

**UNIVERSIDAD
PANAMERICANA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Técnicas Lineales y No Lineales Aplicadas al
Control del Péndulo Invertido
sobre Base Móvil**

TESIS

QUE PRESENTA

Enrique David Preza Hernández

PARA OBTENER EL GRADO DE

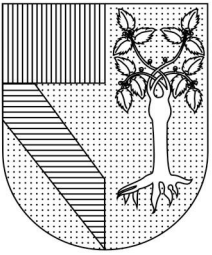
MAESTRÍA EN CIENCIAS

CON RECONOCIMIENTO DE VALIDEZ OFICIAL DE ESTUDIOS DE LA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA, DE ACUERDO CON EL N° 2007574 DE
FECHA 29 DE JUNIO 2007.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ramiro Velázquez Guerrero

AGUASCALIENTES, AGS, MAYO 2021.



UNIVERSIDAD PANAMERICANA

Campus Bonaterra

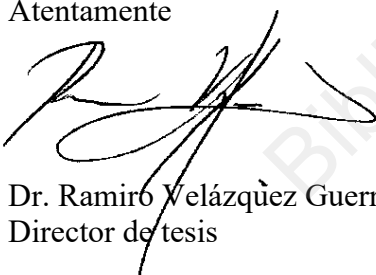
Aguascalientes, Ags., 6 de abril de 2021.

LIBERACIÓN DE TESIS

Por medio de la presente, certifico en mi calidad de director de tesis que el trabajo del Ing. Enrique David Preza Hernández que lleva como título: ***Técnicas Lineales y No Lineales Aplicadas al Control del Péndulo Invertido sobre Base Móvil*** cumple con los requisitos establecidos por el reglamento vigente de la Facultad de Ingeniería para presentarse en Examen de Titulación del programa de Maestría en Ciencias.

De resultar aprobado, podrá efectuar el trámite para la obtención del Grado de Maestro en Ciencias.

Atentamente



Dr. Ramiro Velázquez Guerrero
Director de tesis

Índice

Índice	3
Agradecimientos	4
Resumen	5
1. Introducción	6
2. Modelo del Sistema	8
3. Prototipo	11
4. Estrategias de Control	17
4.1. Enfoques lineales	18
4.2. Enfoques no lineales	22
5. Aplicaciones	27
6. Conclusiones	28
7. Referencias	28
8. Artículo original en inglés	31
9. Publicaciones	37

Biblioteca Aguascalientes

Agradecimientos

A mis padres, mi hermano, por su incondicional apoyo en todo lo que me he propuesto.

A Pamela, por lo mucho que he aprendido de ella.

A los amigos que hice y conservo en Aguascalientes, donde aprendí mucho más que ingeniería y ciencias.

Biblioteca Aguascalientes

Resumen

Esta tesis presenta una revisión completa del problema del péndulo invertido sobre base móvil. Se presenta el diseño, modelado y control de dicho sistema, así como la implementación de un prototipo mecatrónico. Se proponen varias técnicas lineales y no lineales para el diseño de controladores PD (Proporcional-Derivativo), PID (Proporcional-Integral-Derivativo), MRAC (Control Adaptativo por Modelo de Referencia) y controladores de autoajuste para estabilizar el sistema. Se comparan los rendimientos teóricos y experimentales para evaluar la precisión de los modelos matemáticos. El objetivo de este estudio es servir como tutorial o material de apoyo para comprender la dinámica que rige el sistema de péndulo invertido sobre base móvil junto con posibles estrategias de control.

Biblioteca Aguascalientes

1. Introducción

Muchas universidades y centros de investigación de todo el mundo poseen un péndulo invertido para probar las distintas teorías de control. El principal interés de este sistema es que, además de ilustrar muchas de las dificultades asociadas a los problemas de control del mundo real, se basa en un modelo general que tiene múltiples aplicaciones: desde el control de misiles hasta el análisis de la biomecánica de la marcha, el equilibrio y la postura humana.

Los péndulos invertidos son toda una familia de mecanismos: péndulo de rueda inercial [1], péndulo rotacional [2], péndulo esférico invertido [3], péndulo doble invertido [4], péndulo de Kapitza [5], acrobot [6], pendubot [7], por nombrar solo algunos. Sin embargo, la versión más estudiada es sin duda el péndulo instalado en un vehículo o carro, es decir, sobre una base móvil.

El sistema de péndulo invertido sobre base móvil consiste en un péndulo o varilla que gira libremente en uno de sus extremos a través de una articulación ubicada en la base móvil (figura 1). La base, comúnmente un carro, se desplaza sobre una trayectoria rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza F . Inicialmente, el péndulo se coloca manualmente en posición vertical perfecta ($\theta = 0$), se suelta, y el problema de control consiste en mantener de forma autónoma esa posición mediante el propio movimiento del carro. Evidentemente, sin el movimiento del carro para equilibrar el péndulo, éste simplemente caerá.

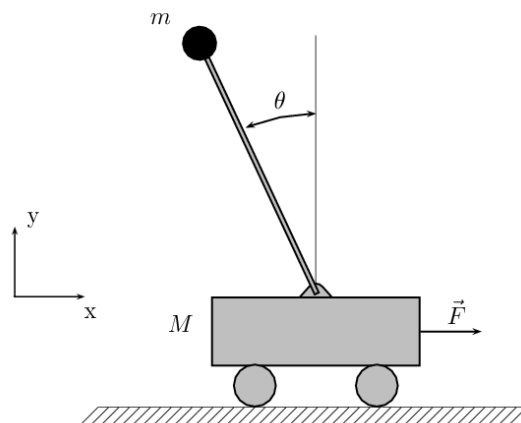


Figura 1: Péndulo invertido sobre el carro.

La dinámica de este sistema presenta varios desafíos en control: inestabilidad, comportamiento no lineal, incertidumbre paramétrica, perturbaciones no modeladas, limitaciones de los sensores, entre otros.

En esta tesis revisamos a detalle este problema de control clásico con dos objetivos principales: (1) introducir un sistema mecatrónico de péndulo invertido sobre base móvil de bajo costo con gran potencial para ser utilizado en la enseñanza de la teoría del control automático y (2) presentar el análisis completo de este sistema de forma didáctica para que pueda ser fácilmente entendido y tomado como base para el diseño de sistemas más complejos y estrategias de control avanzadas.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del sistema de péndulo invertido sobre base móvil. El capítulo 3 presenta la implementación de un prototipo mecatrónico mientras que en el capítulo 4 se proponen una serie de controladores lineales y no lineales para mejorar el desempeño del sistema. El capítulo 5 describe dos aplicaciones en curso de este trabajo. Finalmente, el capítulo 6 concluye la tesis resumiendo los principales conceptos y resultados.

2. Modelo del Sistema

La ecuación (1) describe de manera general la dinámica del carro o base móvil. Ésta se puede deducir del diagrama de cuerpo libre de la figura 2(a):

$$Mx'' = F - bx' - N \quad (1)$$

donde M es la masa del carro, F es la fuerza o impulso inicial, b es el coeficiente de fricción y N es la fuerza horizontal ejercida por el péndulo sobre el carro (la fuerza vertical P se puede despreciar en este momento).

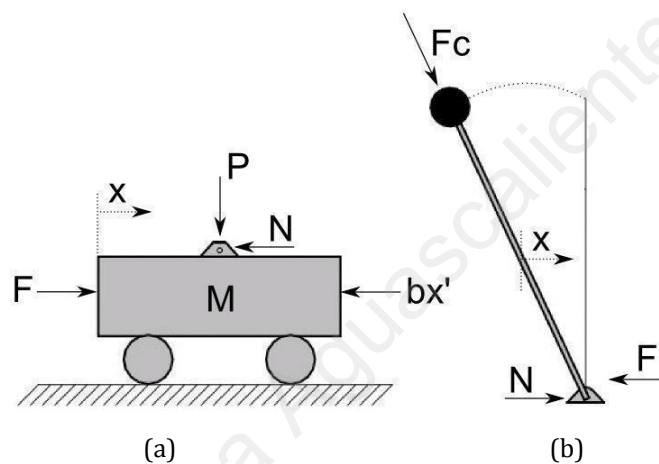


Figura 2: Los dos subsistemas involucrados en el problema del péndulo invertido sobre base móvil.

De manera similar, la dinámica del péndulo (ecuación (2)) se puede deducir de la figura 2(b):

$$mx'' = N - Fx + Fcx \quad (2)$$

donde m es la masa del péndulo, Fx es la componente horizontal de la fuerza ejercida por el momento del péndulo y Fcx es la componente horizontal de la fuerza centrípeta generada cuando el péndulo realiza una trayectoria circular.

El momento del péndulo se puede expresar mediante el producto cruz descrito en la ecuación (3):

$$T = l \times F = J\theta'' \quad (3)$$

donde l es la distancia desde el pivote al centro de gravedad del péndulo y J es la inercia o masa giratoria. Entonces, la componente horizontal de F se puede describir mediante la ecuación (4):

$$F_x = J\ddot{\theta} \cos \theta \quad (4)$$

De manera similar, la fuerza centrípeta se suele expresar tradicionalmente como la ecuación (5):

$$F_c = J\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

Por tanto, la componente horizontal F_{cx} se puede expresar mediante la ecuación (6):

$$F_{cx} = J\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (6)$$

Integrando las nuevas expresiones para F_x y F_{cx} y recordando que $J = ml^2$, la ecuación (2) se convierte en la ecuación (7):

$$m\ddot{x} = N - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (7)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (7), se obtiene la primera ecuación de movimiento:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (8)$$

La segunda ecuación de movimiento se obtiene sumando todas las fuerzas perpendiculares al péndulo (figura 3):

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (9)$$

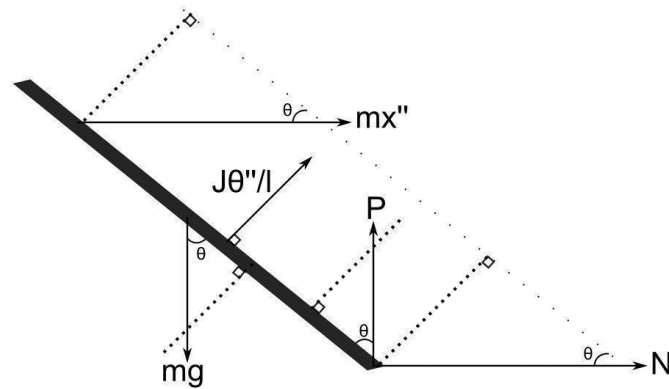


Figura 3: Las fuerzas que actúan perpendicularmente al péndulo (líneas discontinuas).

Sumando los momentos de P y N alrededor del centro de masa del péndulo, se obtiene la ecuación (10):

$$J\theta'' = -Pl \sin \theta - Nl \cos \theta \quad (10)$$

Combinando las ecuaciones (9) y (10), la segunda ecuación de movimiento se puede reescribir como:

$$(ml^2 + J)\theta'' + mgl \sin \theta + mlx'' \cos \theta = 0 \quad (11)$$

Las ecuaciones (8) y (11) describen la dinámica del sistema de péndulo invertido sobre base móvil.

3. Prototipo

La figura 4 muestra el prototipo de péndulo invertido sobre carro desarrollado.

La parte mecánica consta de un péndulo de 15 cm de largo montado sobre una base de impresora que actúa como base móvil. El conjunto de péndulo y carro tiene 1-GDL (grado de libertad). El carro se desliza sobre un riel acoplado a una banda dentada, que a su vez es accionada por un motor de DC (figura 5). La posición del carro con respecto al riel presenta el segundo GDL.

Como se puede apreciar en las figuras 4 y 5, los componentes mecánicos utilizados en el prototipo son comercialmente disponibles y de fácil acceso en el mercado: motores, bandas y engranajes. En consecuencia, tanto el costo total como el de mantenimiento son extremadamente bajos, lo que hace que el prototipo sea ideal para fines educativos.

El software desarrollado es capaz de presentar en tiempo real la posición del péndulo junto con sus principales valores como posición, velocidad y tiempo. La figura 6 muestra un ejemplo de la interfaz gráfica de usuario (GUI). El software tiene una comunicación bidireccional con la parte mecatrónica a través de una conexión en serie.

El software de control se comunica con el prototipo mediante un módulo electrónico integrado por un microcontrolador PIC y una etapa de potencia. El microcontrolador es responsable de recopilar las señales de tres sensores (sensor de posición angular del péndulo, sensor de posición angular del motor de DC y sensor de corriente del motor), así como de manejar la transmisión de datos con la computadora. La etapa de potencia se encarga de acoplar los niveles digital y analógico para el funcionamiento del motor y de eliminar las corrientes parásitas de la parte analógica a la digital.

La interfaz gráfica está desarrollada en Visual.Net. Su función es únicamente la de presentar información y configurar la comunicación con el microcontrolador. Está

conformada por un *Dashboard* donde se presentan gráficas de las variables medidas y realiza algunos cálculos para presentar información adicional. No realiza ninguna función de control, sin embargo, tiene una sección donde permite guardar en disco los datos recibidos del péndulo para un análisis posterior.

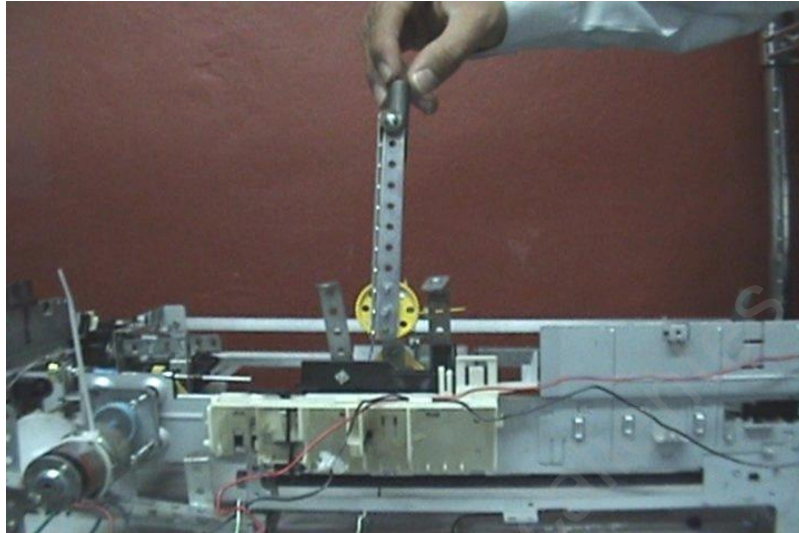


Figura 4: Prototipo mecatrónico.



Figura 5: Subsistemas de accionamiento: (a) riel y banda dentada, (b) actuador (motor de DC acoplado con engranes).

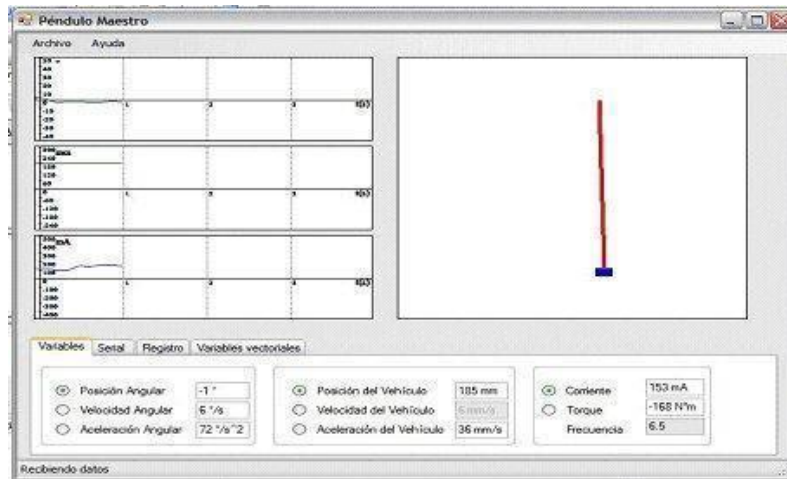


Figura 6: GUI del sistema.

Para completar el modelo de este sistema en particular, adicionalmente es necesario modelar el mecanismo de accionamiento tipo impresora, es decir, el motor de DC, la polea y la correa en la que está montado el carro (figura 7).

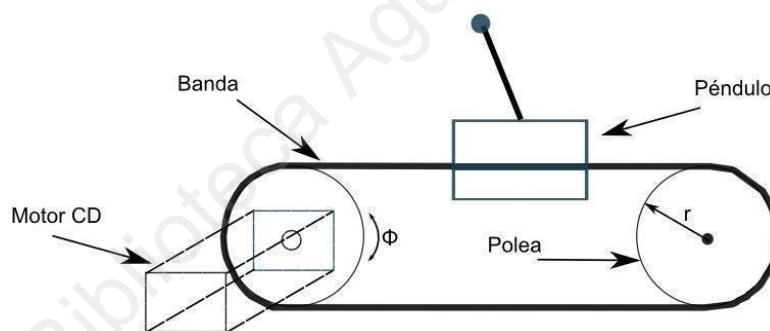


Figura 7: Sistema de transmisión: motor-polea-banda.

La inercia o masa giratoria total J_t aplicada al eje del motor es la inercia tanto del carro como del péndulo, por lo que el par motor (τ_m) requerido es (ecuación (14)):

$$\tau_m = J_t \Phi'' = (M + m) r^2 \Phi'' \quad (14)$$

donde r es el radio de la polea y Φ es el desplazamiento angular del motor. El modelo convencional de un motor eléctrico de DC es bien conocido y se omitirá en este trabajo.

La figura 8 muestra el diagrama de bloques del sistema motor-polea-banda acoplado al péndulo invertido sobre carro.

Como se mencionó anteriormente, se pueden usar tres variables como retroalimentación: la corriente del motor i , el desplazamiento angular del motor Φ y el desplazamiento angular del péndulo θ . Tras la comparación de estas tres señales con el comando de posición de entrada del carro x_d , es posible generar el voltaje de entrada apropiado U al motor.

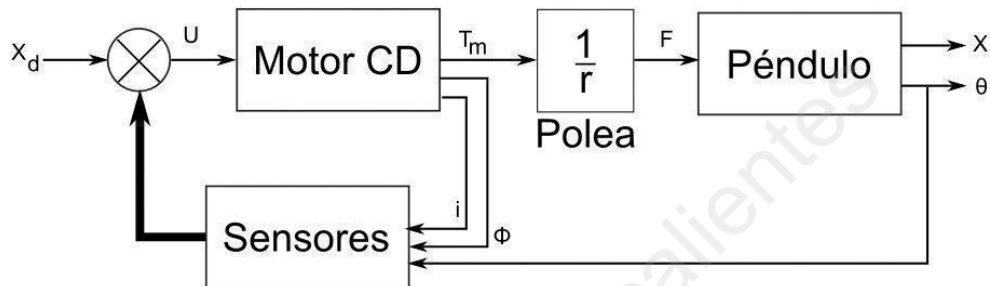


Figura 8: Diagrama de bloques del péndulo invertido sobre carro accionado por un sistema motor-polea-banda.

Los valores de los parámetros involucrados en el modelado del sistema y su forma de obtención se presentan en la tabla I.

Tabla 1: Resumen de los parámetros que intervienen en el modelado del prototipo.

Parámetro	Valor	Unidad	Referencia
Péndulo Invertido sobre carro			
M	0.7	kg	Medido
m	0.1	kg	Medido
l	0.075	m	Medido
J	5.62e-4	kg-m ²	Calculado
b	0.0041	Nms / rad	Medido
Motor-polea-correa			
r	0.023	m	Medido
R_m	1	Ω	Fabricante
L_m	0.5	H	Fabricante
k_t	0.0019	Nm / A	Fabricante
k_e	0.0041	Vs / rad	Fabricante
D	0.1	Nms / rad	Medido
<p>* Constantes del motor: R_m y L son la resistencia eléctrica y la inductancia del motor, respectivamente; k_t y k_e son las constantes de par y fuerza electromotriz, respectivamente; D es el coeficiente de fricción viscoso del motor.</p>			

La figura 9 muestra la respuesta de lazo abierto del sistema a una entrada tipo impulso. Observe en el diagrama de polos y ceros (recuadro de la figura 9) que el sistema tiene una raíz inestable, por lo que la posición del péndulo θ tiende rápidamente a la inestabilidad.

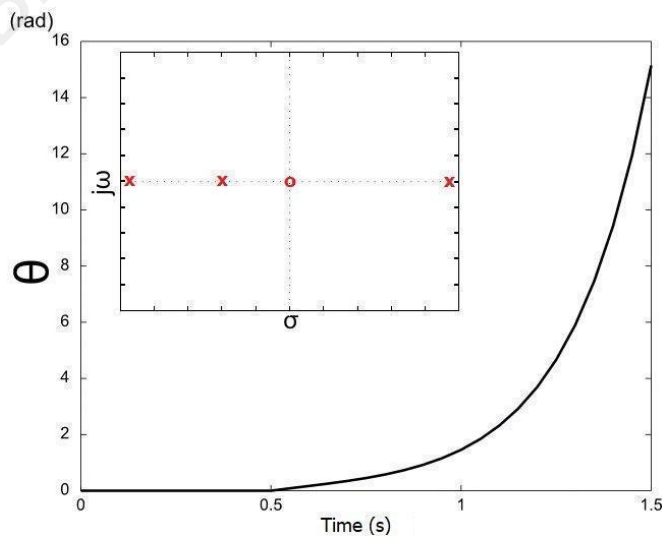


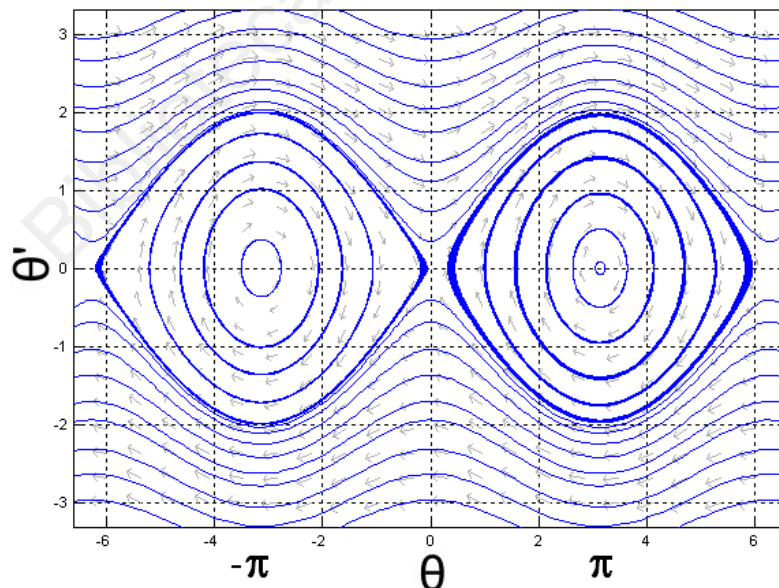
Figura 9: Respuesta simulada a un impulso del sistema en lazo abierto.

Recuadro: mapa de polos y ceros.

Una forma interesante de visualizar el movimiento del péndulo es desde el punto de vista de las trayectorias de movimiento para diferentes condiciones iniciales [8].

La figura 10(a) muestra las curvas de línea del sistema sin tener en cuenta ningún tipo de fricción. Nótese que el sistema es estable en π y $-\pi$, que es cuando el péndulo es paralelo al carro y muy inestable en $\theta = 0$, que es la posición deseada. La figura 10(b) muestra las curvas de línea para el sistema bajo la acción de una fricción viscosa asumiendo que el péndulo gira libremente n vueltas alrededor de su eje. Nótese que ahora las trayectorias tienden a π y $-\pi$ a medida que el sistema pierde energía debido a la fricción.

Para mantener estable el sistema, es necesario implementar una estrategia de control. El siguiente capítulo analizará el diseño y desempeño de una serie de controladores lineales y no lineales.



(a)

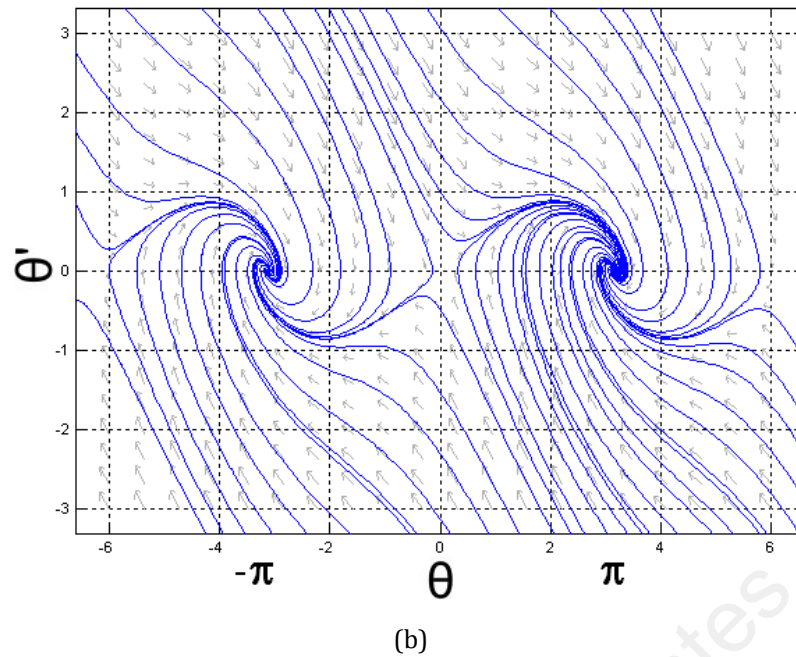


Figura 10: Curvas de línea para el sistema de péndulo invertido sobre base móvil:
 (a) sin y (b) con fricción.

4. Estrategias de Control

Existen varias estrategias para estabilizar el comportamiento de θ . Entre los enfoques de control lineal, podemos encontrar en la literatura el uso de controladores PID, LQR y modelo de control predictivo (MPC) [9-11].

Entre los enfoques no lineales que se han explorado se encuentran el control por modos deslizantes (sliding mode) y el control robusto [12,13].

Aunque los controladores lineales han demostrado un rendimiento aceptable, la dinámica no lineal del sistema de péndulo invertido sobre base móvil puede limitar sus rangos operativos. En cambio, los controladores no lineales ofrecen un mejor

desempeño en presencia de variaciones de parámetros, incertidumbres y perturbaciones no modeladas.

4.1. Enfoques lineales

Las ecuaciones (8) y (11) son fuertemente no lineales y, para aplicar un controlador lineal, se debe seleccionar un punto de operación con el fin de linealizarlas. Es evidente que el péndulo trabaja en π rad desde su posición estable, por lo que la variable lineal propuesta es: $\theta^* = \pi + \delta\theta$.

Después de la linealización, las ecuaciones (8) y (11) se pueden expresar como las ecuaciones en (12):

$$\begin{aligned} (M + m) x'' + bx' - ml \theta^{*''} &= F \\ (ml^2 + J) \theta^{*''} - mgl \theta^* - mlx'' &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Seleccionando como vector de estado $X = [x \ x' \ \theta^* \ \theta^{*'}]^T$, el modelo lineal del sistema se puede finalmente expresar como la ecuación (13):

$$\begin{aligned} X' &= \begin{bmatrix} \frac{-b(J + ml^2)}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{m^2 gl^2}{\Delta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-mlb}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{mgl(M + m)}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{J + ml^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{ml}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} F \\ Y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \end{aligned} \tag{13}$$

con: $\Delta = J(M + m) + Mml^2$

En este apartado se abordan dos enfoques lineales: control proporcional-derivativo (PD) y proporcional-integral-derivativo (PID). Estos controladores tienen por

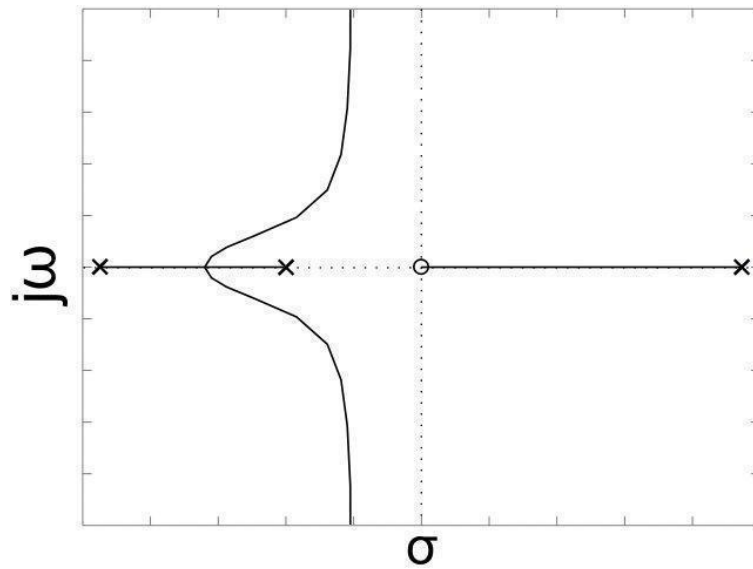
objetivo modificar el lugar geométrico de raíces del sistema mediante la adición de polos y ceros de tal manera que, para un cierto rango de valores, todas las raíces del sistema sean estables.

Las consideraciones para la respuesta deseada del sistema son las siguientes:

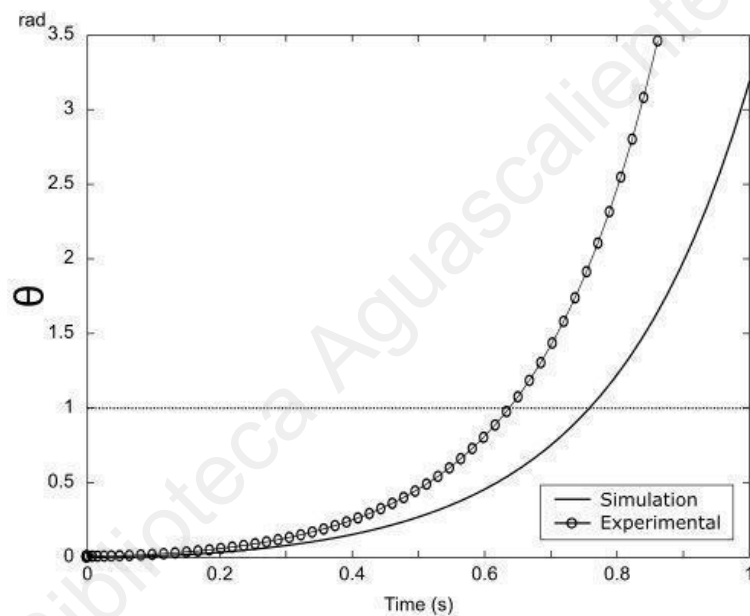
- 1) **Sobrepaso máximo** del 20% ($C_{max} = 0.2$). Esta magnitud, que podría considerarse grande, no es realmente significativa mientras el péndulo se estabilice rápidamente. Además, un valor grande permite una mayor flexibilidad para calibrar otros parámetros.
- 2) **Tiempo de estabilización** inferior a 0.5 s ($T_s = 0.5$ s) para asegurar rápidamente la posición estable del péndulo.
- 3) **Error en estado estacionario** igual a cero ($e_{ss} = 0$). El péndulo debe estar en perfecta posición vertical.

Las figuras 11, 12 y 13 resumen los resultados obtenidos.

La figura 11(a) muestra el lugar de las raíces del sistema en lazo abierto. En esta gráfica, se puede ver claramente que el sistema no se puede controlar mediante una simple retroalimentación: una rama del lugar geométrico de raíces se encuentra en la región inestable. Por lo tanto, es necesario reorganizarlo agregando polos y ceros. La figura 11(b) compara las respuestas simulada y experimental del sistema en lazo abierto. La respuesta al escalón confirma que el sistema es inestable, es decir, θ diverge hasta el infinito o, en términos físicos, θ es tan grande que hace que el péndulo se caiga.



(a)



(b)

Figura 11: Lugar geométrico de raíces y respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo abierto.

El recuadro de la figura 12 presenta el lugar geométrico de raíces reordenado tras la introducción de un cero por parte del controlador PD. Nótese la trayectoria cerrada en esta gráfica. Para esta trayectoria, existen una serie de valores en los que el sistema es estable. Teniendo en cuenta las consideraciones de diseño mencionadas anteriormente, la misma figura 12 muestra la respuesta simulada a un escalón unitario del sistema compensado con un controlador de PD. Observe

que el controlador PD en efecto permite estabilizar rápidamente θ .

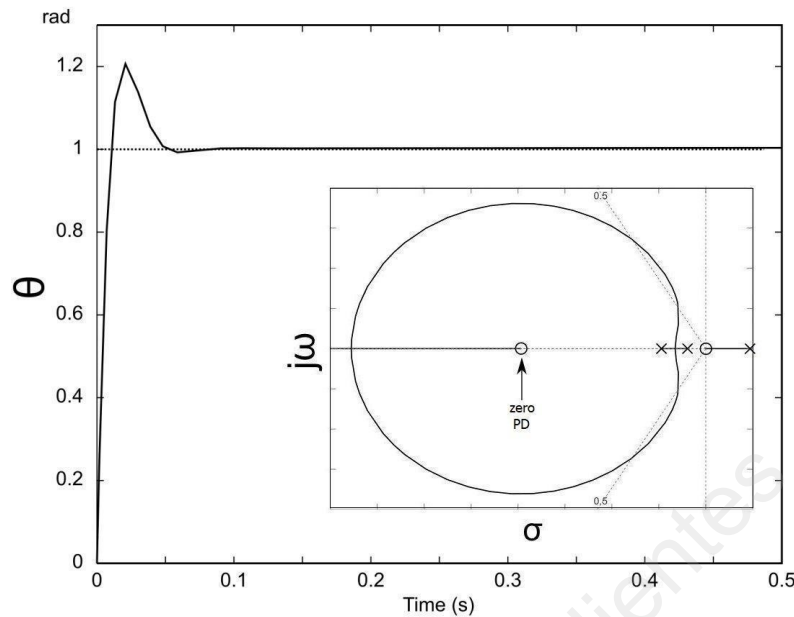


Figura 12: Lugar geométrico de raíces y respuesta a un escalón unitario del sistema con controlador PD.

Similarmente, la figura 13 presenta el lugar geométrico de raíces del sistema con la introducción de dos ceros y un polo debido al uso del controlador PID. Note que el lugar geométrico de raíces es similar al de la PD (ver recuadro de la figura 13). La misma figura 13 muestra la respuesta simulada a un escalón unitario del sistema compensado con un controlador PID. Observe que el control PID ofrece una mejor respuesta que el PD.

Para validar el desempeño físico del controlador PID, es necesario aplicar un impulso al sistema (mediante una fuerza de perturbación en el péndulo) y verificar que éste realmente permanezca en su estado de equilibrio ($\theta = 0$). La figura 14 compara las respuestas simulada y experimental del sistema compensado con un controlador PID a un impulso de entrada. Nótese que θ tiende rápidamente a su posición de equilibrio ($T_s = 0.5$ s) y que el comportamiento experimental es muy cercano a la simulación. Para el experimento se tomaron muestras de los sensores cada 16 ms, es decir, una frecuencia de muestreo de 60 Hz.

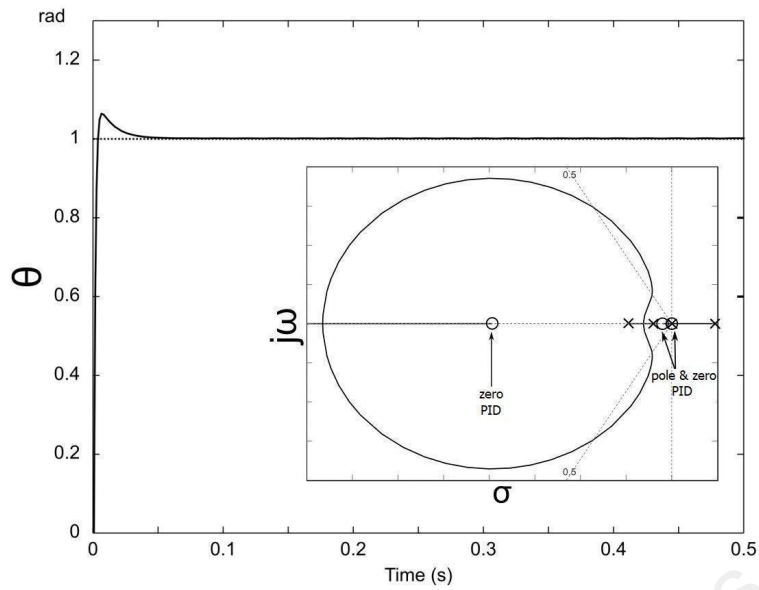


Figura 13: Lugar geométrico de raíces y respuesta a un escalón unitario del sistema con un controlador PID.

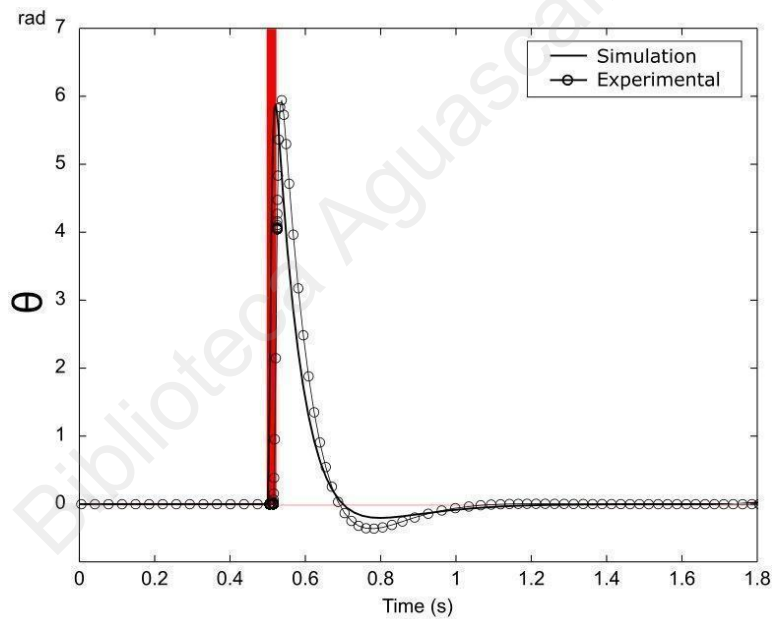


Figura 14: Comparación de las respuestas experimentales y simuladas a una entrada tipo impulso (en rojo) con un controlador PID. El péndulo invertido sobre carro tiende rápidamente a su posición de equilibrio ($\theta = 0$).

4.2. Enfoques no lineales

Las ecuaciones (8) y (11) pueden utilizarse directamente cuando se opta por un controlador no lineal.

En este apartado se presentan dos enfoques de control no lineal: el Control Adaptativo por Modelo de Referencia (MRAC) y el control por autoajuste. Ambos ofrecen las ventajas de ir mejorando su desempeño a medida que la adaptación avanza y no requieren ninguna información a priori sobre los parámetros del modelo que son desconocidos [14].

La figura 15 muestra el diagrama de bloques de la técnica MRAC. Aquí, el sistema motor-polea-banda-péndulo invertido sobre carro (MPB-CIP) sigue un modelo de referencia e intenta “copiar” su comportamiento. El error e entre las salidas del sistema MPB-CIP (y) y el modelo de referencia (y_m) se utiliza para estimar el parámetro de adaptación β , que a su vez ajusta el controlador. La tabla 2 resume los parámetros utilizados para implementar el MRAC.

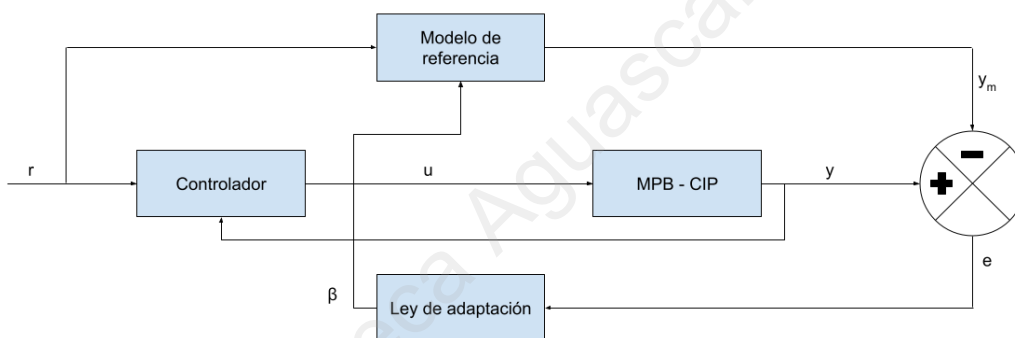


Figura 15: El control adaptativo por modelo de referencia (MRAC) para el sistema de péndulo invertido sobre base móvil.

Tabla 2: Los Parámetros MRAC utilizados para controlar el sistema MPB-CIP.

Parámetro	Expresión
Modelo de referencia	$1 / (s + 1)$

Ley de adaptación	$\beta' = -\gamma y_m e$
Controlador	$u = \beta r$

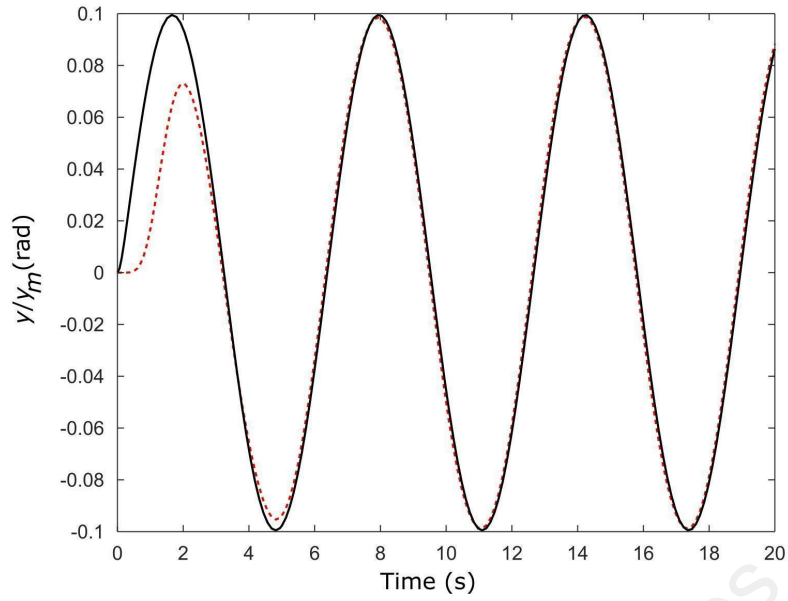
La figura 16 muestra el desempeño del MRAC. La figura 16(a) compara las respuestas tanto del modelo de referencia como del sistema MPB-CIP. Observe que el MRAC se adapta rápidamente para que el sistema copie perfectamente el modelo.

La figura 16(b) muestra el desempeño del MRAC en presencia de una perturbación externa inesperada (modelada como un impulso) aplicada en $t = 5$ s. Observe que el controlador es lo suficientemente robusto como para tolerar perturbaciones y se adapta rápidamente para que el sistema continúe copiando al modelo.

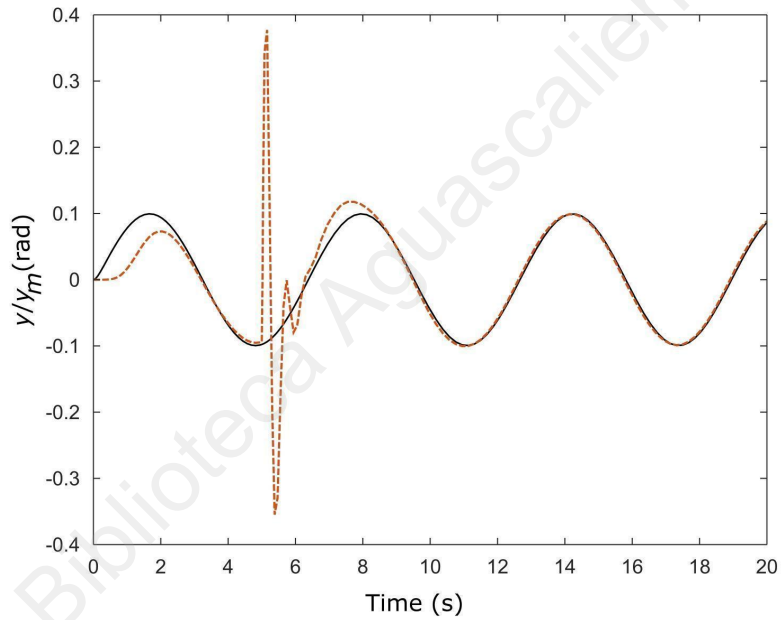
Un segundo enfoque no lineal explorado es el controlador por autoajuste. Este tipo de controlador se puede implementar utilizando varias técnicas como el PID de Ziegler-Nichols, retroalimentación con un relay y descripción de funciones. En esta tesis se aborda la técnica de retroalimentación con un relay.

La figura 17 muestra el concepto del controlador. Observe que éste se basa solamente en un componente (un relay) encargado de mantener el sistema en oscilación controlada. Esta técnica tiene la ventaja de requerir poca formulación matemática, es simple de implementar y es efectivo para sistemas altamente no lineales.

La figura 18 muestra la respuesta a un escalón unitario del sistema MPB-CIP usando el enfoque de autoajuste con relay con $ku = \pm 1$. La figura 18(a) muestra el desplazamiento del carro. Observe el comportamiento sinusoidal, lo que físicamente significa que el carro retrocede y avanza una distancia de 6 cm para mantener el péndulo en la posición deseada ($\theta = 0$). La figura 18(b) muestra el desplazamiento angular θ del péndulo. Note que el péndulo exhibe una oscilación de baja magnitud (del orden de 10^{-4} rad) alrededor de $\theta = 0$, lo que demuestra la efectividad de esta técnica.



(a)



(b)

Figura 16: Desempeño del MRAC con $\gamma = 1$. Respuesta del sistema (línea punteada roja) copiando la respuesta del modelo (línea sólida negra): (a) sin y (b) con una perturbación externa.

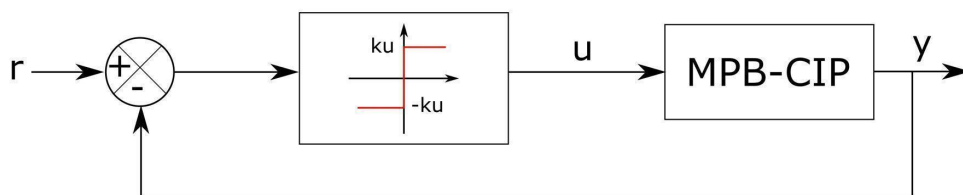
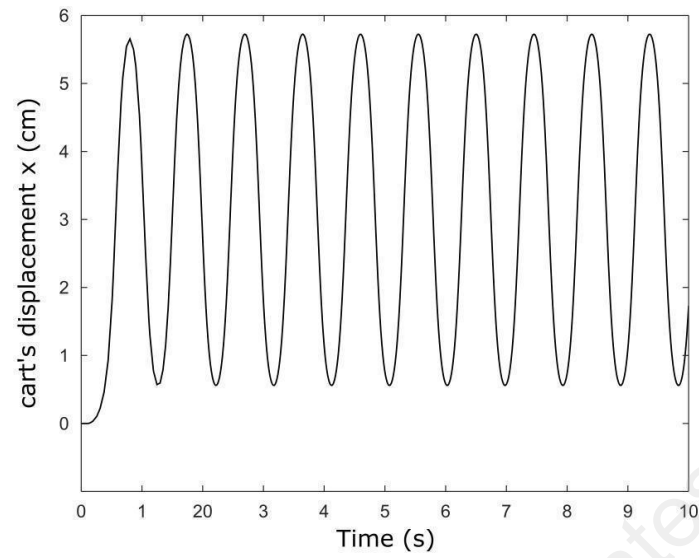
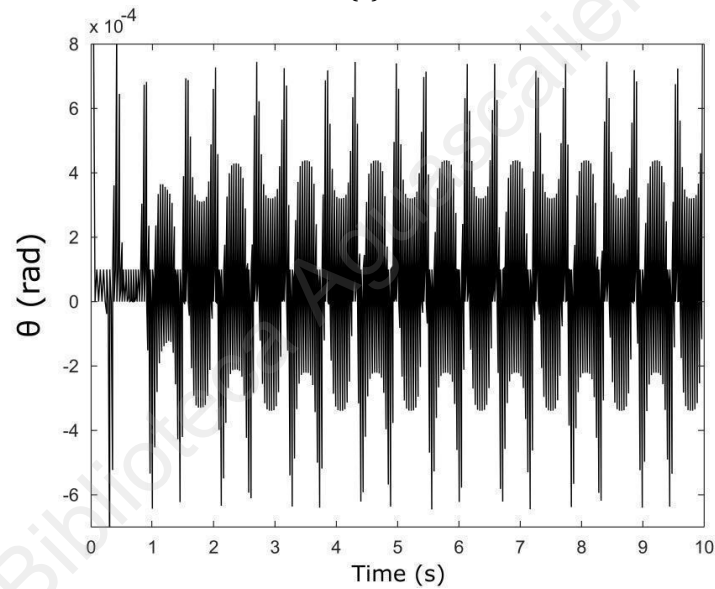


Figura 17: Diagrama de bloques del controlador a base de relay.



(a)



(b)

Figura 18: Desempeño con la técnica de autoajuste con un relay: (a) movimiento lineal del carro y (b) desplazamiento angular del péndulo.

5. Aplicaciones

Las técnicas de modelado, simulación y control del péndulo invertido sobre base móvil aquí presentados se pueden aplicar a dos prototipos desarrollados en la Universidad Panamericana: un vehículo segway y un robot humanoide (figura 19).

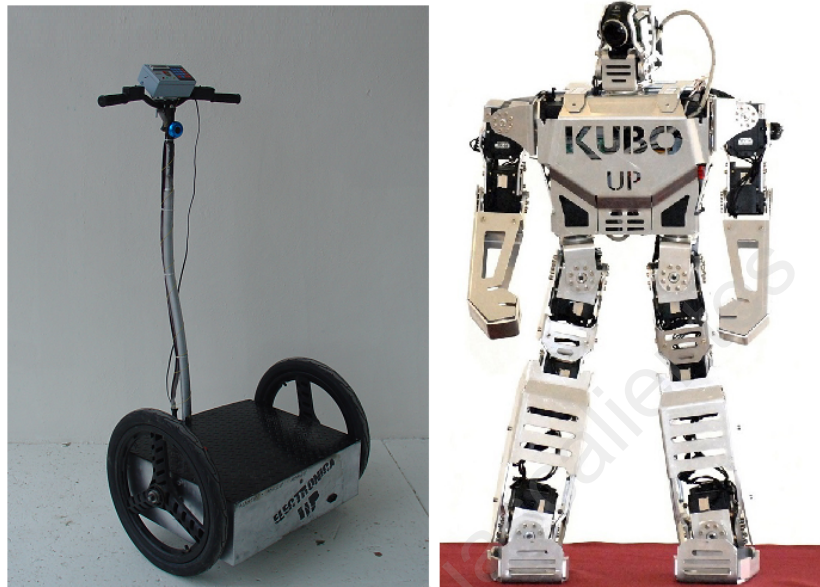


Figura 19: Otras aplicaciones del problema de péndulo invertido sobre base móvil.

El segway es un vehículo personal de dos ruedas con auto balanceo y propulsión eléctrica. Su dinámica se basa en el problema del péndulo invertido sobre carro. El desafío con este prototipo consiste en mantener estables tanto el péndulo como el conductor durante el desplazamiento.

El robot KUBO es un robot humanoide de dimensiones compactas que exhibe 20 GDL [15]. Para caminar, su centro de masa debe estar equilibrado con una pierna en el aire. El problema se vuelve entonces similar al que aborda esta tesis.

6. Conclusiones

Esta tesis ha presentado una revisión completa del sistema de péndulo invertido sobre base móvil. En particular, se abordó un prototipo mecatrónico impulsado por un sistema motor-polea-banda (MPB) y se utilizó como plataforma experimental para diseñar y evaluar un conjunto de controladores lineales y no lineales.

Los resultados experimentales obtenidos son muy cercanos a los obtenidos en simulación, lo que demuestra la precisión de las formulaciones matemáticas.

El trabajo futuro se centrará en explorar técnicas de control avanzadas como Fuzzy-PID [16], Neural Networks-MPC [17] y balanceo óptimo [18] para los prototipos de robots péndulo invertido sobre base móvil, segway y humanoide.

Este proyecto pretende ser un aporte al laboratorio de sistemas automáticos de la Universidad Panamericana y tiene como objetivo ofrecer una plataforma de bajo costo, pero altamente eficiente para que los estudiantes puedan profundizar sus conocimientos teóricos y experimentales en teoría de control.

7. Referencias

- [1] R. Olfati-Saber, Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum, in Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, USA, 2001, pp. 3764-3765.
- [2] R. Eini and S. Abdelwahed, Rotational inverted pendulum controller design using indirect adaptive fuzzy model predictive control, in Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems, New Orleans, LA, USA, 2019, pp. 1-6.

- [3] C. Shuang and Z. Dongjun, Design and implementation of 2DOF spherical inverted pendulum, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 16, no. 1, pp. 123-127, 2005.
- [4] L. Xing, Y. Chen and X. Wu, A novel parallel-type double inverted pendulum control method, in *Proc. of IEEE International Conf. on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, Xiamen, China, 2010, pp. 880-887.
- [5] R. Rodriguez and J. Collado, Periodically forced Kapitza's pendulum, in *Proc. of American Control Conference*, Boston, MA, USA, 2016, pp. 2790-2794.
- [6] F. Xue, Z. Hou and H. Deng, Balance control for an acrobot, in *Proc. of Chinese Control and Decision Conference*, Mianyang, China, 2011, pp. 3426-3429.
- [7] A. Saif, Strong stabilization of the non-linear Pendubot system, in *Proc. of IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Mahdia, Tunisia, 2015, pp. 1-7.
- [8] J.J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1999.
- [9] J-J. Wang, Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers, *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 19, no. 1, 2011, pp. 440-449.
- [10] L. Prasad, B. Tyagi and H. Gupta, Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: performance analysis without and with disturbance input, *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, 2014, pp. 661-670.
- [11] T. Chu and C. Chen, Design and implementation of model predictive control for a gyroscopic inverted pendulum, *Applied Sciences*, 2017, 7, 1272.
- [12] S. Irfan, A. Mehmood, M. Razzaq and J. Iqbal, Advanced sliding mode control techniques for inverted pendulum: modelling and simulation, *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 21, no. 4, 2018, pp. 753-759.

- [13] M. Park and D. Chwa, Swing-up and stabilization control of inverted pendulum systems via coupled sliding-mode control method, IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 56, no. 9, 2009, pp. 3541-3555.
- [14] R. Velazquez, An optimal adaptive filtering approach for stress-tests motion artifacts removal: application on an ECG for telediagnosis, in Proc. of 6th International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2002, pp. 1504-1507.
- [15] E. Hernandez, R. Velazquez, R. Macias-Quijas, E. Pissaloux, N.I. Giannoccaro and A. Lay-Ekuakille, Kinematic computations for small-size humanoid robot KUBO, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 12, no. 24, 2017, pp. 7311-7320.
- [16] A. Alqudah, A.M. Ashour and S.A. Alboon, Controlling of wind turbine generator system based on genetic fuzzy-PID controller, International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering, vol. 9, no. 1, 2020, pp. 409-425.
- [17] R. Baweja, R. Gupta, A novel neural network based model predictive controller for congestion prevention in IP networks, International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering, vol. 9, no. 3, pp. 3471-3477.
- [18] M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velazquez and E. Haro, Optimum balancing of the four-bar linkage using fully Cartesian coordinates, IEEE Latin America Transactions, vol. 17, no. 6, 2019, pp. 983-990.

Linear and Nonlinear Control Approaches for the Cart Inverted Pendulum Problem

Enrique Preza¹, Ramiro Velázquez¹, Ricardo Macías-Quijas¹, Erika Hernández¹, Paolo Visconti²

¹Universidad Panamericana, Facultad de Ingeniería, Aguascalientes, Mexico

²University of Salento, Department of Innovation Engineering, Lecce, Italy

{enrique.preza, rvelazquez, rmacias, ehernandez}@up.edu.mx, paolo.visconti@unisalento.it

Abstract This paper presents a complete review of the cart inverted pendulum (CIP) problem. The design, modeling, and control of such system as well as the implementation of a mechatronic prototype are herein presented. Several linear and nonlinear approaches such as PD, PID, and adaptive control are proposed to stabilize the system. Both theoretical and experimental performances are compared to evaluate the precision of the mathematical formulations. The aim of this study is to serve as a tutorial or supporting material for understanding the dynamics governing this system together with the potential control strategies.

Keywords: Cart inverted pendulum (CIP), educational platform, linear and nonlinear control, mechatronic device.

I. INTRODUCTION

Many universities and research institutes around the world have an inverted pendulum for testing control theories. The main interest in this system is that, apart from illustrating many of the difficulties associated with real-world control problems, it is based on a general model that has multiple applications: from missile control to the analysis of the biomechanics of gait, balance, and human posture.

Inverted pendulums are a whole family of mechanisms: inertial wheel pendulum [1], rotational pendulum [2], spherical inverted pendulum [3], inverted double pendulum [4], the Kapitza's pendulum [5], the acrobot [6], the pendubot [7] to name just a few. Nevertheless, the most studied version is the pendulum installed on a vehicle or cart.

The cart inverted pendulum (CIP) system consists of a pendulum or rod that rotates freely at one of its ends through a joint located on the cart (Fig. 1). The cart moves on a horizontal rectilinear path under the action of a force F . Initially, the pendulum is manually placed in a perfect vertical position ($\theta=0$), it is released, and the control problem consists of holding autonomously that position through the proper motion of the cart. Evidently, without the cart's motion to balance the pendulum, it will simply fall.

The dynamics of this system has several control challenges: instability, nonlinear behavior, parametric uncertainty, unmodeled disturbances, sensor limitations, among others.

In this paper, we review this classic control problem in detail with two main objectives: (1) to introduce a low-cost mechatronic CIP system that is currently being used for teaching automatic control theory and (2) to present the

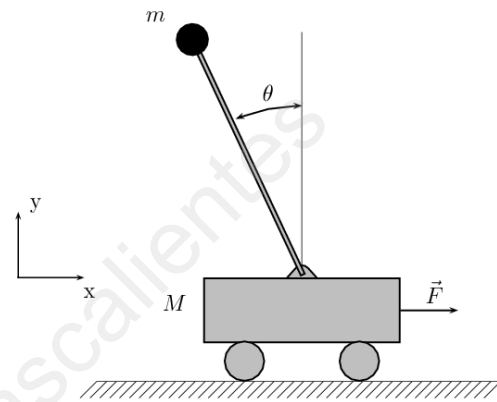


Fig. 1. The CIP system.

complete analysis of this system in a didactic way so that it can be easily understood and taken as the basis for the design of more complex systems and advanced control strategies.

The rest of the paper is organized as follows: in Section II the mathematical model that describes the dynamic behavior of the CIP system is presented. Section III presents the implementation of a prototype while in Section IV a series of linear and nonlinear controllers are proposed to improve the performance of the system. Section V overviews two ongoing applications of this work. Finally, Section VI concludes the paper summarizing the main concepts and results.

II. DYNAMIC MODEL

The cart dynamics equation (1) can be deduced from the free-body diagram of fig. 2(a):

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (1)$$

where M is the mass of the cart, F is the force or initial impulse, b is the coefficient of friction, and N is the horizontal force exerted by the pendulum on the carriage (the vertical force P can be neglected at this moment).

Similarly, the dynamics of the pendulum equation (2) can be deduced from fig. 2(b):

$$m\ddot{x} = N - F_x + F_{c_x} \quad (2)$$

where m is the mass of the pendulum, F_x is the horizontal component of the force exerted by the pendulum moment, and F_{c_x} is the horizontal component of the centripetal force generated as the pendulum performs a circular path.

The pendulum's moment can be expressed by the cross-product equation (3):

$$T = l \times F = J\theta'' \quad (3)$$

where l is the distance from the pivot to the pendulum's center of gravity and J is the inertia or rotating mass. So, the horizontal component of F can be written as equation (4):

$$F_x = J l^{-1} \theta'' \cos \theta \quad (4)$$

Similarly, the centripetal force is traditionally expressed as equation (5):

$$F_c = J l^{-1} \theta'^2 \quad (5)$$

Therefore, the horizontal component F_{c_x} can be expressed as equation (6):

$$F_{c_x} = J l^{-1} \theta'^2 \sin \theta \quad (6)$$

Integrating the new expressions for F_x and F_{c_x} and recalling that $J = m l^2$, equation (2) becomes equation (7):

$$m\ddot{x} = N - m l \theta'' \cos \theta + m l \theta'^2 \sin \theta \quad (7)$$

By combining equations (1) and (7), the first equation of motion is obtained:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + m l \theta'' \cos \theta - m l \theta'^2 \sin \theta = F \quad (8)$$

The second equation of motion can be derived by adding all the forces perpendicular to the pendulum (Fig. 3):

$$P \sin \theta + N \cos \theta - m g \sin \theta = m l \theta'' + m \ddot{x} \cos \theta \quad (9)$$

Adding the moments of P and N around the pendulum's center of mass (CoM), equation (10) is obtained:

$$J \theta'' = - P l \sin \theta - N l \cos \theta \quad (10)$$

By combining equations (9) and (10), the second equation of motion can be rewritten to:

$$(m l^2 + J) \theta'' + m g l \sin \theta + m l \ddot{x} \cos \theta = 0 \quad (11)$$

Both equations (8) and (11) describe the CIP dynamics.

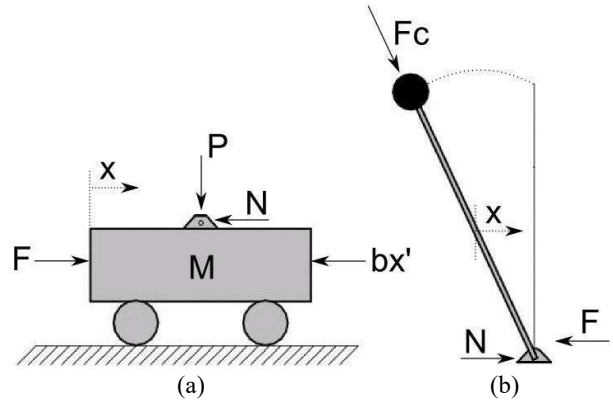


Fig. 2. The two subsystems involved in the CIP problem.

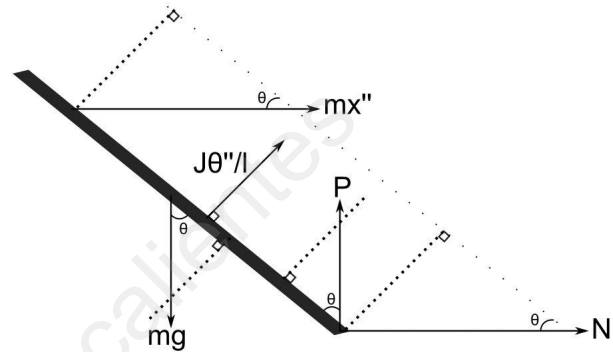


Fig. 3. The forces acting perpendicularly to the pendulum (dashed lines).

III. PROTOTYPE

Fig. 4 shows the CIP prototype developed. The mechanical part consists of a 15 cm long pendulum mounted on a printer base that acts as the cart. The pendulum and cart assembly has one DOF (degree of freedom). The cart slides on a rail coupled to a toothed belt, which in turn is driven by a DC motor (see fig. 5). The position of the cart with respect to the rail presents the second DOF.

As it can be appreciated from figs. 4 and 5, the mechanical components used in the setup are easily available and accessible in the market: motors, belts, and gears. Consequently, both the total and the maintenance costs are extremely low, which make the prototype ideal for educational purposes.

The software developed is capable of presenting in real time the position of the pendulum together with its main values such as position, speed, and time. Fig. 6 shows an example of the graphical user interface (GUI). The software has a bidirectional communication with the mechatronic part via serial connection.

The control software communicates with the prototype by means of an electronic module consisting of a PIC microcontroller and a power stage. The microcontroller is responsible for gathering the signals from three sensors (pendulum angular position sensor, DC motor angular position

sensor, and motor current sensor) as well as for handling the data transmission with the computer. The power stage is responsible for coupling the digital and analog levels for the motor operation and for eliminating parasitic currents from the analog part to the digital one.

To complete the model of this particular CIP prototype, it is also necessary to model the printer-type drive mechanism, that is, the DC motor, the pulley, and the belt on which the cart is mounted (Fig. 7).

The inertia or total rotating mass J_t applied to the motor's shaft is the inertia of both cart and pendulum, so the required motor torque is (equation (12)):

$$\tau_m = J_t \Phi'' = (M+m)r^2 \Phi'' \quad (12)$$

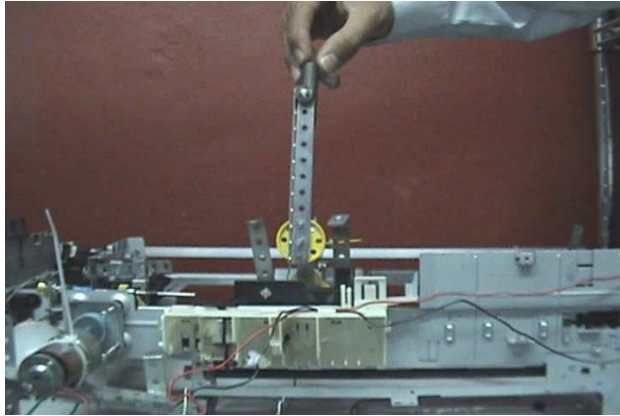


Fig. 4. CIP mechatronic prototype.



Fig. 5. Drive components: (left) rail and toothed belt, (right) actuator (DC motor coupled with gear train).

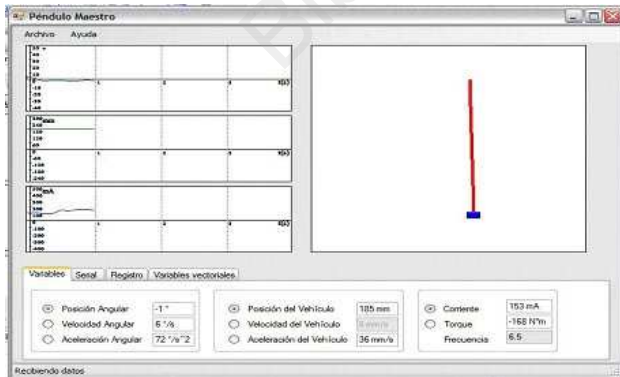


Fig. 6. The system's GUI.

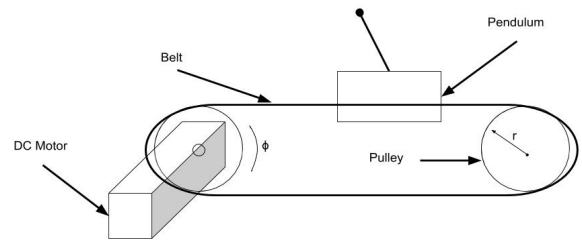


Fig. 7. Drive system: motor-pulley-belt.

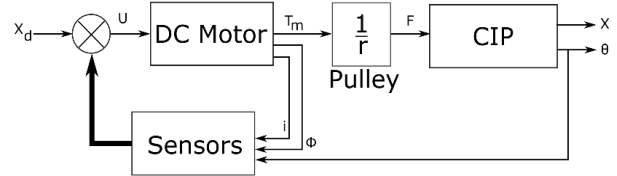


Fig. 8. Block diagram of the CIP driven by a motor-pulley-belt system.

where r is the radius of the pulley and Φ is the angular displacement of the motor. The conventional model of a DC electric motor is well known and will be omitted in this work.

Fig. 8 shows the block diagram of the motor-pulley-belt system coupled with the CIP.

As aforementioned, three variables can be used as feedback: the motor current i , the motor's angular displacement Φ , and pendulum's angular displacement θ . Upon the comparison of these three signals with the cart's input position command x_d , it is possible to generate the appropriate input voltage U to the motor.

The values of the parameters involved in the model as well as their reference sources are given in table I.

TABLE I
SUMMARY OF THE PARAMETERS INVOLVED IN THE PROTOTYPE'S MODELING.

Parameter	Value	Unit	Reference
CIP			
M	0.7	kg	Measured
m	0.1	kg	Measured
l	0.075	m	Measured
J	$5.62e-4$	kg-m ²	Calculated
b	0.0041	N-m-s/rad	Measured
Motor-pulley-belt			
r	0.023	m	Measured
R_m	1	Ω	Manufacturer
L_m	0.5	H	Manufacturer
kt	0.0019	N-m/A	Manufacturer
ke	0.0041	V-s/rad	Manufacturer
D	0.1	N-m-s/rad	Measured

* Motor constants: R_m and L_m are the electrical resistance and inductance of the motor armature, respectively; kt and ke are the torque and electromotive force constants, respectively; D is the motor's viscous coefficient of friction.

Fig. 9 shows the system's open loop response to an impulse input. Note in the pole-zero map plot (Fig. 9 inset) that the

system has an unstable root, so the pendulum's position θ tends rapidly towards instability.

An interesting way to visualize the movement of the pendulum is from the point of view of motion trajectories for different initial conditions. Fig. 10(a) shows the phase curves for the CIP system without taking into account any type of friction. Note that the system is stable at π and $-\pi$ which is when the pendulum is parallel to the cart and highly unstable at $\theta=0$ which is the desired position. Fig. 10(b) shows the phase curves for the system under the action of a viscous friction assuming that the pendulum freely rotates n turns around its axis. Note that now the trajectories tend to π and $-\pi$ as the system loses energy due to friction.

In order to keep the system stable, it is necessary to implement a control strategy. The next section discusses the design and performance of a series of linear and nonlinear controllers.

IV. CONTROL STRATEGIES

In order to stabilize the behavior of θ , several strategies can be found in the literature. Among the linear control approaches, we can find in the literature the use of PID, LQR, and model predictive control (MPC) [8, 9].

Nonlinear approaches already explored include sliding mode and robust control [10,11]. Even though the former controllers have demonstrated acceptable performance, the CIP nonlinear dynamics can limit their operating ranges. The latter offers a better performance in the presence of parameter variations, uncertainties, and unmodeled disturbances.

A. Linear approaches

Both equations (8) and (11) are strongly nonlinear and, in order to apply a linear controller, an operating point must be selected to linearize them. It is evident that the pendulum works at π rad from its stable position, so the proposed linear variable is $\theta^* = \pi + \delta\theta$.

After linearization, equations (8) and (11) can be expressed as equations (13):

$$\begin{aligned} (M + m)x'' + bx' - ml\theta^{*''} &= F \\ (ml^2 + J)\theta^{*''} - mgl\theta^* - mlx'' &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Selecting as state vector $X = [x' \ x \ \theta^{*'} \ \theta^*]^T$, the linear model of the CIP system can be finally expressed as equation (14).

Two linear approaches are presented in this subsection: proportional derivative (PD) and proportional-integral-derivative (PID) control. These controllers aim to modify the system's root locus (RL) by means of the addition of poles and zeros in such a way that, for a certain range of values, all the roots of the system are stable.

The considerations for the desired response of the CIP are as follows:

1) *Maximum overshoot* of 20% ($C_{max}=0.2$). This magnitude, which could be considered as large, is not actually significant as long as the pendulum stabilizes quickly. In addition, a large value allows greater flexibility to calibrate other parameters.

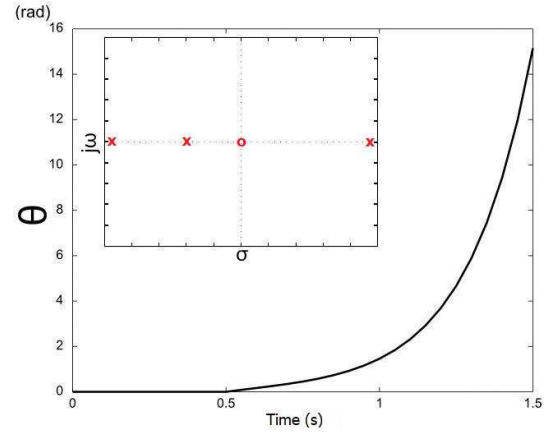


Fig. 9. Impulse response of the simulated open-loop system. Inset: the pole-zero map.

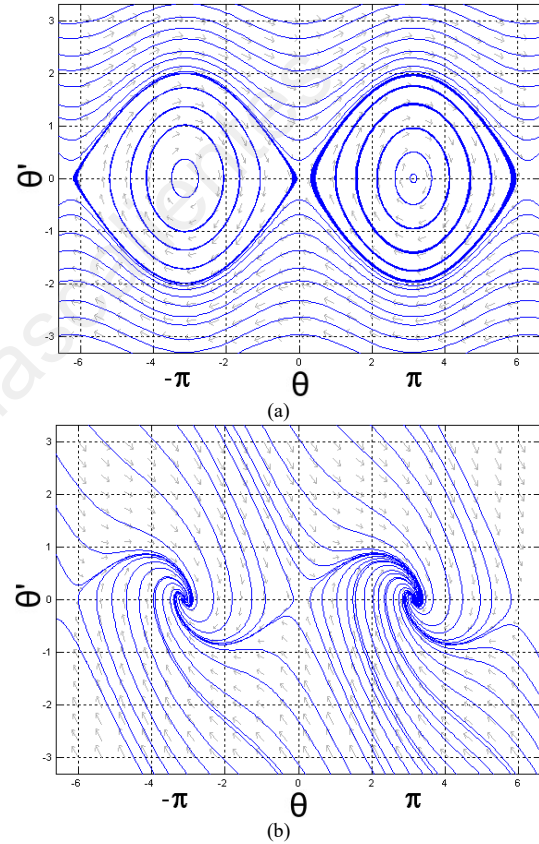


Fig. 10. Phase curves for the CIP: (a) without and (b) with friction.

$$\begin{aligned} X' &= \begin{bmatrix} -b(J + ml^2) & 0 & 0 & \frac{m^2 gl^2}{\Delta} \\ \frac{\Delta}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-mlb}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{mgl(M + m)}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} J + ml^2 \\ \frac{\Delta}{0} \\ \frac{ml}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} F \\ Y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \quad \text{with: } \Delta = J(M+m) + Mml^2 \end{aligned} \quad (14)$$

2) *Stabilization time* less than 0.5 s ($T_s=0.5$) to quickly ensure the stable position of the pendulum.

3) *Steady-state error* equal to zero ($e_{ss}=0$). The pendulum must be in a perfect vertical position.

Fig. 11 summarizes the results obtained. Fig. 11(a) shows the RL of the open-loop system. In this plot, it can be clearly seen that the CIP cannot be controlled using simple feedback: a branch of the RL is located in the unstable region. Therefore, it is necessary to rearrange the RL by adding poles and zeros.

Fig. 11(b) inset presents the RL rearranged upon the introduction of a zero by the PD controller. Note the closed path in the RL plot. For this trajectory, there is a series of values in which the system is stable. Taking into account the design considerations aforementioned, the same fig. 11(b) shows the simulated step response of the system compensated with a PD controller. Note that the PD approach allows to quickly stabilize θ .

Similarly, fig. 11(c) inset presents the RL of the CIP with the introduction of two zeros and one pole due to the use of the PID control. Note that the RL is similar to that of the PD (Fig. 11(b) inset). Fig. 11(c) shows the simulated step response of the system compensated with a PID controller. Note that PID outperforms the PD.

To validate the actual physical performance of the PID controller, it is necessary to apply an impulse to the CIP system and verify that it actually remains in its equilibrium state ($\theta=0$). Fig. 11(d) compares the analytical and experimental responses of the system compensated with a PID controller to an input pulse. Note that θ tends rapidly to its equilibrium position ($T_s=0.5$ s) and that the experimental behavior is very close to the analytical one. For the experimentation, samples were taken from the sensors every 16 ms, that is, a sampling frequency of 60 Hz.

B. Nonlinear approaches

Equations (8) and (11) can be directly used when a nonlinear controller is envisaged.

One nonlinear control approach is addressed in this subsection: model-reference adaptive control (MRAC). It offers the advantages of improving performance as adaptation goes on and does not require any a priori information about the unknown parameters [11].

Fig. 12 shows the block representation of the MRAC approach. Here, the motor-pulley-belt-CIP (MPB-CIP) system follows a reference model trying to copy its behavior. The error e between the outputs of the MPB-CIP system (y) and the reference model (y_m) is used to estimate the adaptation parameter β , which in turn adjusts the controller. Table II shows the parameters used for implementing the MRAC.

Fig. 13 shows the performance of the MRAC in the presence of an external unexpected disturbance (modeled as an impulse) applied in $t=5$ s. Note that the controller is robust enough to tolerate disturbances and quickly adapts to keep the system tracking the model.

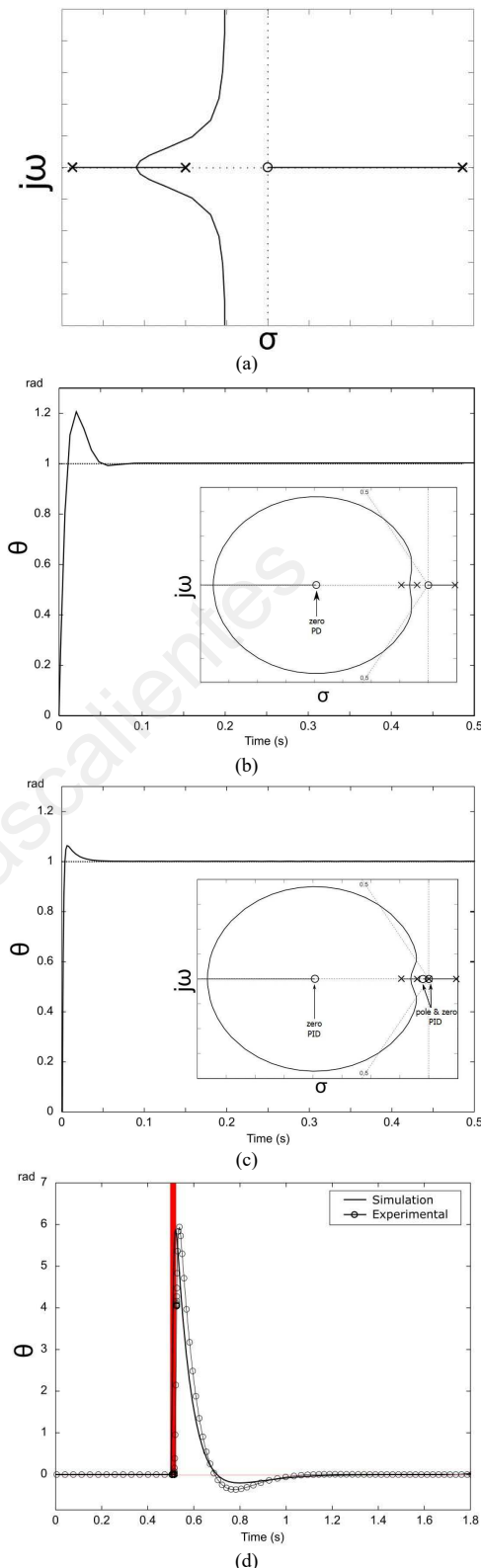


Fig.11. Simulated results for: (a) open loop, (b) closed loop with PD control, and (c) closed loop with PID control. (d) Comparison of the simulated and experimental responses to an impulse input (in red) with a PID controller. The CIP tends rapidly to its equilibrium position ($\theta=0$).

TABLE II
MRAC PARAMETERS USED TO CONTROL THE MPB-CIP SYSTEM.

Parameter	Expression
Reference model	$1/(s+1)$
Adaptation law	$\beta' = -\gamma y_m e$
Controller	$u = \beta r$

V. APPLICATIONS

The CIP modeling, simulation, and control approaches herein presented are currently been applied in two prototypes developed by our research group: a segway vehicle and a humanoid robot (Fig. 14).

The segway is a two-wheeled electrically propelled self-balancing personal vehicle. Its dynamics is based on the CIP problem. The challenge with this prototype would be to keep the pendulum and the driver stable during displacement.

Robot KUBO is a small-size humanoid robot exhibiting 20 DOF [12]. To perform walking, its CoM must be balanced while having one leg in the air. The problem becomes then similar to the one addressed by the CIP.

VI. CONCLUSION

This paper has presented a complete review of the cart inverted pendulum (CIP) system. In particular, a mechatronic prototype driven by a motor-pulley-belt (MPB) was studied and used as experimental platform to design and evaluate a set of linear and nonlinear controllers.

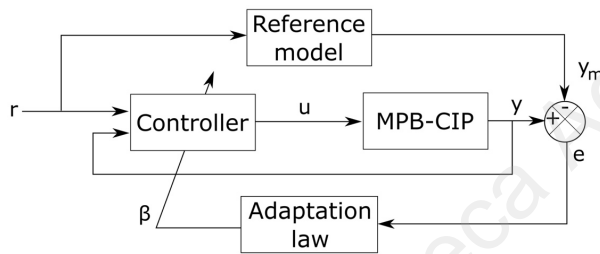


Fig. 12. MRAC approach for the CIP system.

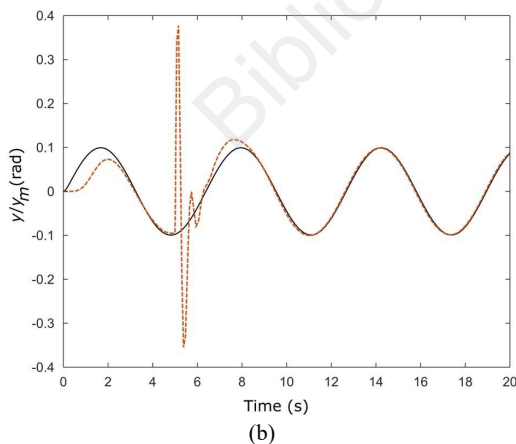


Fig. 13. Simulated performance of the MRAC with $\gamma=1$. System (red dotted line) tracking a model response (black solid line). An external disturbance occurs at $t=5s$.



Fig. 14. Further applications of the CIP problem.

The experimental results obtained are very close to those obtained analytically, which demonstrate the accuracy of the mathematical formulations. Future work will focus on exploring advances control techniques such as Fuzzy-PID, Intelligent PI [13], and optimum balancing [14] for the CIP, segway, and humanoid robot prototypes.

This project is a contribution to the automatic systems laboratory of Universidad Panamericana and aims to offer a low-cost yet highly efficient platform so that students can deepen their theoretical and experimental knowledge on control systems.

REFERENCES

- [1] R. Olfati-Saber, "Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum," *Proc. of IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3764-3765, 2001.
- [2] R. Eini, S. Abdelwahed, "Rotational inverted pendulum controller design using indirect adaptive fuzzy model predictive control," *Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1-6, 2019.
- [3] C. Shuang, Z. Dongjun, "Design and implementation of 2DOF spherical inverted pendulum," *J. Syst. Eng. Electron.*, 16(1), pp. 123-127, 2005.
- [4] L. Xing, Y. Chen, X. Wu, "A novel parallel-type double inverted pendulum control method," *Proc. of IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, pp. 880-887, 2010.
- [5] R. Rodriguez, J. Collado, "Periodically forced Kapitza's pendulum," *Proc. of American Control Conference*, pp. 2790-2794, 2016.
- [6] F. Xue, Z. Hou, H. Deng, "Balance control for an acrobat," *Proc. of Chinese Control and Decision Conference*, pp. 3426-3429, 2011.
- [7] A. Saif, "Strong stabilization of the non-linear Pendubot system," *Proc. of IEEE Int. Multi-Conf. on Systems, Signals & Devices*, pp. 1-7, 2015.
- [8] J.J. Wang, "Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers," *Simul Model Pract Th*, 19(1), pp. 440-449, 2011.
- [9] T. Chu, C. Chen, "Design and implementation of model predictive control for a gyroscopic inverted pendulum," *Appl. Sci*, 2017, 7, 1272.
- [10] S. Irfan, A. Mehmood, M. Razzaq, J. Iqbal, "Advanced sliding mode control techniques for inverted pendulum: modelling and simulation," *Eng. Sci. Technol. an Int. J.*, 21(4), 753-759, 2018.
- [11] R. Velazquez, "An optimal adaptive filtering approach for stress-tests motion artifacts removal: application on an ECG for tediagnosis," *Proc. of International Conference on Signal Processing*, pp. 1504-1507, 2002.
- [12] E. Hernández et al., "Kinematic computations for small-size humanoid robot KUBO," *ARN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(24), pp. 7311-7320, 2017.
- [13] C.L. Garzon-Castro, M. Cardona, R. Velazquez, C. Del-Valle-Soto, "Intelligent PI controller for microalgae growth in a closed photobioreactor," *Proc. of IEEE ANDESCON*, pp. 1-5, 2020.
- [14] M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velazquez, E. Haro, "Optimum balancing of the four-bar linkage using fully cartesian coordinates," *IEEE Latin America Transactions*, 17(6), 983-990, 2019.

9. Publicaciones

9.1 Artículos en Revistas Indexadas en WoS/Scopus

1. Velázquez (R.), Hernández (H.), **Preza (E.)**. A Portable Piezoelectric Tactile Terminal for Braille Readers, *Applied Bionics and Biomechanics*, 9(1), 2012, pp. 45-60.

9.2 Artículos en Memorias de Congreso Internacionales indexadas en Scopus

2. **Preza (E.)**, Velázquez (R.), Macías-Quijas (R.), Hernández (E.), Visconti (P). Linear and Nonlinear Control Approaches for the Cart Inverted Pendulum Problem, *12th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering*, Bucharest, Romania, 2021.
3. Velázquez (R.), Hernández (H.), **Preza (E.)**. A Portable eBook Reader for the Blind, *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Buenos Aires, Argentina, 2010.
4. Hernández (H.), **Preza (E.)**, Velázquez (R.). Characterization of a Piezoelectric Ultrasonic Linear Motor for Braille Displays, *IEEE Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, Cuernavaca, Mexico, 2009.
5. Vargas (H.), **Preza (E.)**, Velázquez (R.). A Combined Wiimote-Camera Tracking System for Small Aerial Vehicles, *IEEE Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, Cuernavaca, Mexico, 2009.
6. Velázquez (R.), **Preza (E.)**, Hernández (H.). Making eBooks Accessible to Blind Braille Readers, *IEEE International Workshop on Haptic Audio Visual Environments and Games*, Ottawa, Canada, 2008.

9.3 Artículos en Memorias de Congreso Nacionales

7. Hernández (H.), **Preza (E.)**, Velázquez (R.). Actuador Lineal Ultrasónico Piezoeléctrico para Pantallas Táctiles, *5^o Semana Nacional de Ingeniería Electrónica*, Ocotlán, Jal., México, 2009.

8. Hernández (H.), **Preza (E.)**, Velázquez (R.). Integración y Control de Actuadores Piezoeléctricos Ultraligeros para el Diseño de Dispositivos Braille, *9º Seminario de Investigación UAA*, Aguascalientes, Ags., México, 2008.

Biblioteca Aguascalientes