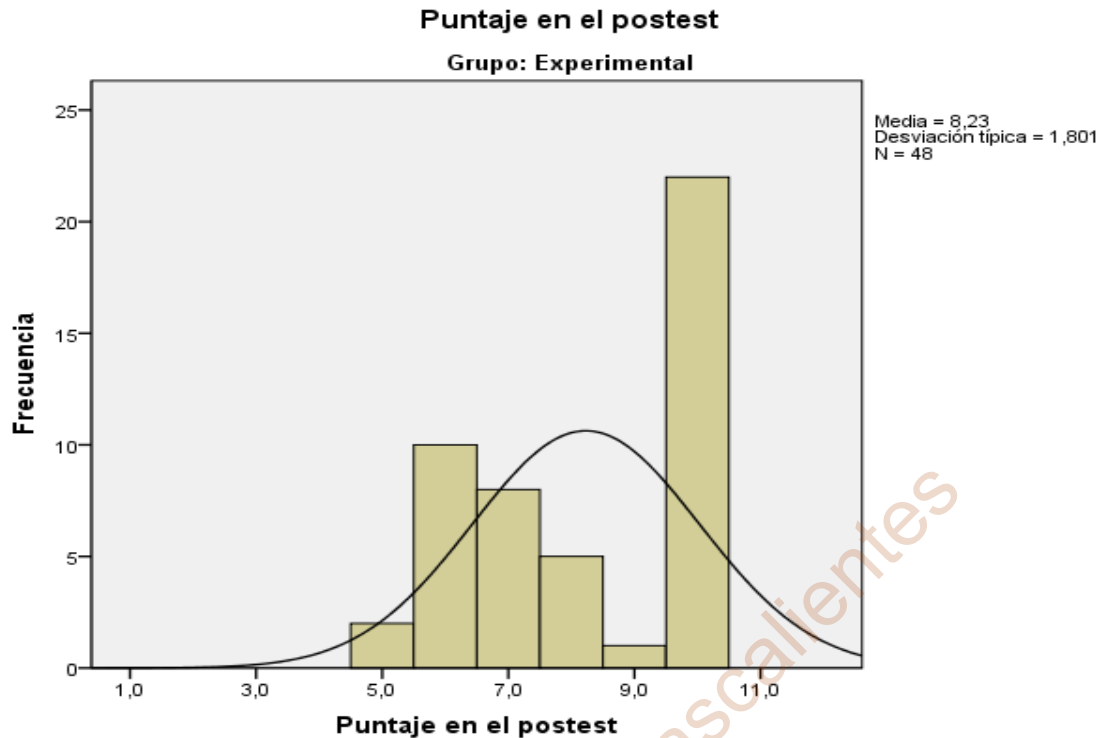
Tabla 2. Prueba de T-Student para datos apareados: puntaje en el *pretest* vs. puntaje en el *posttest*.

Grupo	Promedio de avance	Desviación Estándar	Intervalo de confianza (95% confiabilidad)	Intervalo de confianza (95% confiabilidad)	Nivel de Significancia
			Lim. Inf.	Lim. Sup.	
Control	.6415	1.5076	.2660	1.0571	.001
Experimental	2.3333	1.6927	1.8418	2.8248	.003

Histogramas:







5.2 Guía de observación del grupo experimental y control

Los resultados que se presentaron en el apartado anterior, estuvieron condicionados por una serie de sucesos que ocurrieron a lo largo de las sesiones de trabajo. Enseguida se presenta una descripción de cada uno de los días de trabajo con la PIP (en el grupo experimental), como en el grupo de control.

Día I

“Examen diagnostico”

Grupo Experimental: 1° “A”

En esta primera sesión, se aplicó el examen diagnóstico, que permitió conocer en primer lugar los conocimientos previos que tienen los alumnos, las primeras tres

preguntas hicieron referencia al triángulo oblicuángulo en su definición de la cual se demostró que tienen información, pero no la suficiente para llegar a la respuesta correcta, distinguen las características del triángulo según sus lados, también saben que un triángulo acutángulo tienen sus ángulos menores de noventa grados y obtusángulos que tienen un ángulo mayor de noventa grados, pero la mayoría no supo que era un triángulo oblicuángulo, esta definición no les permitió resolver los ejercicios de lo que más adelante se hará mención.

Pregunta número cuatro dice lo siguiente ¿sabes si la ley de senos y cosenos tiene aplicación en la vida real? Hablando de una forma muy general y recordando que son preguntas abiertas, y que éstas no permiten tener una información fiable, la respuesta a esta pregunta era por lo regular que sí, aludiendo a su aplicación en a la ingeniería y a la arquitectura.

Las preguntas cinco y seis que eran la resolución de ejercicios de senos y cosenos, ellos aplicaron sus conocimientos previos, tuvieron idea de cómo contestarla, haciendo referencia al teorema de Pitágoras, y a las funciones trigonométricas básicas, pero algunos de ellos fueron más allá porque contestaban de la siguiente manera, “que no era posible resolver por triángulo rectángulo, porque sabiendo que los ángulos interiores, uno de ellos no es recto, no tenía solución por ese método”.

En ese momento se notó la gran disposición por saber del tema que se estaba tratando, por lo que espontáneamente se les permitió sacar el diccionario, poniéndose a investigar que es la palabra oblicuángulos, por lo que encontraron

definiciones como “Aquel que tiene ángulos inclinados”, “Son aquellos que tienen ángulo recto” “Son ángulos que no tienen ángulo recto”. Una alumna hizo la siguiente afirmación en uno de los problemas del cuestionario “los problemas no tienen solución porque no es congruente al no tener un ángulo recto”. Por lo que se deduce que su conocimiento previo le permitió a ella saber que se resuelven de manera diferente.

Grupo Control: 1° “B”

Antes de iniciar a comentar los resultados del examen diagnóstico, se explicó de forma muy general la conducta de este grupo. En su mayoría, por la experiencia que se ha tenido con éste, no tienen bien definido lo que es el compromiso por estudiar, por la razón de que en sus exámenes tienden a sacar calificaciones bajas, son pocos los que traen sus tareas, y tienden a ser indisciplinados, creando entre ellos conflictos internos que en algunos casos hay necesidad de retirarlos del salón de clases. En cuanto al examen diagnóstico que se les planteó se puede reconocer claramente al analizar las tres primeras preguntas, los conocimientos previos sobre triángulos y reconociendo que se trabajó con anterioridad los temas referentes a los triángulos no pudieron ni siquiera identificar qué era un triángulo obtusángulo y un acutángulo por lo que les fue imposible contestarlas, pero es de reconocer que algunos sí dedujeran la respuesta pero lo preocupante que fue una minoría. Cuando se les preguntó si sabían si las leyes de senos y cosenos tenían aplicación en la vida real, contestaban que sí, pero no de qué forma.

En cuanto a las dos últimas preguntas donde se les puso a que resolvieran ejercicios de aplicación de estas leyes, se reconoce que buscaron sus métodos para resolverlos, uno de los más frecuentes fue por medio de funciones trigonométricas básicas, por lo que se interpreta que tenían idea de cómo se podían resolver, pero al final se desistían y los dejaban a medias o con procedimientos erróneos sin ningún resultado.

Día II

Grupo Experimental: 1° "A"

En la segunda sesión de actividades, se pidió a los alumnos que resolvieran un problema práctico, para encontrar distancias el cual se presenta a continuación: Desde el alto de un helicóptero se observa a dos personas en lados opuestos del mismo. Los ángulos de depresión hacia dichas personas son de 55° y 65° respectivamente. Además la distancia del helicóptero a la primera persona es de 120 m ¿Cuál es la distancia del helicóptero hacia la otra persona? De este problema se les preguntó lo siguiente: Empleando las funciones trigonométricas básicas ¿Puedes calcular la distancia solicitada?

Después de formarlos en equipos y notando que faltaban alumnos porque ese día se celebraba el certamen a la reina estudiantil, empecé a trabajar con el resto. Al ir a observar a los equipos a sus respectivos lugares noté que uno de ellos para resolver el problema presentado, dividió al triángulo oblicuángulo sacando su altura, en ese momento ese nuevo par de triángulos se hicieron rectángulos.

De esta forma conociendo uno de sus lados y el ángulo que lo forman y aplicando la función trigonométrica básica seno, empezaron ellos a resolver el primer triángulo, y después observaron que había una medida (la altura) que compartía a los dos triángulos y con el otro ángulo sacaron la medida buscada. En ese momento y sin ellos darse cuenta aplicaron el principio fundamental para la ley de senos, porque aplica una igualdad entre ángulos y un lado en común.

Otro equipo que también se hizo notar por su originalidad fue que para sacar los ángulos faltantes, utilizó los teoremas de los ángulos entre paralelas llamando su atención en especial el de los ángulos alternos internos, de este modo al aplicarlo sacaron los ángulos, del triángulo en cuanto al procesamiento utilizado fue muy parecido al anterior.

Al final de la práctica venía la siguiente pregunta ¿Alguno pudo trabajar la distancia con ángulos oblicuángulos? Un equipo que va a ser de especial atención, para esta práctica de tesis, aplicaron la fórmula de la ley de los senos y lo más importante que cuando pasaron al frente a compartir con sus compañeros la solución, su explicación fue muy congruente y analítica, puesto que ya conociendo el procedimiento, únicamente discriminaron parte de la fórmula, dejando bien en claro que al hacer un despeje dejaron al valor que se estaba buscando y sustituir sus demás elementos y hacer el algoritmo matemático y encontrar la solución.

En cuanto a las debilidades que hubo en esa clase hay que reconocer que no todos llegaron a la solución, pero en base en sus dudas se empezó a trabajar y se

hicieron de ellas cuestionamientos que les permitió disipar sus dudas, un ejemplo es que no entendían el concepto de ángulo de depresión por lo que no podían encontrar los ángulos internos, pero por medio de preguntas y rescatando conocimientos previos pudieron sacar el resultado.

Grupo Control: 1° “B”

En este grupo se hizo la demostración para encontrar la fórmula de los senos que consiste en relacionar dos triángulos inscritos dentro de un triángulo con una misma altura, que fue demostrado por el catedrático por lo que la participación del grupo fue solamente la de ser receptores por lo que se dedicaron a escuchar la explicación, se les preguntó si tenían alguna duda sobre el procedimiento empleado por lo que contestaron que no.

Día III

Grupo Experimental: 1° “A”

En esta tercera sesión se hizo el diseño de propuesta, que permite llegar a la ley de senos, del cual surgió un inconveniente, porque la planeación tenía una inconsistencia, no fue planeada en cuanto al tiempo porque sólo duró 20 minutos. La fortaleza, que con ese tiempo fue lo suficiente para que quedara entendida la explicación, que se basó en el problema anterior, del cual como se había

comentado antes se demostró que había una manera más sencilla de resolver los ejercicios (ley de senos).

Como se habló con anterioridad, la planeación no duró el tiempo especificado, por lo que se decidió, para no desaprovechar el tiempo, seguir adelante con la nueva planeación que consistía en la siguiente:

“Empleando un proceso similar al anterior que compruebe que la relación se cumpla si trazamos las alturas que corresponden a los otros dos lados e incluso dibuje un triángulo obtusángulo y compruebe que la afirmación se mantiene verdadera para cualquiera de sus vértices”.

Como la clase quedó inconclusa, se les pidió que trajeran su actividad de tarea.

Grupo Control: 1° “B”

Para esta sesión se les preguntó lo que se había visto la clase anterior, por lo que en su mayoría no lo recordó por lo que me vi en la necesidad de hacer preguntas directas para saber que podía rescatar, pero con profunda decepción al preguntarles me di cuenta que no sabían, por lo que me vi en la necesidad de darle un repaso a la clase anterior, después inicié con la explicación de algunos ejemplos relacionados con la ley de los senos y ahí concluyó la sesión.

Día IV

Grupo Experimental: 1° “A”

Al verse modificadas las planeaciones quedó pendiente parte de la actividad II, por lo que solamente dos equipos pasaron al pizarrón a explicar sus procedimientos. El primer equipo lo primero que hizo fue invertir al triángulo para que la base quedara horizontal y así sacar la altura, quedando más comprensible su demostración, de tal forma que les permitió ver con más claridad quién era el cateto opuesto y a su vez la hipotenusa para los ángulos “B” y “C”.

Pasó después el segundo equipo para resolver los otros ángulos faltantes, “C” y “A”, demostrándolo de esta manera incluyeron a todos los ángulos y haciendo los algoritmos matemáticos resolvieron en pocos pasos el procedimiento.

La actividad de cierre dice lo siguiente:

Realiza un mapa mental en el que incluyas los elementos de la afirmación anterior que debes de considerar al momento de aplicarla en la solución de triángulos y en general de situaciones reales que lo incluyan. Comparte con tus compañeros en plenaria los resultados obtenidos de ambas actividades. Esta parte de la sesión quedó inconclusa por lo que se les pidió que terminaran la actividad en sus casas y exponerlas al otro día.

Grupo Control: 1° “B”

Teniendo en cuenta lo pasado en la sesión anterior, empecé explicando dos ejercicios de leyes de senos donde se les advertía que lo primero que se debe observar es que vean que en este tipo de problemas tiene que haber una relación entre ángulos y lados (razón) con datos disponibles y otra donde haya un lado o un ángulo, y un dato desconocido. Algo que es de mi especial atención es que

este grupo lo noté distante y sin ánimo de escuchar lo que se les estaba explicando, porque los noté distraídos y sin ganas de aprender. Después les planteé el siguiente problema:

$A = 80^\circ$ $B = 2.15^\circ$ $b = 81$ encontrar a .

También me llamó mucho la atención que no les quedó claro lo que con mucha insistencia se les advirtió: que vieran si había relación entre ángulos y lados, por lo que no pudieron resolver el ejercicio, dando hincapié a seguir explicando.

Día V

Grupo Experimental: 1° "A"

Para la sesión seis pasaron los equipos a exponer la actividad del día anterior, es de llamar la atención que sin haber visto el tema de la ley de senos el primer equipo pudo resolver un problema sin que se les explicara el procedimiento, pero se reconoce que hubo deficiencias y es normal porque no lograron distinguir los elementos como son la razón de su lado con su ángulo. Pero al pasar el segundo equipo pasó algo que me permitió interpretar que no quedó clara la actividad, la razón es que al hacer los problemas de aplicación ellos no diferenciaron entre el procedimiento para la construcción de la fórmula, con la fórmula de la ley de senos, por lo que sabiendo que no se debe de aplicar la altura para la resolución de esos ejercicios la aplicaron, dándome cuenta de inmediato del error que si no era corregido se iba después a entender como parte de la solución, pero la

intención de la actividad era una inducción al tema por lo que se decidió no corregirlos todavía, así como ellos, dos equipos más cometieron el mismo error, en ese momento un compañero maestro (profesor en matemáticas) que fue invitado para que viera las exposiciones, paró la actividad y aclaró muy enérgicamente la clase corrigiendo de inmediato que se estaba cometiendo un error garrafal, pues no estaba bien aplicada la fórmula de la ley de senos, porque estaban aplicando la altura, en ese momento el grupo entró en un estado de tensión, porque se interpretó por parte de los alumnos que todo lo que hicieron estaba mal, en ese momento se tuvo que aclarar, que no estaban mal por la razón que era una inducción al tema de la ley de senos. Para esta sesión se pusieron los ejercicios para que practicasen las leyes de senos.

Día VI

Grupo Experimental: 1° "A"

Por el altercado de la clase anterior, se vio la necesidad de corregir las dudas y explicar que tiene en común la misma altura, esto fue de beneficio porque les dio confianza y seguridad, puesto que el error no fue al aplicar la fórmula, sino una simple confusión con la construcción de ella; al pasar los últimos equipos ellos mismo reconocieron que no les había quedado clara la intención de la actividad, pero se les comentó que ellos no estaban mal, porque como se había dicho antes esta actividad era una inducción a la ley de senos.

Día VII

Grupo Experimental: 1° "A"

En esta sesión se estableció la fórmula de ley de senos, en este momento a los alumnos se les presentó el siguiente ejercicio:

$$\angle A = 68^\circ, \angle B = 52^\circ \text{ y } c = 38 \text{ unidades. Hallar: } \angle C, a, b.$$

Al ir a revisar a los equipos se detectó que no estaban recordando el teorema de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, que dice que la suma de ellos es igual a ciento ochenta grados por lo que no podían iniciar el ejercicio, en ese momento esa debilidad la aproveché para preguntarles para así recordar conocimientos previos sobre triángulos, y así de este modo empezaron a resolver el ejercicio, en cuanto al resto ellos solos aplicaron la fórmula de ley de senos, en ese momento se demostró que sin necesidad de que se les explicara el procedimiento solos lo dedujeron por lo que no hubo necesidad de resolver dudas. Ahí quedó demostrado que ellos solos aprendieron a aplicar la ley de senos.

El segundo ejercicio dice lo siguiente:

$$\angle A = 66^\circ, \angle B = 56^\circ \text{ a } = 12 \text{ unidades resolver el triángulo.}$$

Ya con la idea del ejercicio anterior, los alumnos no tuvieron ningún problema en resolverlo por lo que solamente se pusieron a contestarlo.

Grupo Control: 1° “B”

Para esta sesión se les dejó que resolvieran aplicaciones de leyes de senos y noté que tienen problemas de lectura, por lo que se les dificultó resolver los ejercicios y me vi en la necesidad de explicarles qué era lo que les pedía el problema y así de esta forma ponerse a contestar los problemas.

Día VIII

Grupo Experimental: 1° “A”

Para esta sesión se les pidió a los alumnos que resolvieran la siguiente actividad: Se tiene que dos de los lados de un triángulo miden 12 y 10 metros respectivamente; el ángulo comprendido entre ellos es de 40° . Calcula la medida del tercer lado. ¿Es posible, que la ley de los senos no pueda aplicarse?

Al ir a observar a los equipos uno de ellos hizo lo siguiente: al ver ellos que era un triángulo isósceles dedujeron la respuesta puesto que uno de los lados iguales mide 10 unidades, por lo tanto el otro lado mide lo mismo que es el lado buscado, también detectaron que no se podía resolver el triángulo por ley de senos porque le faltaban elementos conocidos.

Otro equipo escribió lo siguiente en la hoja de trabajo: “No se puede realizar por medio de la ley de senos ya que no hay ninguna razón, en ningún momento hay relación de ángulo con lado, ya que también contempla la altura y con ley de senos no se necesita”. Afirmativamente aplicaron la ley de los cosenos por lo que

se notó que investigaron esta fórmula por su cuenta y lo escribió así:
“Investigamos por nosotros mismos la ley de los cosenos y nos dimos cuenta que se resolvía por este método por lo que encontramos la respuesta buscada”

En otra hoja de observación encontré que una integrante escribió lo siguiente:
“No se puede aplicar la ley de senos, porque se necesita conocer el lado con su ángulo, opuesto y viceversa, en este caso sólo se reconocen dos lados, sin ángulo opuesto, por lo que es imposible usar la ley de los senos”

Después de haber hecho estas observaciones ellos indujeron la aplicación de la ley de los cosenos por lo que la aplicaron en este momento, se notó que una de las ventajas de trabajar de esta forma que ellos se convierten en autodidactas y empiezan a investigar por su cuenta.

Grupo Control: 1° “B”

Para esta sesión se empezó a explicar la ley de cosenos, ésta consistió en primer lugar en deducir la fórmula que consiste en aplicar el teorema de Pitágoras para deducir esta fórmula. Después se les hizo ver las condiciones que tiene esta ley que la hace diferente a la ley de senos, como es que si ya no corresponde una relación entre un ángulo y un lado ya no se puede aplicar esta fórmula (ley de senos). Por lo que es necesario aplicar una fórmula optativa donde puedes aplicar un ángulo con dos lados de los cuales ninguno de los dos son correspondientes.

Día IX

Grupo Experimental: 1° "A"

Para la clase nueve se pidió que resolvieran la siguiente situación: "Elabora un mapa conceptual que incluya las condiciones generales que deben de satisfacerse para aplicar las leyes de senos y cosenos en la situaciones teóricas y prácticas. Comparte con la clase tu producto para validarlo y que sea significativo su uso".

El primer equipo que participó hizo un comparativo entre la ley de senos y cosenos que es indispensable para solucionar estos problemas; en primer lugar, distinguieron que para resolver problemas de senos se debe de saber que por lo menos haya dos lados y un ángulo opuesto o tres ángulos y un lado y para la ley de los cosenos se necesita saber que tengan tres lados o dos lados con un ángulo en común ; permitiendo saber con esto que es el conocimiento indispensable para resolver problemas de senos y cosenos.

El siguiente equipo comentó: "Aquí lo que distingue a la ley de senos de la de cosenos es que no se proporcionan dos ángulos y un lado, a diferencia de la ley de senos sólo nos proporciona un ángulo y dos lados aquí nos marca una altura y éste se puede resolver por el teorema de Pitágoras y también es cuando no corresponden a la razón de ángulos y lados. Haciendo un breve comentario a esto, se deduce que ellos tienen la idea de resolver esta clase de ejercicios, pero en cierto momento se pierde la idea, puesto que no hay necesidad de sacar la altura para resolver estos ejercicios, puesto que en ningún momento se aplica el teorema de Pitágoras.

El siguiente equipo que participó hizo un mapa conceptual donde hace distinción de las leyes de senos y la de cosenos, dando características únicas que permiten saber que la comprensión de estos métodos está ya definida.

Pero también hay que reconocer las debilidades, puesto que los alumnos no explicaron situaciones prácticas para la resolución de problemas de la vida cotidiana, por lo que no permite hacer una crítica (hasta este momento) constructiva donde se pueda analizar su creatividad.

Grupo Control: 1° "B"

En esta sesión se empezaron a explicar problemas de leyes de cosenos, por lo que ya se había explicado con anterioridad que este grupo carece de aptitudes para el estudio (en su mayoría, se aclara), por lo que al momento de irles explicando los ejercicios, no se les notó interés por aprender el tema, entonces parte de la clase me la pasé llamándoles la atención y por estar distraídos cuando les puse el siguiente ejercicio:

$$a = 32.45 \quad b = 27.21 \quad C = 66^\circ. \text{ Hallar } c$$

Cuando empezaron a contestar el problema no tomaron en cuenta las consideraciones de las cuales yo les advertí en la clase, por lo que ni siquiera se fijaron la mayoría y se pusieron a resolver el ejercicio por medio de leyes de senos, por lo que en cierta manera por ellos mismos se fijaron y no estuvo del todo mal, porque ellos mismos comprobaron que no se podía resolver por este

método, en ese momento empezaron a aplicar la ley de los cosenos reconociendo que ya hubo un avance significativo: por sí solos aplicaron la fórmula y más de la mitad llegó al resultado, en ese momento mi centro de atención fueron los que no pudieron llegar al resultado, en ese momento expliqué el siguiente ejercicio:

$$b = 49.8 \quad c = 77.6 \quad A = 59^\circ$$

En ese momento les volví a insistir que era muy importante, fijarse en qué momento se debe de aplicar la ley de senos y cuándo la ley de cosenos, dando énfasis a esta última que es la que estábamos aplicando, por lo mismo que ellos observaran que era muy importante ver los datos que tenían para saber qué fórmula aplicar, en este caso que vieran que en la ley de los cosenos ya no hay ninguna relación entre ángulos y lados por lo que la única alternativa era aplicar esta fórmula, por lo que ahora sí logré con mucho esfuerzo que la identificaran y aprendieran.

Día X

Grupo Experimental: 1° "A"

En este día se aplicó el examen post-diagnóstico que consistió en un examen donde se propusieron cuatro problemas prácticos, dos de ellos de aplicación de leyes de senos. La primera aplicación que es el ejercicio numero dos dice lo siguiente:

“Un solar de forma triangular tiene dos lados de longitudes 140.5 m y 170.6 m y el ángulo opuesto al primero es de 40° . Hallar la longitud de una cerca que lo rodee completamente.

Este problema permitiría saber si deducen que el método de solución es la ley de senos, por lo que al ir revisando los exámenes en su mayoría acertó e identificaron que para este método se necesita saber que haya una relación entre un ángulo y un lado, pero también pude observar que su sentido de interpretar problemas mejoró, porque al poner el triángulo oblicuángulo y poner sus datos todos fueron colocados de acuerdo a como se los pedía el problema.

El problema número cuatro del examen dice lo siguiente:

“Para calcular la distancia entre dos puntos A y B separados por un estanque se le ha escogido una estación C y se han medido las distancias $CA = 426$ metros, $CB = 322.4$ metros y el ángulo $ACB = 68.42^\circ$ ¿Cuál es la distancia AB?”.

Este problema puso a prueba si lograban identificar la ley de cosenos puesto que no había relación entre ángulos y lados. Al ir revisando los exámenes se pudo observar que al poner los datos en el triángulo oblicuángulo acertaron en su mayoría que se tenían que aplicar la ley de los cosenos, observando como lo había dicho con anterioridad que tenían dos lados, pero el ángulo no correspondía, por lo que se aplicó la fórmula antes dicha.

Grupo Control: 1° “B”

En esta sesión se aplicó también el examen post-diagnostico, algo muy interesante fue, al hacer un análisis de estas evaluaciones me pude dar cuenta que no tuvieron problemas en contestar los ejercicios de aplicación de leyes de senos, pero algo que me preocupa es que no pudieron contestar problemas de leyes de cosenos, por lo que a pesar de haberlos visto en la clase anterior no les quedó claro.

Día XI

Grupo Experimental: 1° “A”

Para la última sesión de actividades se presentó la actividad “El día de la Trigonometría”, que consistió en la presentación de proyectos por parte de los alumnos donde expusieron todos los conocimientos adquiridos en maquetas que presentaron a sus compañeros y algunos directivos que fueron invitados para dar fe a la actividad mencionada. Por la gran cantidad de problemas solamente haré mención de los que a mi punto de vista son los más interesantes.

El primer equipo nos mostró el siguiente problema: “En el estado de Jalisco, hay una montaña, y en su lado derecho hay un pozo a una distancia de 250 m y forma un ángulo de 65° . Del lado izquierdo de la montaña hay un teleférico. Si del pozo al final del teleférico es una distancia de 610 m ¿Cuál es la longitud del teleférico a la cima de la montaña al piso?

De este problema se puede sacar la siguiente conclusión, este equipo tuvo la capacidad de emplear una de las competencias matemáticas que es “Comunicar información matemática” que consiste en la posibilidad de que los alumnos, expresen, representen, interpreten información matemática, contenida en una situación o fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa, relacionada con la situación; se establezcan relaciones entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas, se deduzca la información derivada de las representaciones y se infieran propiedades, características y tendencias de la situación o del fenómeno representado”. Por lo que por medio de este problema de la vida real y aplicando la ley de cosenos pudieron explicar de manera clara y sencilla a sus compañeros un problema que fue creado por ellas y que tuvo impacto entre sus compañeros, porque al explicar su procedimiento se entendió con facilidad.

Uno de los problemas creativos y más interesantes es el siguiente: “Un Dragón que se encuentra arriba de un castillo y está hambriento quiere saber qué princesa está más cerca de él para atraparla y comerla. Resuelve con los siguientes datos que se te dan: El ángulo en que se encuentra la princesa A al dragón es de 45° y la princesa B 68° y la distancia que hay entre ellos es de 12 m. ¿A quién puede comerse el dragón?.

Este problema en lo particular fue de lo más interesantes porque puso en juego la creatividad del problema, puesto que aplicaron la ley de los senos para resolver un problema extraído de un cuento y que esto permite pensar que las matemáticas

están aplicados en la vida real como en problemas de invención, aclarando que el procedimiento matemático fue muy completo porque tuvieron que encontrar los ángulos interiores del triángulo y después aplicar su fórmula.

El siguiente equipo presentó desde mi punto de vista la mejor maqueta, porque reconociendo que ellos utilizaron materiales de bajo costo como palitos de madera y cartulinas crearon un puente muy bien hecho y a su vez interesante, el problema dice lo siguiente: En el puente de San Francisco suelen organizar arrancones. Entonces dos autos salieron al mismo tiempo, pero el auto uno se queda parado a medio camino cuando el auto dos llegaba a la meta. Sabiendo que los dos pilones (lados) miden 227 m, y el ángulo formado mide 50° ¿Cuál es la distancia entre los autos?

Esta propuesta, igual que las anteriores tiene toda intención de que por medio de un problema práctico se demuestre la aplicación de las leyes de senos y cosenos, por lo que como conclusión se puede advertir que sí hubo una amplia comprensión, por parte de los equipos donde ellos demostraron en primer lugar que aprendieron por ellos mismos el tema de leyes de senos y cosenos, además de que también demostraron que la creación de problemas interesantes motivó a que utilizaran la imaginación, la creatividad y la inteligencia para realizar estos proyectos que culminaron con productos de buena calidad y lo importante que se cumplió con el objetivo que es el autoaprendizaje.

Grupo Control: 1° "B"

Observando que pudieron resolver ejercicios de leyes de cosenos dediqué la mayor parte de la clase a explicar problemas, pero lamentablemente ya cuando escribí esto ya habían pasado el tercer parcial y el semestral y no pudieron contestar ejercicios de este tipo por lo que se fracasó rotundamente.

Biblioteca UP Aguascalientes

CONCLUSIONES

Al finalizar la presente tesis, se pueden señalar algunas aportaciones para que quienes les tocó vivir de cerca el trabajo docente, ya sea como receptor o transmisor, siempre y cuando al alumno se le considere un actor pasivo, pero ya en la actualidad con un enfoque por competencias, éste es partícipe en la adquisición de conocimientos, con un movimiento en los saberes que ha ido acumulando en su trayecto formativo.

De acuerdo con lo anterior durante el desarrollo, en la integración y selección de la información, me di cuenta que los alumnos no podían resolver problemas de “Leyes de senos y cosenos”, porque no cuentan con conocimientos previos, por esta razón resultó difícil rescatarlos, ya que no demostraron las habilidades, destrezas, valores y actitudes (Competencias) que necesitan para resolver los propósitos de la enseñanza de las matemáticas.

Considero que para lograr un aprendizaje significativo es importante desde un principio conocer las necesidades de los alumnos, los intereses del contexto del cual provienen sin considerarlo como único; también es necesario revisar los antecedentes en los planes y programas en el trayecto formativo, es decir conocer el currículum. Un recurso que sigue vigente es el examen diagnóstico que nos permita detectar sus antecedentes cognitivos, para que a partir de ahí se prepare el trabajo metodológico a seguir.

Todo lo anterior requiere de una práctica docente exitosa, donde el docente genere en el alumno además de la curiosidad y la imaginación, también la argumentación y despierte el interés en la reflexión, ya que de esta manera los alumnos, encuentran diferentes formas de resolver problemas argumentando los resultados, de ahí que construyan su conocimiento apoyándose en el razonamiento y desarrollen la idea práctica de la aplicación de contenidos en la vida cotidiana.

También es importante que el docente tenga dominio del contenido y además conozca la nueva propuesta metodológica (Competencias) y maneje los recursos tecnológicos, para que sea visto como un facilitador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, estimulando al alumno para que se forme un pensamiento crítico, además el docente debe de proveer el tiempo para que los alumnos construyan su conocimiento, de igual forma de explorar continuamente para evaluar y después saber qué necesitan los estudiantes para tomar decisiones y al final planificar actividades propias para el aprendizaje de los alumnos.

Por último, considero que una manera para que los alumnos resuelvan consignas por ellos mismos, es que el alumno de segundo de bachillerato reciba actividades de estudio que despierten en ellos el interés por aprender y reflexionar, encontrando diferentes formas de resolver problemas, formulando ellos argumentos que les permitan validar sus resultados. Para eso no se trata de que el maestro busque explicaciones sencillas, sino en analizar y proponer problemas interesantes, para que el alumno aproveche lo que ya sabe y avance con el uso de técnicas y razonamientos más eficaces.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CONCEPTUALIZAR. (2012). Extraído el 20 de mayo de 2012 de <http://www.lema.rae/drae/?val=conceptualizar>

DESARROLLO COGNITIVO Y TEORIAS IMPLÍCITAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS. (1997). Benlloch Montserrat. Editorial Visor. Madrid.

DESARROLLO DEL NIÑO Y DEL ADOLESCENTE. (1997). Mecce Judith. Editorial SEP. México.

GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO Y TRIGONOMETRÍA. (1997). Baldor, Aurelio. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. México.

PSICOLOGIA EDUCATIVA. (1993). Woolfolk Anita E. Editorial Péarson Educación. México.

SEP (2006a) Plan y Programa de Estudio de Educación Secundaria. México.

Biblioteca UP Aguascalientes