

UNIVERSIDAD PANAMERICANA

**ECEE
MAESTRÍA EN GESTIÓN DE RIESGO
INCORPORADA A LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
PÚBLICA RVOE 2007252**

**“VALUACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD
ESTOCÁSTICA Y SIMULACIÓN MONTE CARLO
UTILIZANDO EL MODELO DE HESTON PARA
ACTIVOS FINANCIEROS QUE COTIZAN EN LA
BOLSA MEXICANA DE VALORES (BMV)”**

**TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN GESTIÓN DE RIESGO**

PRESENTA:
IREN CASTILLO SALDAÑA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. FERNANDO CRUZ ARANDA

MÉXICO, D.F.

2012



International Herald Tribune, October 27, 1989. Kal, Cartoonists and Writers Syndicate, 1989.

*Mientras uno hace cálculos
y analiza los pros y los contras,
la vida pasa sin que pase nada.*

Marc Levy

*Lo que intento traducir para ustedes es más misterioso,
se enreda en las raíces mismas del Ser,
en la fuente impalpable de las sensaciones.*

Paul Cézanne

Agradecimientos

El concluir un trabajo de investigación siempre genera un alto grado de satisfacción; implica que se han superado dificultades e inconvenientes en el camino, sin embargo, esto no hubiera sido posible sin la participación directa o indirecta de innumerables personas que me animaron o motivaron a seguir adelante, sirva este espacio para expresar mi gratitud.

En primer lugar quiero agradecer a mi amor, confidente, amiga, ..., y esposa Mariana, que me acompaña en todas mis aventuras y que siempre me alienta a seguir adelante; a mis hijos Juan Carlos y Santiago por soportar tantos días y noches de ausencia, y que con una sonrisa alegran mis días.

A mis padres Julia Saldaña y Fidel Castillo porque su sacrificio y enseñanzas siguen dando frutos.

A mis hermanos Patricia y Mario por su apoyo incondicional.

A la Universidad Panamericana y en particular a Antonio Castro D'Franchis por el apoyo incondicional para continuar con mi formación académica.

A José Cruz Ramos por sus consejos y apoyo, además de toda la libertad y confianza concedida para la conclusión del presente trabajo.

Al Dr. Fernando Cruz por su paciencia, dirección, sugerencias y valiosos comentarios que enriquecieron este trabajo de investigación.

Al Mtro. Jorge Arturo León y a la Mtra. María Arroyo por su atenta lectura a las versiones preliminares de este trabajo y por sus atinadas correcciones. A Arturo del Moral por toda su ayuda e información proporcionada.

A mis amig@s María Arroyo, Daniela Noguez, Martha Lara, Rosario Sánchez, Arelly Muñoz, Ignacio García, Eduardo López, Vinicio Pérez, Alfonso Delint, Juan Araque, César Herrera, Francisco Ortíz, Gildardo de la Cruz, Andrés Galeana, que hacen más agradable y fructífero cada día de trabajo.

También quisiera agradecer a mis suegros Arturo Hernández y Ana Rosa Romero por su comprensión y apoyo brindado durante tanto tiempo.

Finalmente un agradecimiento especial a mis alumn@s con los que la responsabilidad cada día es mayor.

Índice

Resumen.....	vii
Introducción.....	1
1. Fundamentos matemáticos de la volatilidad.....	6
1.1. Introducción.....	6
1.2. Conceptos básicos del cálculo de probabilidades	7
1.3. Conceptos básicos del cálculo estocástico	13
1.3.1. Movimiento Browniano	15
1.3.2. Integral estocástica	19
1.3.3. Lema de Itô.....	20
1.3.4. Teorema de Radon-Nicodyn.....	25
1.3.5. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck	25
2. Volatilidad: medida de riesgo	27
2.1. Introducción.....	27
2.2. Definición de volatilidad.....	28
2.3. Características de las series de tiempo financieras.....	30
2.4. Tipos de volatilidad.....	32
2.4.1. Volatilidad histórica	33
2.4.2. Volatilidad implícita.....	36
2.4.3. Volatilidad estocástica.....	40
3. Valuación de opciones con volatilidad	46
3.1. Introducción.....	46
3.2. Definición y notación	47
3.3. Opciones de primera generación: <i>Plain Vanilla</i>	48
3.3.1. Plazo al vencimiento.....	52
3.3.2. Precio del bien subyacente <i>versus</i> precio de ejercicio.....	52
3.3.3. Volatilidad del precio del bien subyacente	53
3.3.4. Valores de una opción.....	54

3.4. Valuación de opciones considerando <i>volatilidad constante</i>	57
3.5. Valuación de opciones considerando <i>volatilidad estocástica</i>	63
4. Modelos de valuación de opciones con volatilidad estocástica.....	69
4.1. Introducción.....	69
4.2. Modelos de Valuación	70
4.2.1. Modelo de <i>elasticidad constante de la varianza</i>	70
4.2.2. Modelo de <i>opción compuesta</i>	71
4.2.3. Modelo de <i>difusión desplazada</i>	73
4.3. Modelos <i>tipo ARCH</i>	75
4.3.1. Modelo ARCH(p).....	75
4.3.2. Modelo GARCH(p, q)	76
4.3.3. Modelo IGARCH(p, q).....	78
4.3.4. Modelo EGARCH(p, q).....	79
4.4. Modelos de <i>volatilidad estocástica</i>	80
4.4.1. Modelo ARVS.....	81
4.4.2. Modelo A-ARVS	83
4.4.3. Modelo ARVS-M	83
4.4.4. Modelo ARVS-X.....	84
4.5. Modelos empíricos de volatilidad estocástica	86
4.5.1. Modelo de Scott	86
4.5.2. Modelo de Hull y White.....	88
4.5.3. Modelo de Stein y Stein.....	89
5. Modelo de Heston	91
5.1. Introducción.....	91
5.2. Supuestos del modelo.....	92
5.3. Derivación del Modelo.....	94
5.4. La ecuación diferencial parcial del modelo de Heston.....	96

5.5. Portafolio sin riesgo	98
5.6. El precio de una opción call	102
5.7. La ecuación diferencial parcial para P1 y P2	106
5.8. Funciones características.....	108
5.9. Solución de la ecuación Riccati	111
5.10. Propiedades del proceso de la varianza	115
6. Valuación de opciones europeas con volatilidad estocástica bajo el modelo de Heston	116
6.1. Introducción.....	116
6.2. El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC).....	116
6.2.1. Metodología diaria de cálculo del índice.....	119
6.3. Datos.....	120
6.4. Análisis Estadístico	120
6.5. Especificaciones modelos tipo ARCH.....	128
6.6. Simulación Monte Carlo	137
6.7. Implementación del modelo de Heston.....	139
6.7.1. Asimetría.....	144
6.7.2. Curtosis	145
Conclusiones.....	147
Bibliografía.....	150
Glosario	165
ANEXOS.....	172

Índice de Gráficas

Gráfica 1.1. <i>Movimiento Browniano</i>	18
Gráfica 1.2. <i>Movimiento Geométrico Browniano</i>	19
Gráfica 2.1. <i>Volatilidad histórica del IPC, 2000-2011</i>	34
Gráfica 2.2. <i>Volatilidad histórica del IPC, 2008-2011</i>	34
Gráfica 2.3. <i>Volatilidad implícita de México (Vimex), 2004-2011</i>	40
Gráfica 2.4. <i>IPC y volatilidad implícita (Vimex), 2008-2011</i>	40
Gráfica 3.1. <i>Call larga</i>	49
Gráfica 3.2. <i>Call corta</i>	50
Gráfica 3.3. <i>Put larga</i>	51
Gráfica 3.4. <i>Put corta</i>	51
Gráfica 3.5. <i>Opción call</i>	52
Gráfica 3.6. <i>Opción put</i>	53
Gráfica 3.7. <i>Valores de una call europea</i>	55
Gráfica 3.8. <i>Valores de una put europea</i>	56
Gráfica 6.1. <i>Evolución del IPC, 2000-2012</i>	119
Gráfica 6.2. <i>IPC y rendimiento, 2000-2012</i>	121
Gráfica 6.3. <i>Histograma IPC</i>	122
Gráfica 6.4. <i>Histograma rendimiento IPC</i>	122
Gráfica 6.5. <i>Correlación de los residuos del IPC</i>	125
Gráfica 6.6. <i>DEC ARCH(1)</i>	130
Gráfica 6.7. <i>VC ARCH(1)</i>	130
Gráfica 6.8. <i>DEC GARCH(1,1)</i>	130
Gráfica 6.9. <i>VC GARCH(1,1)</i>	130
Gráfica 6.10. <i>DEC GARCH(1,2)</i>	131
Gráfica 6.11. <i>VC GARCH(1,2)</i>	131
Gráfica 6.12. <i>DEC GARCH(1,3)</i>	131
Gráfica 6.13. <i>VC GARCH(1,3)</i>	131
Gráfica 6.14. <i>DEC GARCH(2,1)</i>	132

Gráfica 6.15. <i>VC GARCH(2,1)</i>	132
Gráfica 6.16. <i>DEC GARCH(2,2)</i>	132
Gráfica 6.17. <i>VC GARCH(2,2)</i>	132
Gráfica 6.18. <i>DEC GARCH(2,3)</i>	133
Gráfica 6.19. <i>VC GARCH(2,3)</i>	133
Gráfica 6.20. <i>DEC GARCH(3,1)</i>	133
Gráfica 6.21. <i>VC GARCH(3,1)</i>	133
Gráfica 6.22. <i>DEC GARCH(3,2)</i>	134
Gráfica 6.23. <i>VC GARCH(3,2)</i>	134
Gráfica 6.24. <i>DEC GARCH(3,3)</i>	134
Gráfica 6.25. <i>VC GARCH(3,3)</i>	134
Gráfica 6.26. <i>DEC EGARCH(1,1)</i>	135
Gráfica 6.27. <i>VC EGARCH(1,1)</i>	135
Gráfica 6.28. <i>Trayectorias por simulación Monte Carlo</i>	138
Gráfica 6.29. <i>Trayectoria del precio</i>	140
Gráfica 6.30. <i>Trayectoria de la volatilidad</i>	140
Gráfica 6.31. <i>Trayectorias del precio del activo subyacente</i>	141
Gráfica 6.32. <i>Trayectorias de la volatilidad</i>	141
Gráfica 6.33. <i>Trayectoria del precio</i>	142
Gráfica 6.34. <i>Trayectoria de la volatilidad</i>	143
Gráfica 6.35. <i>Trayectorias del precio del activo subyacente</i>	143
Gráfica 6.36. <i>Trayectorias de la volatilidad</i>	144
Gráfica 6.37. <i>Distribución del modelo de Black-Scholes y Heston</i>	145
Gráfica 6.38. <i>Precios de la opción call bajo el modelo de Heston</i>	146

Índice de Cuadros

Cuadro 3.1. <i>Determinación del precio de una opción sobre acciones</i>	57
Cuadro 6.1. <i>Series accionarias del IPC</i>	117
Cuadro 6.2. <i>Resumen estadístico del IPC y su rendimiento</i>	121
Cuadro 6.3. <i>Pruebas de raíces unitarias del rendimiento del IPC</i>	123
Cuadro 6.4. <i>Regresión del rendimiento del IPC, modelo AR(1)</i>	124
Cuadro 6.5. <i>Contraste arch para el rendimiento del IPC</i>	126
Cuadro 6.6. <i>Contraste de white para detectar heteroscedasticidad</i>	127
Cuadro 6.7. <i>Regresiones modelos familia arch de un proceso ar(1) para los rendimientos del IPC</i>	128
Cuadro 6.8. <i>Regresiones garch de un proceso AR(1). Ecuación de la varianza</i>	129
Cuadro 6.9. <i>Simulación de la opción call bajo el modelo de Heston</i>	146
Cuadro A1. <i>Modelos de volatilidad alternativos y parámetros</i>	172
Cuadro A2. <i>Especificaciones de la familia ARCH</i>	173
Cuadro A3. <i>Modelos de heterocedasticidad condicional</i>	176
Cuadro A4. <i>Número de acciones y pesos relativos de las series accionarias en la muestra del IPC</i>	177
Cuadro A5.1. <i>ARCH(1)</i>	178
Cuadro A5.2. <i>GARCH(1,1)</i>	179
Cuadro A5.3. <i>GARCH(1,2)</i>	180
Cuadro A5.4. <i>GARCH(1,1)</i>	181
Cuadro A5.5. <i>GARCH(2,1)</i>	182
Cuadro A5.6. <i>GARCH(2,2)</i>	183
Cuadro A5.7. <i>GARCH(2,3)</i>	184
Cuadro A5.8. <i>GARCH(3,1)</i>	185
Cuadro A5.9. <i>GARCH(3,2)</i>	186
Cuadro A5.10. <i>GARCH(3,3)</i>	187
Cuadro A5.11. <i>EGARCH(1,1)</i>	188
Cuadro A5.12. <i>TARCH(1,1)</i>	189
Cuadro A5.13. <i>TARCH(1,1)</i>	190

Resumen

La volatilidad se ha convertido en la principal variable de análisis en los mercados financieros y su importancia radica en la determinación de los precios de los derivados, en particular de las opciones. La utilización de modelos que consideran a la volatilidad como estocástica permiten estimarla y modelarla de manera más precisa a diferencia del planteamiento de Black–Scholes que la consideraban como constante. El presente trabajo de investigación considera el modelo de Heston (1993) en el que la volatilidad puede ser especificada por un modelo de la familia ARCH, GARCH y TARCH, es decir, como un proceso de raíz cuadrada con reversión a la media. Las ecuaciones de precios se pueden calibrar con información de mercado de manera eficiente y robusta. Asimismo, la varianza es modelada por simulación Monte Carlo para la valuación de la opción.

Abstract

Volatility has become the main variable of analysis in the financial markets and their importance lies in the pricing of derivatives, including options. The use of models that consider stochastic volatility as estimated and allow more accurate modeling it unlike the approach of Black–Scholes who regarded it as a constant. The present investigation considers the model of Heston (1993) in which the volatility can be specified by a family model ARCH, GARCH and TARCH, *ie* a square root process with mean reversion. The price equations can be calibrated to market data in an efficient and robust. Also, the variance is modeled by Monte Carlo simulation for valuation of the option.

Introducción

El estudio de la *volatilidad* en los mercados financieros ha crecido de manera considerable en las últimas décadas, debido en gran parte a la propagación de las crisis financieras que generan inestabilidad económica a nivel mundial. En particular la literatura de series de tiempo ha prestado especial atención al estudio de la volatilidad de las variables económicas y financieras que evoluciona a través del tiempo y su cuantificación es de vital importancia en los modelos de valuación de activos.

De manera simple, el concepto de volatilidad empleado en el lenguaje financiero, está asociado al concepto de desviación estándar (medida de dispersión de los rendimientos de los activos) que se interpreta como una medida del riesgo total de un activo financiero, aunque también, la volatilidad es la velocidad de la variación de los precios de un activo en una unidad de tiempo, dicha unidad es de un año.

La volatilidad se puede considerar como indicador fundamental en la determinación de los precios en los mercados financieros. Algunos analistas consideran que un mercado que tiene pocos movimientos en los precios de sus activos tiene baja volatilidad y un mercado que tiene muchos movimientos tiene alta volatilidad, en este sentido, la volatilidad es una medida de velocidad en la que los precios en el mercado se ajustan, en la realidad es importante determinar cuáles mercados son más volátiles.

En este contexto, la varianza se convierte en una de las variables con más trascendencia en la teoría moderna de las finanzas, por ejemplo, en el modelo de valuación de activos de capital y análisis de cartera, *Capital*

Asset Pricing Model (CAPM)¹ de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) y fundamental en el modelo de valuación de activos derivados del modelo de Black y Scholes (1973).

La volatilidad puede proporcionar información acerca del comportamiento futuro del valor de los activos o del portafolio de inversión, ahí radica su importancia. La información produce cambios en las expectativas, las cuales a su vez llevan a cambios no anticipados en los precios de los activos.

En la actualidad existe una gama impresionante de trabajos de investigación que modelan la volatilidad asociada a diversos y diferentes activos financieros (acciones, divisas, tipos de cambio, tasas de interés, índices, entre otros), asimismo, es fundamental en la fijación de los precios de los derivados.

Uno de los supuestos más importantes en el modelo de Black–Scholes es considerar la volatilidad como un parámetro constante o determinístico, en tanto puede conocerse como función del tiempo y del precio del activo subyacente. Muchas investigaciones, suponían por simplicidad un comportamiento constante en la volatilidad, sin embargo, los análisis posteriores empezaron a identificar comportamientos heteroscedásticos en la varianza de los rendimientos de los activos, además de una serie de características asociadas con la curtosis, la asimetría en los rendimientos,² lo que provocó que muchos estudios en sus modelos empezaran a incorporar la volatilidad de manera estocástica, por ejemplo: Clark (1973), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1976), Epps y Epps (1976), Wiggins (1987), Hull y White (1987), Stein y Stein (1991), Bollerslev, Chou y Kroner (1992); Heston

¹ La relación intertemporal entre los rendimientos esperados en índices bursátiles y

² Empíricamente los rendimientos de los precios de un activo exhiben curvas leptocúrticas o con una gran desviación estándar y por tanto, no siguen una distribución normal como lo sugiere el modelo de Black–Scholes.

(1993), Bollerslev, Engle y Nelson (1994), Ghysels, Harvey y Renault (1996), Harvey y Shephard (1996); Broto y Ruiz (2002); Ruiz y Veiga (2008); Shephard y Andersen (2009).

Asimismo, existen innumerables documentos que intentan modelar, estimar o simular la volatilidad considerando la evidencia empírica, entre estos están los modelos de Palm, (1996); Mahieu y Schotman (1998); Jacquier, Polson y Rossi (1999); Carnero, Pena y Ruiz (2001); Koopman y Hol (2002); Carnero (2004); Andersen, Bollerslev, Christoffersen y Diebold (2005); Ederington y Guan (2005).

Existen algunos otros modelos que estiman la volatilidad en tiempo continuo y con técnicas complejas y cuya interpretación analítica no es inmediata, sobre todo para los que se encuentran en el mercado tomando decisiones Lopes, (2003) y Kilin (2007).

Los modelos de volatilidad de activos financieros conllevan una sólida herramienta matemática, fundamentalmente cálculo estocástico, respaldada bajo un ambiente de tipo econométrico. Entre los diferentes modelos propuestos en la literatura que representan la evolución dinámica de la volatilidad, existen dos grandes familias de modelos que permiten estimarla y simularla: los modelos de Heteroscedasticidad Condicional (familia ARCH) que están fundamentados en la propuesta de Engle (1982) y Bollerslev (1986), y los modelos de volatilidad estocástica propuestos por Taylor (1986) y con extensiones desarrolladas por Harvey, Ruiz y Shepard (1994), entre otros, examinados y revisados por Harvey y Shephard (1996), Ghysels, Harvey y Renault (1996), Broto y Ruiz (2002).

El propósito del presente trabajo de investigación es hacer una presentación breve de todos los modelos que estiman la volatilidad, de manera particular, se mostrarán los modelos univariantes por ser los más utilizados; se abordarán desde el punto de vista teórico-práctico obteniendo inter-

pretaciones analíticas para la determinación de los precios en el mercado mexicano.

El objetivo principal es utilizar la volatilidad estimada de los rendimientos de los activos que cotizan en la BMV, para la valuación de opciones utilizando en específico el modelo de Heston (1993), con el objeto de predecir futuros comportamientos de los mercados, además de tomar previsiones ante tales acontecimientos.

El modelo goza de gran popularidad debido a que permite calcular analíticamente los precios de las opciones europeas (*plain vanilla*) y admite ajustar los parámetros a los datos del mercado, relajando el supuesto de volatilidad constante del modelo Black-Scholes. Una aportación importante es que obtiene funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, sin embargo, no existen expresiones analíticas, por lo que es necesario obtener aproximaciones utilizando métodos numéricos.

Aunque son claras las diferencias y similitudes entre los modelos GARCH y los modelos de volatilidad estocástica en las ecuaciones que definen cada propuesta de modelar la volatilidad, el presente trabajo de investigación estimará la volatilidad en tiempo discreto mediante los modelos GARCH y sus extensiones. Asimismo, se estimará la volatilidad en tiempo continuo mediante los modelos de volatilidad estocástica, en particular el modelo de Heston incorporando simulación Monte Carlo. Finalmente se compararán los resultados y se presentará la utilización de estos modelos en la valuación de opciones europeas *plain vanilla*.

Se determinará qué modelo tiene mayor capacidad predictiva de los valores futuros de la varianza condicional, esperando dar recomendaciones sobre una adecuada manera de medir la volatilidad. Se considerarán los modelos que capturen las propiedades típicas de las series financieras,

como por ejemplo, exceso de curtosis, concentración de los periodos de volatilidad, correlación en los cuadrados de las series, entre otras.

El trabajo comprenderá seis capítulos desarrollados de la siguiente manera, en el **capítulo 1** se presentan los principales conceptos de estadística, probabilidad y cálculo estocástico.

En el **capítulo 2** se definen los tipos de volatilidad existentes en la literatura, determinando la volatilidad y el tratamiento que se utilizará a lo largo del presente trabajo.

En el **capítulo 3** se exponen los tipos de opciones existentes en los mercados financieros, además de definir las que serán objeto de análisis en el trabajo de investigación.

En el **capítulo 4** se presentan los métodos de valuación de opciones considerando la volatilidad constante y la volatilidad estocástica, además se realiza una revisión de los principales modelos propuestos hasta el momento en la literatura econométrica para modelar el comportamiento de la volatilidad estocástica de los rendimientos de los principales activos.

En el **capítulo 5** se deriva el modelo de Heston para la valuación de activos que consideran volatilidad estocástica.

En el **capítulo 6** mediante la evidencia empírica que ha determinado el movimiento de las series financieras y que ha generado el comportamiento de la volatilidad se realizará la valuación de opciones mediante el modelo de Heston, se recogerán y compararán los resultados obtenidos.

Finalmente, se presentan las conclusiones y futuras líneas de investigación que permitirán extender el análisis de modelos que consideran volatilidad estocástica y en particular el modelo de Heston.

1. Fundamentos matemáticos de la volatilidad

1.1. Introducción

La *teoría de la probabilidad* interviene en todos los niveles del modelado de variables económico-financieras. Debido a ello es imprescindible considerar las definiciones, propiedades y aplicaciones necesarias para formular modelos con componentes estocásticos, principalmente, la volatilidad. Entre los principales conceptos están las nociones fundamentales de variables aleatorias, σ -álgebra, probabilidad sobre una σ -álgebra, probabilidades condicionales e independencia de sucesos, momentos de las variables aleatorias considerando en particular las propiedades de esperanza y varianza, pues, constituyen la base del análisis financiero del rendimiento y riesgo de un activo financiero.

El comportamiento aleatorio de los fenómenos económicos y financieros está determinado por la *Teoría de los Procesos Estocásticos*. El concepto de proceso estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes de riesgo e incertidumbre. Este tipo de procesos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras que dependen del tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, entre otros.³

El presente capítulo presenta una *breve* introducción a los conceptos matemáticos de la teoría de la probabilidad y procesos estocásticos. Se busca ser formales, en todo caso existe literatura especializada como referencia; se busca que las definiciones y propiedades de los procesos aleatorios

³ Véase Venegas (2008), pág. 33.

sean las necesarias para iniciar el análisis de la volatilidad donde no se puede prever con certidumbre la evolución de las variables; además es indispensable establecer los conceptos básicos que intervienen a lo largo de toda la investigación.

1.2. Conceptos básicos del cálculo de probabilidades

La definición axiomática de Kolmogorov, establecida en 1933, proporcionó una base sólida al concepto de probabilidad, generando una tendencia de las matemáticas en la primera mitad del siglo XX, dicha definición se basa en la teoría de la medida.

El concepto fundamental sobre el cual se plantea todo el análisis probabilístico es el de *experimento aleatorio* o *estocástico*. Un experimento aleatorio x_i es un experimento que cumple con las siguientes condiciones:

- a) tiene al menos dos posibles resultados (éxito o fracaso).
- b) el conjunto de posibles resultados se conoce de antemano, aunque el resultado de cada suceso se rige por el azar.
- c) se puede repetir de forma análoga cuantas veces se desee bajo las mismas condiciones.

Se llama *evento* o *suceso* a cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio x_i es llamado *espacio muestral* y se representa mediante Ω .

Si a un evento en particular se le asocia la posibilidad de contener información relevante del experimento, se le considerará como subconjunto de Ω . Los subconjuntos son generados por operaciones usuales de conjuntos (unión, intersección y complemento), deben ser cerrados en operaciones

finitas de elementos, a dichas operaciones se les denotará por \mathcal{F} , y se conocerá por σ -álgebra de Ω .⁴

De manera típica no se trabaja con todo el espacio muestral Ω , sino con algún subconjunto, que en este caso será cerrado no sólo bajo operaciones finitas, sino también bajo operaciones numerables, a esta colección se le conoce como σ -álgebra.

Si Ω es un espacio muestral no vacío y $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$. La colección \mathcal{F} es llamada una σ -álgebra⁵ de Ω si cumple las siguientes condiciones:

- a) $\Omega \in \mathcal{F}$.
- b) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- c) Si (A_i) es una sucesión numerable de conjuntos en \mathcal{F} , entonces

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le conoce como *espacio medible* ya que es posible asignar una medida de probabilidad,⁶ sobre dicho espacio, tal que cumpla con los axiomas de Kolmogorov.

⁴ Si Ω es finito, toda la información relevante del experimento pertenece al álgebra $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$. Cuando Ω es infinito las operaciones serán una colección numerable de elementos en \mathcal{F} .

⁵ Una σ -álgebra es un conjunto que tiene como elementos a los sucesos que contienen información relevante definida sobre Ω . Si $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ se carece de información, si $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ se tiene información completa. Entre todas las σ -álgebras que pueden definirse en un espacio muestral, la más pequeña está dada por $\{\Omega, \emptyset\}$ y la más grande por el conjunto potencia, 2^{Ω} .

⁶ Una *medida de probabilidad* en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ que satisface:

- 1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- 2) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$.
- 3) Para cada sucesión (A_i) de elementos de \mathcal{F} disjuntos, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se cumple $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Las observaciones generadas por un fenómeno aleatorio frecuentemente son numéricas, aunque también es posible obtener resultados no numéricos. El concepto de variable aleatoria proporciona un medio para relacionar cualquier resultado de un experimento aleatorio con una medida cuantitativa.

Una *variable aleatoria (v.a.)* X es una función del espacio muestral Ω a \mathbb{R} , esto es, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.⁷ Una descripción completa de la distribución de probabilidad de una *v.a.* X requiere conocer $\mathbb{P}(X \in A)$, por tanto, una *v.a.* tiene asociada una función, llamada *función de distribución*⁸ que es necesario analizar.

La *función de distribución* de X es una función $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, definida como

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) \leq x\}), x \in \mathbb{R}, \quad [1.1]$$

entonces $F(x)$ cumple con las siguientes propiedades:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- 2) Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
- 3) $F(x)$ es continua por la derecha, es decir, $F(x^+) = F(x)$.

Finalmente, si $F(x)$ es una función de distribución, entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas, el criterio de clasificación se da por los valores que pueden tomar. Se considerará discreta si toma valores finitos o infinitos numerables (que se puedan con-

⁷ Si una función X cumple con $X^{-1}(A) = \{\omega: X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$, se dice que X es \mathcal{F} -medible.

⁸ A la función $F(x)$ también se le conoce como función de distribución acumulada (*fda*). Las funciones de distribución contienen toda la información de una *v.a.*, incluyendo su correspondiente medida de probabilidad.

tar) y se dirá que es continua si puede tomar valores dentro de un intervalo dado.

Si $F(x)$ es una función definida por partes en un conjunto numerable de intervalos, entonces se dice que X es una v.a. discreta.

Si x_1, x_2, \dots son los puntos de discontinuidad de $F(x)$, se define la función $f(x)$, llamada *función de probabilidad* de X , dada por

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(-x) > 0 & \text{si } x = x_1, x_2, \dots \\ 0 & \text{si } x \neq x_1, x_2, \dots \end{cases} \quad [1.2]$$

La función $F(x)$ se puede plantear como $F(x) = \sum_{s \leq x} f(s)$.

Si $F(x)$ es continua para todo x , entonces se dice que X es una v.a. continua,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \forall a < b, \quad [1.3]$$

por el Teorema Fundamental del cálculo, se tiene,

$$\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF(x) dx = F(b) - F(a). \quad [1.4]$$

A la función $f(x)$ se le llama función de densidad de X .

Si X es una v.a. continua, se dice que X tiene una distribución normal si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad [1.5]$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son parámetros.⁹

Si los parámetros toman los siguientes valores, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se dice que X tiene una distribución normal estándar y la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}. \quad [1.6]$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable $Y = e^X$ sigue una distribución log-normal (μ, σ^2) , y su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad [1.7]$$

La importancia de la distribución lognormal radica en que, el logaritmo de la variable se aproxima a una distribución normal que es positiva, además de que capta el comportamiento dinámico de la *v.a.* y su evolución a través del tiempo.

La esperanza matemática o valor esperado es de especial importancia, ya que describe el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, sin embargo, por sí misma, no ofrece una descripción adecuada de la forma de la distribución, por lo que es necesario determinar la dispersión de las observaciones que se encuentran alrededor de la media. A continuación se expresa el valor esperado, la varianza y covarianza de una variable aleatoria discreta y continua.

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$, su media o valor esperado es

⁹ También se puede escribir: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\mu = E[X] = \sum_x xf(x), \quad [1.8]$$

si X es discreta, y

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad [1.9]$$

si X es continua.

La varianza¹⁰ es

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x), \quad [1.10]$$

si X es discreta, y

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad [1.11]$$

si X es continua.

La covarianza de X y Y , cuando son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$ es

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y), \quad [1.12]$$

si X y Y son discretas, y

¹⁰ Una forma alternativa es $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$.

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y) dx dy, \quad [1.13]$$

si X y Y son continuas.

La covarianza entre dos variables aleatorias es una medida de la asociación entre ambas. Cuando X y Y son estadísticamente independientes, se puede mostrar que la covarianza es cero, lo opuesto, en general no es cierto, dos variables pueden tener covarianza cero e incluso así no ser estadísticamente independientes. La covarianza describe la relación lineal entre dos variables aleatorias, si una covarianza entre X y Y es cero, X y Y quizá tengan una relación no lineal, lo cual significa que no necesariamente son independientes.

1.3. Conceptos básicos del cálculo estocástico

Un *proceso estocástico* es una representación matemática que representa la evolución de un fenómeno aleatorio a lo largo del tiempo. El comportamiento de dicho fenómeno en un tiempo t , se recoge en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}_t) .

La utilidad de los procesos estocásticos en los modelos financieros radica en la descripción y acumulación de información a medida que el tiempo transcurre, donde la información pasada no se olvida, y se considera fundamental en tiempo continuo y en ambientes de riesgo e incertidumbre.

Una *filtración* en (Ω, \mathcal{F}_t) es una colección $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de σ -álgebras¹¹ de Ω tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, para cualesquier $0 \leq s \leq t$.¹²

¹¹ La familia creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es llamada filtración natural generada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$.

¹² A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ se le conoce como *espacio de probabilidad filtrado*.

Frecuentemente es conveniente escribir $X(\omega, t)$ en lugar de $X_t(\omega)$, ya que para un tiempo t fijo, el proceso se convierte en una *v.a.* Por tanto, cuando se fija $\omega \in \Omega$, éste se convierte en una función que depende del tiempo:

$$t \rightarrow X_t(\omega), \quad t \in T,^{13}$$

donde a la función $X(\omega, t) = X_t(\omega)$ se le conoce como *trayectoria* del proceso X_t .¹⁴

Sin embargo, el hecho de considerar una gran cantidad de trayectorias también nos permite estimar sus valores esperados, dichos valores son considerados como una esperanza condicional de la historia del proceso, formalmente se define como *filtración*.

Un proceso X_t adaptado a una filtración \mathcal{F}_t es una martingala con respecto a la filtración si cumple:

- a) $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso adaptado a la filtración \mathcal{F}_t para cada $t \geq 0$.
- b) $E^{\mathbb{P}}[|X_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$.¹⁵
- c) Si $s < t$, entonces $E^{\mathbb{P}}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ para toda $s \leq t$.¹⁶

De acuerdo con c), se puede considerar que la información disponible hasta el tiempo s , es el mejor pronóstico de X_t , que considera el valor más reciente, X_s .

Asociado al concepto anterior se puede considerar un proceso particular que es muy utilizado por las propiedades que contemplan los procesos de

¹³ Si para todo $t \in T$, X_t es una v.a. \mathcal{F}_t -medible, entonces se dice que X_t es adaptado a la filtración \mathcal{F}_t .

¹⁴ Cuando se considera tiempo continuo es necesario especificar la información disponible en cada punto en el tiempo, existe una cantidad infinita de trayectorias.

¹⁵ Si no se cumple con esta condición, se dice que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala local.

¹⁶ Si se cumple la desigualdad $E^{\mathbb{P}}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$, entonces el proceso es una *submartingala*, y si $E^{\mathbb{P}}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$, entonces el proceso es una *supermartingala*.

difusión¹⁷, el *proceso de Markov*. Un proceso de Markov plantea que el comportamiento futuro del proceso es independiente del pasado, y sólo depende del presente.

Un proceso X_t adaptado a la filtración \mathcal{F}_t es un proceso de Markov con respecto a \mathcal{F}_t si para cualquier t y $s > 0$, las distribuciones condicionales son iguales, dados \mathcal{F}_t y X_t ,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \leq y | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \leq y | X_t). \quad [1.14]$$

1.3.1. Movimiento Browniano

El fenómeno natural conocido actualmente como *movimiento Browniano* tiene una historia fascinante. El primer registro, data de 1827 cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en agua y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.¹⁸ Este extraño movimiento fue objeto de discusiones y controversias a partir de su divulgación en la comunidad científica debido a que Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida.

Se llevaron a cabo diversos experimentos y se formularon muy diversas hipótesis con la intención de dar una explicación satisfactoria al fenómeno observado. Hoy en día este movimiento es entendido y explicado a través de las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Llegar a tal aseveración tomó muchos años pues debió aceptarse la teoría cinético molecular de la materia, y el trabajo seminal sobre

¹⁷ El movimiento Browniano, el movimiento Browniano con deriva y el movimiento Browniano geométrico son procesos de difusión.

¹⁸ Véase Brown, Robert (1828): “A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies”, *Edinburgh New Philosophical Journal*, Julio-Septiembre, pp. 358-371.

mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano de Albert Einstein en 1905.

Posteriormente, en 1900, el francés Louis Bachelier realiza un análisis del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París en su tesis “Theorie de la spéculation” adelantándose en la formulación matemática del movimiento Browniano a Albert Einstein.

Finalmente, Norbert Wiener formula los fundamentos matemáticos para el movimiento Browniano como un proceso estocástico, en sentido estricto, el planteamiento del fenómeno físico como un modelo matemático es conocido como *proceso de Wiener*.

La importancia del movimiento Browniano radica en su uso tanto teórico como práctico en numerosas investigaciones en diversas áreas no solo financieras sino también económicas, además de que podríamos afirmar que independientemente del análisis que se esté realizando, si se encuentra en ambientes con incertidumbre (estocásticos) en tiempo continuo, el movimiento Browniano evidentemente estará presente.¹⁹

Un proceso W_t es un movimiento Browniano definido por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en un espacio de probabilidad fijo, es una función

$$W: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

es una *v.a.* definida en (Ω, \mathcal{F}) . Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

¹⁹ Para ser más precisos el movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de valoración de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia”. Véase Venegas (2008), pág. 32.

$$W(\cdot, \omega): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$ es denotada como $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Las funciones $W(\cdot, \omega)$ son llamadas trayectorias y se denotan por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface las siguientes condiciones:

- a) $W_0 = 0$, casi en todas partes, es decir, $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0\} = 1$.
- b) Para cualquier conjunto de tiempo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son estocásticamente independientes.
- c) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).^{20}$$

El movimiento browniano es la piedra angular de la modelación estocástica de los mercados financieros actualmente, sin embargo, no es posible modelar el comportamiento de todas las variables financieras. Una generalización importante es el movimiento Browniano con deriva.²¹

Si W_t es un movimiento Browniano y el proceso X_t está definido por

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \quad [1.15]$$

X_t se conoce como movimiento Browniano con deriva μ . La constante σ se conoce como coeficiente de difusión.²²

²⁰ Se puede definir el movimiento Browniano estándar si la condición c) se sustituye por $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, c(t - s))$, donde c es una constante positiva. Cualquier movimiento Browniano no estándar puede convertirse en uno estándar a través de un cambio de variable $\tau = ct$, o al considerar un nuevo proceso definido por $\frac{W_t}{c}$. Ésta propiedad también asegura que los incrementos son estacionarios.

²¹ Sin embargo, no cobró importancia hasta que en 1965 Paul A. Samuelson, propuso el *movimiento browniano geométrico o económico* en el cual los logaritmos de los precios son los que siguen un movimiento browniano con tendencia.

²² Para cada $t \in T$, $E[X_t] = \mu t$. Está función influye en las trayectorias del proceso. Cabe considerar que las trayectorias son continuas y se pueden deducir de la normalidad de los incrementos y recurriendo al Teorema de continuidad de Kolmogorov.

Si X_t es un movimiento Browniano con deriva μ y coeficiente de difusión σ , entonces el proceso Y_t definido por

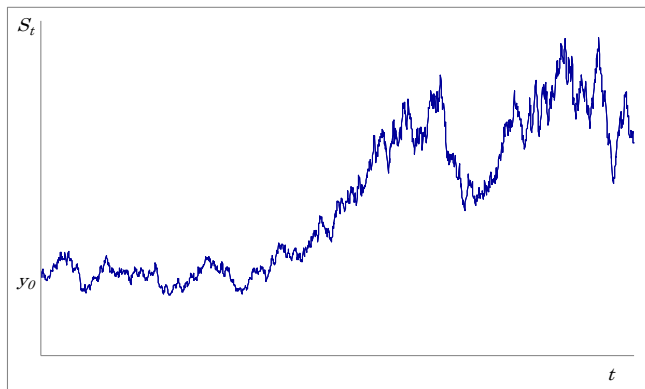
$$Y_t = e^{X_t} = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad [1.16]$$

se denomina *movimiento Browniano geométrico*. Para un t fijo, la *v.a.* Y_t tiene una distribución lognormal con media μt y varianza $\sigma^2 t$.²³ La definición anterior se puede generalizar en la siguiente ecuación

$$Y_t = Y_0 e^{X_t}, \quad [1.17]$$

donde Y_0 puede ser una *v.a.*²⁴ A continuación se presentan gráficamente el movimiento Browniano y el movimiento Geométrico Browniano.

Gráfica 1.1. Movimiento Browniano



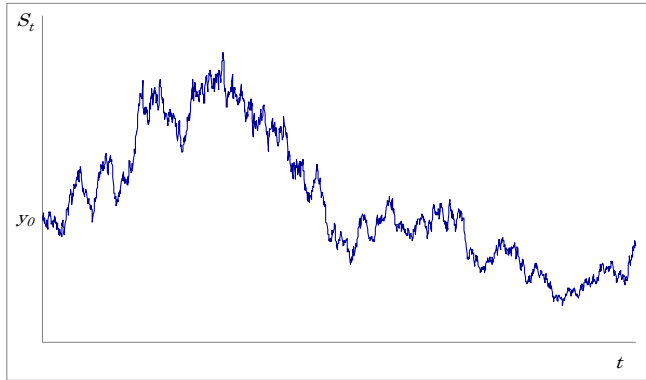
Fuente. Elaboración propia.

²³ En esencia se puede plantear que $\ln(Y_t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

²⁴ Si W_t es un movimiento Browniano con respecto a una filtración \mathcal{F}_t , entonces cumple con lo siguiente:

- a) W_t es una \mathcal{F}_t -martingala,
- b) $(W_t^2 - t)$ es una \mathcal{F}_t -martingala,
- c) $\left(\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \right)$ es una \mathcal{F}_t -martingala.

Gráfica 1.2. *Movimiento Geométrico Browniano*



Fuente. Elaboración propia.

1.3.2. Integral estocástica

El cálculo estocástico considera una de sus bases el concepto de integral estocástica; este concepto fue desarrollado por Kiyosi Itô en 1944 en un artículo *Stochastic Integral*, publicado en la Academia Imperial de Tokio.²⁵

Itô expresa formalmente ecuaciones diferenciales del tipo

$$dX_t = \sigma X_t dW_t, \quad [1.18]$$

en ecuaciones integrales del tipo

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_t dW_t, \quad [1.19]$$

donde la integral con respecto a W_t se llama integral estocástica.²⁶

²⁵ Itô admitió que Norbert Wiener en 1934 fue el primero en definir la integral estocástica para integrandos no aleatorios, suaves y de cuadrado integrable, sin embargo, la teoría del cálculo se le atribuye a Itô por el desarrollo del caso general.

La integral estocástica cumple con las siguientes propiedades:

- a) Isometría de Itô: $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$.²⁷ Con esta condición se asegura que la integral esté bien definida.
- b) Propiedad de martingala: $f(s)$ es una martingala con respecto a la filtración \mathcal{F}_t^W .
- c) Linealidad: Para dos constantes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos procesos f y g , entonces:

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s)) dW_s = \alpha \int_0^t f(s) dW_s + \beta \int_0^t g(s) dW_s.$$

1.3.3. Lema de Itô

En cálculo estocástico es de especial importancia el Lema de Itô por dos razones: la primera permite determinar los parámetros de un proceso de Ito $Y(T)$ cuando éste depende de un proceso $X(t)$ de la misma naturaleza del que se conocen los parámetros; y segunda, la importancia de este resultado es el hecho de que permite (cuando se asocia a una situación de arbitraje) asociar a una ecuación diferencial estocástica, una ecuación en derivadas parciales.

Al Lema de Ito se le puede considerar como el “paso obligado” de todos los estudios que realizan modelación en tiempo continuo. Puesto que el valor de un activo financiero es una función de una o varias variables alea-

²⁶ En estricto sentido, el cálculo estocástico se enfoca en integrales y no en diferenciales, de hecho cuando se plantea una ecuación diferencial estocástica se busca encontrar solución a una integral estocástica.

²⁷ $\int_0^t E[f^2(s)] ds < \infty$. Está condición asegura que la varianza sea finita.

torias, la aplicación de este lema permite expresar el precio de ese activo a partir de las derivadas parciales de esta función.²⁸

En el cálculo tradicional,²⁹ cualquier función diferenciable $x(t)$ tal que $x(0) = 0$, cumple de forma general

$$x(t)^n = n \int_0^t x(s)^{n-1} dx(s). \quad [1.20]$$

Si se considera una función $y = f(S_t, t)$, es necesario obtener la diferencial de y . En el caso del cálculo clásico y de variables reales la diferencial se obtiene con los términos de primer orden, pues el producto de cantidades infinitesimales es de orden despreciable.³⁰

En este caso es necesario desarrollar hasta obtener los términos de segundo orden,

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} (dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right). \quad [1.21]$$

²⁸ De la misma manera, un razonamiento de arbitraje conduce a una segunda relación entre el precio del activo y las variables determinantes. A partir de estas dos relaciones es cuando el activo se puede valorar mediante la solución de una ecuación en derivadas parciales.

²⁹ Las integrales estocásticas tienen expresiones similares a las funciones diferenciables continuas $x(t)$, con un término adicional, que en el cálculo clásico no aparece y que en cálculo estocástico se conoce como correcciones de Itô.

³⁰ Se considera que el cuadrado de una cantidad infinitesimal $(dt)^2$, es una cantidad despreciable debido a que si una cantidad es muy pequeña, su cuadrado será más pequeño, considerando que t es una variable independiente, de manera general, $(dt)^n = 0$ si $n > 1$. En cálculo estocástico el cuadrado de una cantidad infinitesimal es significativa, $(dW_t)^2 = dt$.

Se considera de manera formal $(dW_t)^2 = dt$; al aplicar las reglas básicas de diferenciación estocástica³¹ se obtiene

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} [\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} [\mu^2(S_t, t)(dt)^2 + 2\mu(S_t, t)\sigma(S_t, t)(dt)(dW_t) + \sigma^2(S_t, t)(dW_t)^2] \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} [\mu(S_t, t)(dt)^2 + \sigma(S_t, t)(dt)(dW_t)] + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t. \quad [1.22]$$

Si se expresa este resultado de acuerdo a una integral estocástica, se tiene

$$y_t = y_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial S_u} \mu(S_u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) \right) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} \sigma(S_u, u) dW_u. \quad [1.23]$$

Los resultados anteriores son conocidos como el *Lema de Itô* en sus dos formas, diferencial e integral, respectivamente. Con frecuencia, la integral estocástica se expresa como

³¹ Las reglas de diferenciación estocástica conocidas también como reglas empíricas de diferenciación estocástica se resumen de la siguiente manera

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

$$y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) (dW_t)^2. \quad [1.24]$$

Si se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para dos variables,

$$\begin{aligned} dS_{1t} &= \mu_1(S_{1t}, t)dt + \sigma_1(S_{1t}, t)dW_{1t} \\ dS_{2t} &= \mu_2(S_{2t}, t)dt + \sigma_2(S_{2t}, t)dW_{1t} \end{aligned} \quad [1.25]$$

con

$$Cov(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt.$$

Se define la función $y = f(S_{1t}, S_{2t}, t)$, entonces, el lema de Itô se puede plantear de la siguiente manera

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} dS_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} dS_{2t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2} (dS_{1t})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2} (dS_{2t})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t} \partial t} dS_{1t} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t} \partial t} dS_{2t} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} dS_{1t} dS_{2t} \right) \right]. \end{aligned} \quad [1.26]$$

Usando el sistema de ecuaciones y las reglas básicas de diferenciación estocástica, se obtiene,

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} \mu_1(S_{1t}, t) + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} \mu_2(S_{2t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2} \sigma_1^2(S_{1t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2} \sigma_2^2(S_{2t}, t) + \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma_1(S_{1t}, t) \sigma_2(S_{2t}, t) \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}} \sigma_1(S_{1t}, t) dW_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}} \sigma_2(S_{2t}, t) dW_{2t}. \end{aligned} \quad [1.27]$$

Si se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para el cociente dos variables,

$$\begin{aligned} dS_{1t} &= \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t} \\ dS_{2t} &= \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{1t} \end{aligned} \quad [1.28]$$

con

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt.$$

y

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Se define la función $y = f(S_{1t}, S_{2t}) = \frac{S_{1t}}{S_{2t}}$, en este caso, se tiene,

$$\frac{\partial y}{\partial S_{1t}} = \frac{1}{S_{2t}}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t}^2} = 0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial S_{2t}} = -\frac{S_{1t}}{S_{2t}^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{2t}^2} = \frac{2S_{1t}}{S_{2t}^3};$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} = -\frac{1}{S_{2t}^2}.$$

El Lema de Itô se puede plantear de la siguiente manera

$$\frac{d\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right) \partial y}{\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right)} = (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2 - \sigma_{12}) dt + \sigma_1 dW_{1t} - \sigma_2 dW_{2t}, \quad [1.29]$$

ó

$$d\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right) = \frac{S_{2t}dS_{1t} - S_{1t}dS_{2t}}{S_{2t}^2} + (\sigma_2^2 - \sigma_{12})dt. \quad [1.30]$$

1.3.4. Teorema de Radon-Nicodyn

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde \mathcal{F} es una σ -álgebra separable y Q una medida finita sobre (Ω, \mathcal{F}) absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} . Entonces existe $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

$$Q(A) = \int_A X d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}. \quad [1.31]$$

En este caso, X , que es única, es llamada la derivada de Radon-Nikodym de Q con respecto a \mathbb{P} sobre (Ω, \mathcal{F}) , y se escribe como $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = X$.

1.3.5. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck³²

Uno de los conceptos más importantes en tiempo continuo de los procesos estocásticos es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Considere el siguiente planteamiento para x_t ,

$$x_t = \mu r_t - \mu b, \quad [1.32]$$

³² El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es también llamado caminata aleatoria *elástica*, es decir, un proceso de Markov con incrementos normalmente distribuidos. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck a diferencia del movimiento Browniano o caminata aleatoria tiene una distribución de probabilidad estacionaria.

entonces, se puede plantear la siguiente ecuación diferencial

$$dx_t = -\mu x_t dt + \sigma dW_t. \quad [1.33]$$

A la ecuación anterior se le conoce como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. De manera particular, la solución de este proceso es similar al de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, si se considera que $f(x, t) = xe^{\mu t}$, usando el lema de Itô, $y_t = x_t e^{\mu t}$, se tiene

$$\begin{aligned} dy_t &= \mu x_t e^{\mu t} dt + e^{\mu t} x_t \\ &= -x_t e^{\mu t} dt + \mu x_t e^{\mu t} dt + \sigma e^{\mu t} dW_t \\ &= \sigma e^{\mu t} dW_t. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$y_t = y_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s, \quad [1.34]$$

y

$$x_t = x_0 e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s. \quad [1.35]$$

2. Volatilidad: medida de riesgo

2.1. Introducción

En los últimos años, el concepto de volatilidad ha adquirido gran importancia en los mercados financieros, siendo para la mayoría un sinónimo de riesgo, en particular para los encargados de la toma de decisiones inmediatas, se entiende como una medida de riesgo que contempla los cambios en los rendimientos de los activos financieros, con gran sensibilidad a cualquier *innovación* en el mercado, información nueva de índole social, política o económica, en especial de políticas que impactan en la monetaria y fiscal.

En el modelo de Black-Scholes la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene como un parámetro constante a través del tiempo. Sin embargo, la evidencia empírica ha descubierto que los rendimientos de los activos financieros muestran presencia de volatilidad no constante.³³ En un esfuerzo por identificar y reproducir las características empíricas de las series financieras, diversos tipos de modelos se han desarrollado considerando procesos que evolucionan a través del tiempo, entre ellos se pueden mencionar los modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA(p , q)), los modelos Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicional (GARCH), los modelos de Volatilidad Estocástica³⁴, modelos con cambios de régimen y modelos de umbrales entre otros, todos ellos se han

³³ El caso más típico de los modelos de volatilidad estocástica define a la volatilidad como un logaritmo con un proceso autorregresivo de primer orden, el cual es una aproximación en tiempo discreto de un proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck en tiempo continuo, véase Hull y White (1987), Scott (1987), Wiggins (1987) y Chesney y Scott (1989).

³⁴ Los modelos de volatilidad estocástica son revisados en Taylor (1994), Ruiz (1994), Ghysels, Harvey y Renault (1996) y Harvey y Shephard (1996).

propuesto y estimado como una extensión al modelo de Black-Scholes, al relajar el supuesto de volatilidad constante.

En el presente trabajo únicamente se consideraran los modelos de volatilidad estocástica. Los modelos se pueden clasificar en modelos en tiempo discreto y tiempo continuo. Entre los estudios que consideran modelos de volatilidad estocástica desarrollados y adaptados en tiempo discreto, se puede mencionar a Rubinstein (1976), Brennan (1979), Amin y Ng (1993), Duan (1995) y Heston y Nandi (2000). En el caso de trabajos que consideran modelos en tiempo continuo, se encuentran por ejemplo, Hull-White (1987 y 1988), Johnson y Shanno (1987), Wiggins (1987) Scott (1987, 1991, 1997), Chesney y Scott (1989), Melino y Turnbull (1990), Stein y Stein (1991), Heston (1993), Ball y Roma (1994) entre los más representativos.

2.2. Definición de volatilidad

La literatura financiera ofrece numerosas definiciones, en el presente trabajo consideraremos a la volatilidad como *una variable que mide la intensidad de los cambios aleatorios o impredecibles en los precios y/o en el rendimiento³⁵ futuro de los títulos financieros*. Dicha variable aleatoria sigue un proceso de difusión estocástico que es necesario modelar para describir su comportamiento a través del tiempo y posteriormente realizar una estimación.

³⁵ Si suponemos que P_t es el precio de un activo en el tiempo t , y que no hay dividendos, se define el rendimiento en un periodo de tiempo $t - 1$ a un tiempo t por

$$r_t = \ln \left[\frac{P_t}{P_{t-1}} \right].$$

El término volatilidad en la literatura financiera está asociado frecuentemente con los rendimientos y la varianza representados por dos ecuaciones diferenciales estocásticas³⁶

$$d\left(\ln\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \mu dt + \sigma dW_1, \quad [2.1]$$

y

$$d(\ln \sigma) = \phi dt + v_t dW_2, \quad [2.2]$$

donde W_1 y W_2 son dos procesos de Wiener estándar con correlación $\rho = dW_1 dW_2$ y $v_t = \sigma^2$. Cuando μ y σ son constantes, r_t tiene una distribución normal estándar expresada como

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t, \quad [2.3]$$

con $\varepsilon_t \sim \mathcal{N} iid(0, 1)$. La ecuación puede generalizarse reemplazando σ por una variable aleatoria positiva σ_t dada por

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t. \quad [2.4]$$

Siempre que el proceso de los rendimientos $\{r_t\}$ pueda representarse por [2.4], se le conocerá como volatilidad estocástica para el periodo t .

³⁶ La primera ecuación que considera la existencia de una ecuación diferencial estocástica se remonta a 1900, Louis Bachelier plantea un modelo donde la σ representaba la fluctuación del activo

$$dy_t = \sigma dW_t, \quad \text{donde } \sigma > 0.$$

El proceso estocástico $\{\sigma_t\}$ genera la volatilidad *realizada* $\{\sigma_t^*\}$, la cual en general no es observable (variable latente).³⁷ Para cualquier realización σ_t^* ,

$$\{r_t | \sigma_t\} = \sigma_t^* \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_t^{*2}).^{38}$$

En el caso de la varianza condicional para el periodo t , dado un conjunto de rendimientos se tiene que $X_{t-1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}\}$, donde

$$h_t = \text{var}(r_t | X_{t-1}).$$

En general, la variable aleatoria H_t que genera la varianza condicional h_t no es igual a σ_t^2 .

2.3. Características de las series de tiempo financieras

Las características que empíricamente se han observado en las series de tiempo financieras, también conocidos como *hechos estilizados*, tienen los siguientes rasgos comunes asociados con la volatilidad:

- a) *Exceso de curtosis*. De manera típica se pueden observar estadísticos con valores superiores a 3, es decir, distribuciones leptocúrticas. Mandelbrot (1963) y Fama (1995).
- b) *Comportamiento asimétrico*. Es frecuente encontrar correlaciones negativas entre rendimiento y volatilidad, al considerar bajos rendi-

³⁷ Taylor (1986) y Harvey y Shephard (1996) suponen que el rendimiento, r_t depende de una variable latente que sigue un proceso estocástico ARMA que se expresa como

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, 1).$$

³⁸ Una mezcla de distribuciones condicionales normales definen la distribución condicional de r_t , que tiene exceso de curtosis siempre que los rendimientos tengan varianza positiva y sean independientes de u_t .

mientos se tienen altas volatilidades, al considerar altos rendimientos se tienen bajas volatilidades, es decir, respuestas contrarias de la volatilidad.³⁹ Nelson (1991), Campbell y Hentschel (1992), Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) y Engle y Ng (1993).

- c) *Periodos de alta y baja volatilidad*⁴⁰. Son conocidos como *conglomerados* de volatilidad, tienden a mantener la misma trayectoria en el futuro. Cambios pequeños generan volatilidades bajas y cambios grandes generan volatilidades altas. Mandelbrot (1963), Engle (1982), Chou (1988), Schwert (1989).
- d) *Movimientos conjuntos de la volatilidad*⁴¹. Los movimientos de los activos financieros en diferentes mercados están relacionados con movimientos importantes de activos del mismo tipo. Aydemir (1998).
- e) *Incorporación de información en el mercado*.⁴² La nueva información (acontecimientos repentinos o inesperados) de los mercados financieros también llamados *shocks*, pueden generar cambios en la volatilidad. Asimismo, se puede obtener información relevante en el momento de la realización de las transacciones (tiempo, volumen, entre otros). Hasbrouck (1991), Andersen y Bollerslev (1998).

Cuando se consideran acciones como activos subyacentes, se identifican las siguientes características que determinan los movimientos en la volatilidad:

³⁹ En la literatura econométrica se conoce como efecto *leverage* o apalancamiento.

⁴⁰ De manera general, los periodos de alta o baja volatilidad tienden a estar precedidos de periodos en los que la volatilidad es moderada a largo plazo, véase Hsieh (1995) y Figlewski (1997). También existe evidencia de que el mercado realiza *correcciones* ante incrementos repentinos en los rendimientos o en el riesgo.

⁴¹ Característica que permite analizar relaciones cruzadas en modelos multivariados de series de tiempo.

⁴² Los trabajos de Hamao, Masulis y Ng (1990), Bae y Karolyi (1994), Koutmos y Booth (1995), consideran la transmisión de información vía volatilidad entre mercados bursátiles internacionales.

- a) *Cambios en el precio de la acción*. Black (1976), Cox y Ross (1976), Geske (1979a), Beckers (1980) y Christie (1982).
- b) *Incorporación de nueva información*. Press (1967), Merton (1976).
- c) *Innovaciones tecnológicas y/o fusiones y adquisiciones*. Se puede afectar la distribución de los rendimientos de las acciones de una empresa, y por tanto, su varianza, Macbeth y Merville (1980).
- d) *Nivel de apalancamiento*,⁴³ la volatilidad es una función creciente del apalancamiento financiero y sus movimientos impactan de manera directa, Christie (1982).
- e) *Variaciones de la tasa de interés*, las tasas tienen un fuerte efecto positivo sobre la volatilidad, en términos contables, el valor de la empresa es una función inversa de las tasas de interés, Christie (1982).
- f) *Nivel de negociación*, la volatilidad viene causada por la negociación en sí, de manera que el nivel de volatilidad es mayor cuando el mercado está en operación que cuando está cerrado, Fama (1995), French (1984) y French y Roll (1986).

2.4. Tipos de volatilidad

En la literatura financiera existe un concepto que toma en cuenta la *condicionalidad* de la varianza, es decir, la información acumulada hasta el tiempo t y permite diferenciar el comportamiento de la volatilidad, dicho concepto es la *heteroscedasticidad*⁴⁴.

La *homoscedasticidad* considera a la volatilidad como un parámetro y determina que no depende del tiempo, es decir es una constante, similar a

⁴³ Relación deuda/valor de mercado de los fondos propios.

⁴⁴ *Homoscedasticidad* o igual varianza, (*homo*: igual, *cedasticidad*: dispersión): supuesto básico del modelo de regresión lineal donde la varianza de cada término de error, u_t , condicionado a cada variable explicativa es un valor constante igual a σ^2 .

la volatilidad planteada en el modelo de Black-Scholes. En caso de existir *heteroscedasticidad*, se debe considerar un cálculo alternativo de la volatilidad, que considera que no es constante y además depende de su pasado.

Dicho lo anterior, la clasificación típica que la literatura financiera considera divide a la volatilidad en histórica, implícita y estocástica.

2.4.1. Volatilidad histórica

La volatilidad histórica también conocida como volatilidad realizada es la desviación estándar del rendimiento del activo subyacente, para el presente trabajo se consideran el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

La desviación estándar se calcula

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2}, \quad [2.5]$$

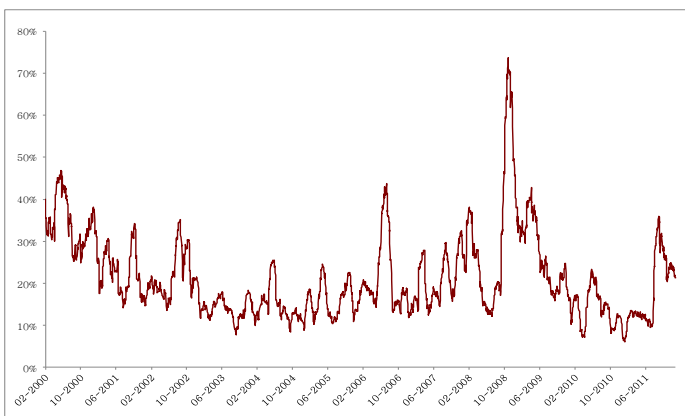
donde:

r_i : rendimientos del activo subyacente en el momento i .

μ : media de la distribución muestral de rendimientos.

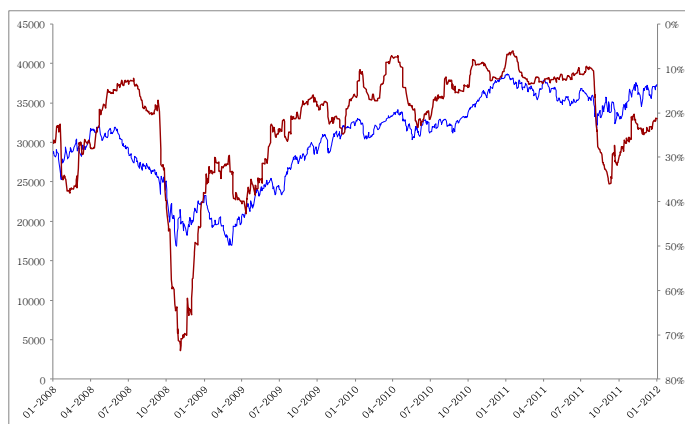
Para el cálculo de la volatilidad histórica diaria, para el IPC se considera una ventana de 252 días efectivos de actividad bursátil, y se obtiene para un periodo de 28 días.

Gráfica 2.1. *Volatilidad histórica del IPC, 2000-2011*



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 2.2. *Volatilidad histórica del IPC, 2008-2011*



Fuente. Elaboración propia.

En el caso de México, el 5 de noviembre de 2008 se presentó la volatilidad más alta en el periodo de análisis, 73.64%, volatilidad ocasionada por la crisis financiera en Estados Unidos⁴⁵ que afectó la economía mundial. En

⁴⁵ Oficialmente la crisis financiera en Estados Unidos inició en agosto de 2007, crisis que se agudizó y extendió en 2008 y sus consecuencias aún están presentes. El sistema

cuanto al crecimiento económico, el PIB cayó un 2.42% en el último trimestre de 2008 y un 6.45% en el primer trimestre de 2009. La volatilidad más pequeña se presenta el 18 de enero de 2011, periodo más estable económicamente hablando en México.

Aunque en un principio Black-Scholes utilizaron la volatilidad histórica para su modelo, pronto observaron algunas desventajas:

- a) se pondera el pasado inmediato en la misma magnitud que el pasado lejano, lo que ocasiona que los altibajos en la volatilidad sean desproporcionados, sobre todo cuando se consideran valores extremos.
- b) la ausencia del término independiente genera subestimación del riesgo, ya que si los precios en dos periodos permanecen constantes, la volatilidad sería cero, pues los rendimientos son cero.⁴⁶
- c) el modelo tiende a sobrevalorar opciones con volatilidades altas e infravalorar aquellas con volatilidades bajas.

Sin embargo, a pesar de sus desventajas, su sencillez permite de manera rápida obtener una volatilidad de referencia que permite protegerse de los vaivenes del mercado, con lo que su cálculo no está en desuso, incluso existen alternativas que mejoran su capacidad de pronóstico.

crediticio e hipotecario trajo consigo la bancarrota de innumerables bancos, Lehman Brothers por ejemplo, entidades financieras y aseguradoras, AIG por ejemplo, y las empresas inmobiliarias Fannie Mae y Freddie Mac.

⁴⁶ Cox y Rubinstein (1985) propusieron la volatilidad histórica *corregida* que obtiene un estimador insesgado, al modificar la varianza y la desviación estándar de la siguiente manera

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 \quad \text{y} \quad \sigma = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}n - 1\right)!} \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

donde $x!$ es la función gamma, definida como

$$\int_0^{\infty} e^{-v} v^x dx.$$

Estimar la volatilidad histórica utilizando periodos inferiores, por ejemplo, el cálculo de la volatilidad histórica semanal utilizando datos diarios, es una extensión que podría considerarse como recomendación propuesta y utilizada por French, Schwert y Stambaug (1987) o Schwert (1989).

Existen otras alternativas que consideran estimar la volatilidad histórica intradía. Parkinson (1980), Garman y Klass (1980), Beckers (1983) y Kunitoro (1992) consideran que en un día de negociación los precios oscilan y ese comportamiento debe ser rescatado y utilizado como información importante, de acuerdo a Garman y Klass (1980)⁴⁷ este estimador es cinco veces más eficiente. La forma funcional de la varianza es

$$\sigma^2 = \frac{0.361}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2, \quad [2.6]$$

donde:

A_i : precio máximo

B_i : precio mínimo

2.4.2. Volatilidad implícita

Latané y Rendleman (1976) fueron los primeros en considerar este tipo de volatilidad en el análisis de opciones call para veinticuatro empresas que negociaban en el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE)⁴⁸. La volatilidad implícita se define como la volatilidad estimada que iguala el precio de mercado de una opción con su valor teórico utilizando un método de valua-

⁴⁷ Estos autores también proponen otra forma de estimar la volatilidad histórica considerando los precios de cierre, con lo cual el estimador es ocho veces más eficiente, que la volatilidad histórica típica, la forma funcional para la varianza es

$$\sigma^2 = 0.511(A_i - B_i)^2 - 0.019[(C_t - C_{t-1})(A_i + B_i - 2C_t) - 2(A_i - C_t)(B_i - C_t)] - 0.383(C_t - C_{t-1})^2.$$

⁴⁸ En 1972 se funda el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) en Estados Unidos.

ción, los modelos de Black-Scholes y, Cox, Ross y Rubinstein han sido los más utilizados en la literatura financiera. Esta volatilidad de mercado, al igual que la volatilidad histórica es una estimación de mercado, considerada también como una estimación de la *volatilidad futura*⁴⁹.

Bajo los supuestos de Black-Scholes, la volatilidad implícita se interpreta como la estimación de mercado. Si se supone que la volatilidad implícita tiene un comportamiento determinístico a través del tiempo, se interpreta como la volatilidad media de mercado durante la vida de la opción.

En esencia, la volatilidad implícita es una alternativa para obtener la volatilidad de un activo subyacente considerando su rendimiento y las opciones asociadas a dicho activo, sin embargo, pueden existir innumerables opciones sobre el mismo activo pero con diferentes precios de ejercicio, diferentes vencimientos en diferentes mercados, por lo que es factible obtener muchas volatilidades implícitas calculadas con el mismo modelo pero que serán diferentes por los factores asociados a cada opción (tasa de interés, precio de la opción, tiempo de vencimiento, tipo de opción). En la literatura se recomienda obtener las volatilidades para cada tipo de opción con características definidas y posteriormente calcular una media ponderada como estimación de la volatilidad futura.

En México existe un indicador que permite conocer la volatilidad implícita. El Índice de Volatilidad México (VIMEX)⁵⁰, recoge los precios de los contratos de las opciones que se cotizan en momentos del tiempo definidos

⁴⁹ Volatilidad considerada como desconocida y aproximada con modelos de todo tipo, haciendo uso de herramientas econométricas, métodos numéricos, procesos estocásticos en tiempo continuo, entre otros que permitan encontrar una *volatilidad adelantada de mercado*.

⁵⁰ El Mercado de Derivados (MexDer) construyó el VIMEX con la metodología desarrollada por Fleming, Jeff; Ostdiek, Barbara y Whaley, Robert E. (1995): "Predicting Stock Market Volatility: A New Measure", en *The Journal of Futures Markets*, vol. 15, núm. 3, págs. 265-302.

en los mercados financieros, con los cuáles se pueden identificar las expectativas de los agentes participantes, es decir, la *volatilidad esperada* o la *volatilidad futura*.

El VIMEX calcula la volatilidad implícita a través de 8 opciones (call y put por abajo y por arriba del IPC al cierre de mercado) del IPC listadas en el MexDer durante 66 días hábiles de mercado, supone que todas las variables implicadas son conocidas: precios de ejercicio, nivel del IPC de contado al cierre de mercado, precios de liquidación de las primas de las opciones, curva de tasas de interés, tiempo al vencimiento, siendo la volatilidad la única desconocida.

El VIMEX se calcula en tres pasos:

Paso 1. Se define $\sigma_{i,j,k}$ como la volatilidad implícita y se promedian los pares de opciones a los vencimientos más cercanos.

Vencimiento más cercano:
$$\sigma_{1,A} = \frac{(\sigma_{C,1,A} + \sigma_{P,1,A})}{2}; \quad \sigma_{1,B} = \frac{(\sigma_{C,1,B} + \sigma_{P,1,B})}{2}.$$

Vencimiento siguiente más cercano:
$$\sigma_{2,A} = \frac{(\sigma_{C,2,A} + \sigma_{P,2,A})}{2}; \quad \sigma_{2,B} = \frac{(\sigma_{C,2,B} + \sigma_{P,2,B})}{2}.$$

Paso 2. Encontrar la volatilidad implícita del precio de ejercicio *at-the-money* interpolando las volatilidades implícitas obtenidas en el Paso 1.

$$\sigma_1 = \sigma_{1,A} \left(\frac{S - K_B}{K_A - K_B} \right) + \sigma_{1,B} \left(\frac{K_A - S}{K_A - K_B} \right),$$

y

$$\sigma_2 = \sigma_{2,A} \left(\frac{S - K_B}{K_A - K_B} \right) + \sigma_{2,B} \left(\frac{K_A - S}{K_A - K_B} \right).$$

Paso 3. Se parametriza la fórmula ponderando los periodos de vencimiento y crean periodos constantes de 22 días hábiles por cada mes y 66 por cada trimestre.

$$\text{VIMEX} = \sigma_1 \left(\frac{T_2 - 66}{T_2 - T_1} \right) + \sigma_{2,B} \left(\frac{66 - T_1}{T_2 - T_1} \right), \quad [2.7]$$

donde:

$$i = \begin{cases} c: \text{ call} \\ p: \text{ put.} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1: \text{ vencimiento más cercano} \\ 2: \text{ vencimiento siguiente más cercano.} \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} A: \text{ por arriba } (K > S) \\ B: \text{ por abajo } (K < S). \end{cases}$$

K_A : precio que se encuentra por arriba del nivel del IPC al cierre de mercado.⁵¹

K_B : precio que se encuentra por abajo del nivel del IPC al cierre de mercado.

S : nivel de cierre del IPC en el mercado de capitales.

T_1 : días de operación restantes al vencimiento de la opción más cercana a la fecha de cálculo del VIMEX.

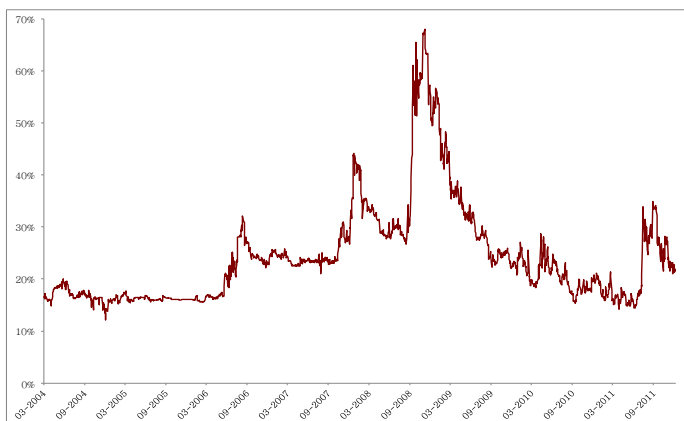
T_2 : días de operación restantes del siguiente vencimiento más cercano de la opción a la fecha de cálculo del VIMEX.

A continuación se presenta en la gráfica 2.3. la evolución de la volatilidad implícita en México, expresado por el índice de volatilidad México (Vimex).

En la gráfica 2.4. se presenta superpuesta con respecto al IPC.

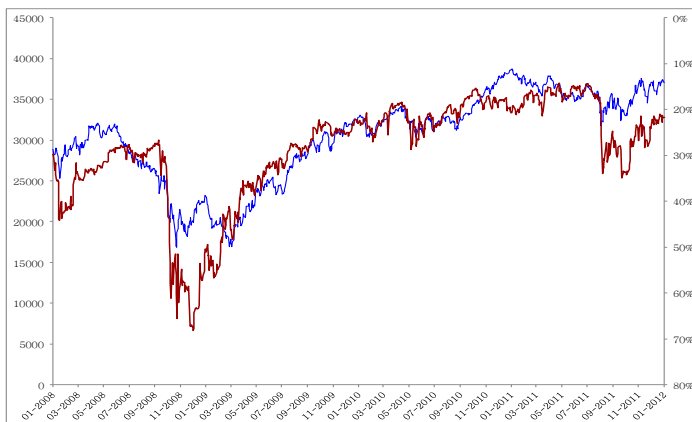
⁵¹ En caso de que el precio de ejercicio no estuviera listado, se tomará el precio de ejercicio más cercano al IPC al cierre de mercado que en ese momento se encuentre listado en MexDer.

Gráfica 2.3. *Volatilidad implícita de México (Vimex), 2004-2011*



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 2.4. *IPC y volatilidad implícita (Vimex), 2008-2011*



Fuente. Elaboración propia.

2.4.3. Volatilidad estocástica

Los modelos de volatilidad estocástica han recibido gran atención en literatura financiera, en términos teóricos con planteamientos cada vez más complejos como en términos empíricos utilizando técnicas econométricas

sofisticadas. En particular los modelos de volatilidad estocástica, expresan la volatilidad como el proceso de una variable aleatoria no observable (variable latente) modelándola con el comportamiento de los rendimientos. El modelo de volatilidad estocástica más simple es el que considera los siguientes supuestos:⁵²

i) los procesos de la variable latente y de los rendimientos está guiado por una distribución normal,

ii) no hay correlación entre los dos procesos.

Asimismo, los modelos teóricos que consideran la valuación de opciones se formulan mediante ecuaciones diferenciales estocásticas que pueden considerar formas funcionales en tiempo continuo o en tiempo discreto como una aproximación. En ambos casos se puede considerar una generalización del comportamiento de la volatilidad. Scott (1987), Wiggins (1987) y Chesney y Scott (1989) suponen que el logaritmo de la volatilidad sigue el siguiente proceso Ornstein-Uhlenbeck⁵³:

$$d\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \alpha dt + \sigma dW_1, \quad [2.8]$$

y

$$d(\ln \sigma) = \lambda(\xi - \ln \sigma) dt + \gamma dW_2, \quad [2.9]$$

con

$$dW_1 dW_2 = \rho dt,$$

⁵² La relajación de los dos supuestos considera la existencia de posible asimetría y leptocurtosis en la distribución de los rendimientos.

⁵³ Véase Taylor (1994), Jiang (1998), Yu, Yang y Zhang (2002) y Ruiz y Veiga (2008).

donde $\alpha, \lambda, \xi, \gamma$ y ρ son parámetros constantes y W_1 y W_2 son dos procesos de Wiener estándar. Con esta especificación se pueden agrupar cuatro procesos de σ_t que se han utilizado en la literatura

$$d\sigma = \lambda(\xi - \sigma) dt + \gamma dW_2, \quad [2.10]$$

$$d\sigma = \lambda\sigma(\xi - \sigma) dt + \gamma\sigma dW_2, \quad [2.11]$$

$$d\sigma = \lambda\sigma dt + \gamma\sigma dW_2, \quad [2.12]$$

$$d\sigma = \sigma^{-1}\lambda(\xi - \lambda\sigma^2) dt + \gamma dW_2. \quad [2.13]$$

Stein y Stein (1991) y Heston (1993) dan una solución cerrada para la valuación de opciones considerando las ecuaciones [2.10] y [2.13]. Hull y White (1987) utilizan la ecuación [2.11]. Hull y White (1987) y Johnson y Shanno (1987) consideran la ecuación [2.12] y Hull y White (1988) evalúan la simetría de los precios utilizando la ecuación [2.13]. Bailey y Stulz (1989) y Scott (1992) ofrecen resultados de equilibrio general usando la ecuación [2.13].

Wiggins (1987), Taylor (1986), Chesney y Scott (1989) y Duffie y Singleton (1993), Amin y Ng (1993), Andersen (1994), Kim, Shephard y Chib (1998) utilizan una aproximación en tiempo discreto para estimar la volatilidad planteando las siguientes ecuaciones en logaritmos⁵⁴

⁵⁴ Ambos procesos se modelan en logaritmos para evitar imponer restricciones en los parámetros que garanticen que σ_t^2 sea positiva en el cualquier momento. También son necesarios los logaritmos para capturar los comportamientos asimétricos en la distribución de la volatilidad considerando que la ocurrencia de volatilidades altas es menor que la ocurrencia de volatilidades bajas.

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + \mu + \sigma_{t-1} \varepsilon_t, \quad [2.14]$$

y

$$\ln \sigma_t = \alpha + \phi [\ln \sigma_{t-1} - \alpha] + \theta \nu_t, \quad [2.15]$$

donde μ, α, ϕ , y θ son parámetros constantes; ε_t y ν_t son independientes e idénticamente distribuidos (*iid*) bajo una distribución normal bivariada, y tienen correlación ρ . El logaritmo de la volatilidad sigue un proceso estacionario AR(1) donde $0 < \phi < 1$ y una caminata aleatoria cuando $\phi = 1$.⁵⁵

Los modelos de volatilidad estocástica construidos como una aproximación discreta, se obtienen reparametrizando las medidas de localización y producen modelos con distribuciones lognormales⁵⁶ utilizando por ejemplo la aproximación de Euler-Maruyama⁵⁷ y su forma funcional es

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad [2.16]$$

y

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \phi [\ln \sigma_{t-1}^2 - \alpha] + \sigma \nu_t, \quad [2.17]$$

⁵⁵ El logaritmo de los precios sigue una caminata aleatoria con la varianza como condicionante de la innovación en el tiempo, véase Taylor (1994).

⁵⁶ Autores como Ruiz (1994), Harvey, Ruiz y Shephard (1994), Sandmann y Koopman (1998), Lisenfeld y Jung (2000) y Asai (2008) suponen que ε_t se distribuye como una distribución t de Student. La forma funcional sería la siguiente:

$$r_t = \sigma^* \sigma_t \sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t, \\ \ln \sigma_t^2 = \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma \nu_t,$$

donde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}iid(0, 1)$ y $\lambda_t \sim iid$ con distribución mixta en escala e independiente de ε_t y ν_t .

⁵⁷ Método numérico que permite encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas cuando no tienen soluciones analíticas o no es posible determinar la distribución teórica del activo subyacente, como en este caso. En esencia, el método realiza una aproximación en tiempo discreto del proceso de Wiener.

donde r_t es el rendimiento compuesto continuamente, $(\varepsilon_t, \nu_t) \sim iid \mathcal{N}(0, 1)$
 $\text{con}(\varepsilon_t, \nu_{t+1}) = \rho$.

El modelo también se representa frecuentemente en la literatura que considera evidencia empírica como

$$r_t = e^{\left(\frac{1}{2}h_t\right) \varepsilon_t}, \quad [2.18]$$

y

$$h_t = \alpha + \phi(h_{t-1} - \alpha) + \sigma_\nu \nu_t, \quad [2.19]$$

donde $h_t = \ln \sigma_t^2$.

Las especificaciones de los modelos más representativos que estiman la volatilidad estocástica se puede revisar en el Anexo 1.

Los modelos de volatilidad también se pueden dividir en modelos de volatilidad determinista y modelos de volatilidad estocástica. Los primeros consideran una función para la varianza condicional, estos modelos son llamados Modelos Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicional, modelos tipo ARCH, entre los principales trabajos podemos mencionar a Andersen (1994), Heston y Nandi (2000), Barndorff-Nielsen y Shephard (2002), Meddahi y Renault (2000). En los segundos, la ecuación de la varianza tiene su propio componente de innovación, entre los principales podemos mencionar a Hull y White (1987), Wiggins (1987), Scott (1987), Johnson y Shanno (1987), Bailey and Stulz (1989), Chesney y Scott (1989),

Melino y Turnbull (1990), Stein y Stein (1991), Heston (1993).⁵⁸ En el capítulo 4 se expondrán ambos modelos para estimar la volatilidad.

Los modelos GARCH y de volatilidad estocástica están definidos por las ecuaciones de sus primeros momentos: media y varianza. La forma funcional más general de estas ecuaciones se definen de la siguiente forma

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad [2.20]$$

y

$$\mu_t = \alpha + \sum_{i=1}^k b_i x_{i,t} \quad [2.21]$$

donde

μ_t : la media condicional que depende de una constante α y los coeficientes de regresión b_1, \dots, b_k . Las variables explicativas $x_{i,t}$ pueden considerar variables exógenas rezagadas y variables dependientes.

ε_t : término de error, $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$.

r_t : rendimientos del activo.

σ_t : volatilidad, aparece multiplicada por un proceso ruido blanco en la ecuación ajustada de la media.

⁵⁸ Entre los trabajos que recopilan este tipo de modelo véanse Bollerslev, Chou y Kroner (1992), Bera y Higgins (1993), Bollerslev, Engle y Nelson (1995), Palm (1996) y Gouriéroux (1997).

3. Valuación de opciones con volatilidad

3.1. Introducción

La valuación de opciones se remonta al año de 1900, con el trabajo seminal de Louis Bachelier, sin embargo, el desarrollo del mercado de derivados y en especial la negociación de las opciones⁵⁹ inició el 16 de abril de 1973 en Estados Unidos con la negociación de 911 contratos⁶⁰ (opciones call) sobre 16 activos subyacentes y cuatro años más tarde con la operación de opciones put.⁶¹ Sin embargo es en la década de los ochenta cuando las opciones empiezan a jugar un papel primordial en el devenir del sistema financiero mundial en el CBOE⁶², en el que 10 años después se realizaban contratos por 200 millones de dólares en opciones listadas en el índice industrial Dow Jones. Actualmente representa más del 50% de las opciones negociadas en Estados Unidos y más del 90% de las opciones sobre índices.

El mercado mexicano de derivados, en cambio es relativamente joven, inicio sus operaciones el 15 de diciembre de 1998 listando contratos de futuros sobre el dólar, cuatro meses después, el 15 de abril, sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC); y el 26 de mayo, sobre Certificados de la Teso-

⁵⁹ En 1968 el *Chicago Board of Trade*, mejor conocido por sus contratos de futuros, realizó un estudio para ofrecer contratos de futuros sobre acciones, sin embargo, los resultados proponían realizar opciones sobre acciones.

⁶⁰ El volumen promedio diario supera el millón de contratos en 2000 y en diciembre de 2008 alcanza los 4.7 millones de contratos diarios promedio, superando 1.2 billones de contratos al año.

⁶¹ Hasta ese momento es posible realizar coberturas con opciones de compra y opciones de venta, cabe mencionar que es en 1975 cuando se adopta el modelo de Black-Scholes de valuación de opciones.

⁶² El CBOE negociaba 10 millones de dólares diariamente en opciones sobre acciones a tan solo 5 años de iniciar operaciones. En 2005 el valor notional supero los 12 trillones de dólares.

rería (Cetes) a 91 días y Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIEE) a 28 días. Posteriormente, el 29 de julio, inician los contratos de futuros sobre acciones,⁶³ las operaciones que implican opciones sobre acciones se realizaron hasta 2003.⁶⁴ El mercado de opciones inició formalmente sus operaciones en marzo de 2004.

El mercado de derivados se divide en diversos instrumentos financieros, en el presente trabajo se utilizarán las *opciones* como elemento de análisis y valuación.

3.2. Definición y notación

Una *opción* es una oportunidad de comprar o vender una cantidad determinada de un bien (acción, divisa, tipo de cambio, tasa de interés, entre otros) a un precio preestablecido (precio de ejercicio, K) dentro de un periodo predeterminado. Existen dos tipos de opciones: opciones de compra (opciones *call*) y opciones de venta (opciones *put*).

Las opciones proporcionan a su propietario el derecho o la obligación de comprar o vender un activo a un precio determinado en un momento futuro. Es por ello que las opciones pueden ser consideradas como un seguro, pero el precio de este seguro depende de los riesgos y estos riesgos se miden a partir de la varianza de los rendimientos de los activos. Las opciones son los instrumentos más sencillos, flexibles y sofisticados, para administrar riesgos.

La notación que se utilizará será la siguiente, de acuerdo a las características básicas de una opción,

- a) el precio del activo subyacente hoy, S_0 , en la fecha de maduración S_T ,

⁶³ Entre las acciones que se negociaron se pueden mencionar a Banacce O, Cemex CPO, Femsa UDB, Gcarso A1, GFB o y Telmex L.

⁶⁴ En 1994 se negociaron opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, American Stock Exchange (AMEX) y New York Stock Exchange (NYSE).

- b) el precio de ejercicio (strike), K ,
- c) el valor del instrumento al vencimiento, *payoff*.⁶⁵

En la literatura especializada existen diferentes clasificaciones dependiendo de las variables involucradas. A continuación se presentarán de manera breve los tipos de opciones más comunes, clasificadas de acuerdo a la fecha de ejercicio se tienen las siguientes opciones:

- a) Europeas, opciones que se pueden ejercer únicamente al final de la vida de la opción, es decir, en la fecha de maduración.
- b) Americanas, opciones que se pueden ejercer en cualquier momento de su vida.⁶⁶
- c) Asiáticas, opciones cuyo valor en la fecha de vencimiento no depende del precio del activo subyacente en ese momento, sino de la media de sus precios en un período determinado de tiempo.
- d) Bermudas, opciones que pueden ser ejercidas en diversos momentos de su vida, con fechas establecidas desde su emisión hasta la fecha de su vencimiento. Es una opción híbrida entre las opciones europeas y americanas.

3.3. Opciones de primera generación⁶⁷: *Plain Vanilla*

Bajo esta concepción se pueden identificar dos tipos de opciones: la opción de compra (opción *call*) y la opción de venta (opción *put*).

⁶⁵ En la valuación de cualquier derivado lo que siempre se conoce es el *pago final*.

⁶⁶ En la actualidad, las transacciones en su mayoría consideran opciones americanas.

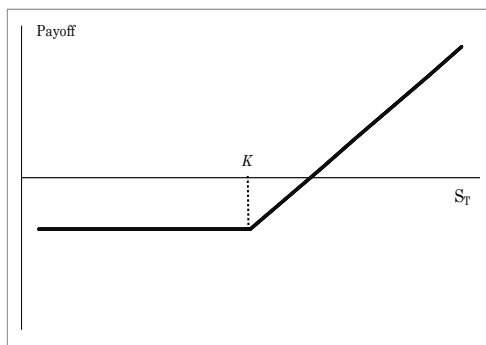
⁶⁷ Las *opciones sintéticas* son consideradas las opciones de segunda generación. Son combinaciones de dos o más contratos tradicionales (precio de ejercicio fijo y valor dependiente del precio del activo subyacente en la fecha de ejercicio): futuros-forwards, opciones y swaps. Las *opciones exóticas* son denominadas opciones de tercera generación, aunque algunos suelen considerarlas también de segunda generación. Se consideran opciones exóticas todas aquellas que consideran un valor diferente al valor de una opción call o put europea. Entre las principales se encuentran las opciones digitales, opciones barrera, opciones sobre el subyacente, opciones sobre el activo, opciones *lookback*.

La opción de compra u opción *call* es el derecho, más no la obligación, de comprar cierta cantidad de un activo a un determinado precio, para ejercerse durante cierto periodo. Este derecho se adquiere a cambio del pago de una prima o precio.⁶⁸ En este caso el payoff es

$$call: \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & \text{si } S_T \geq K \\ 0, & \text{si } S_T < K. \end{cases} \quad [3.1]$$

A continuación se presentan los perfiles de riesgo, también conocidos como perfiles de ganancias para el comprador (posición larga) y vendedor (posición corta) de una call. En la gráfica 3.1., la posición larga, supone que el comprador de una opción call tiene un riesgo conocido y limitado de pérdidas, y una posibilidad desconocida e ilimitada de ganancias.

Gráfica 3.1. *Call larga*

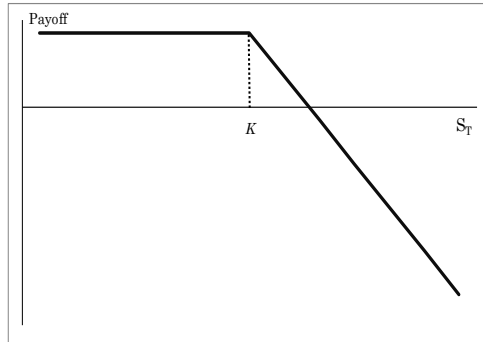


Fuente. Elaboración propia.

En la gráfica 3.2., la posición corta, supone que el vendedor de una opción call tiene una posibilidad de ganancia conocida anticipada y limitada, una posibilidad de pérdida desconocida e ilimitada.

⁶⁸ *Precio* de una opción es equivalente a *prima* de una opción.

Gráfica 3.2. Call corta



Fuente. Elaboración propia.

La opción de venta u opción *put*, es el derecho, más no la obligación, de vender una cierta cantidad de un activo, a un precio determinado, el cual se ejerce durante un lapso de tiempo. Para adquirir este derecho se debe pagar una prima. El payoff de una opción de venta es

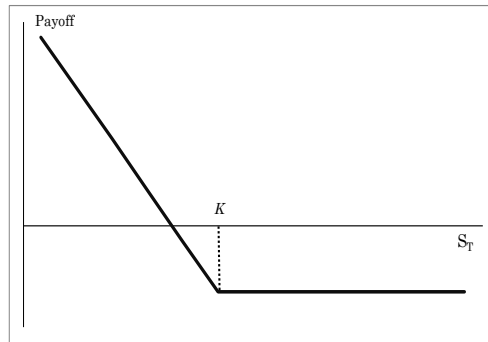
$$put: \max \{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+ == \begin{cases} K - S_T, & \text{si } K \geq S_T \\ 0, & \text{si } K < S_T. \end{cases} \quad [3.2]$$

A continuación se presentan los perfiles de riesgo o perfil de ganancias para el comprador y vendedor de una put.

En la gráfica 3.3., la posición larga, supone que el comprador de una opción put que tiene un riesgo conocido y pérdida limitada, y una posibilidad desconocida e ilimitada de ganancias.

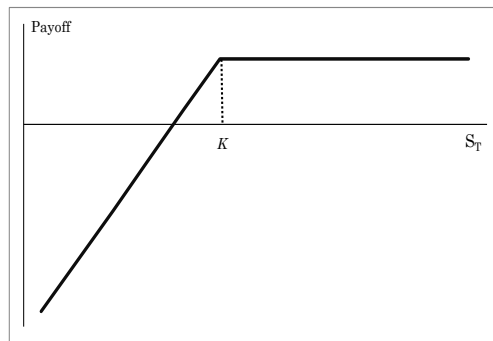
En la gráfica 3.4., la posición corta, supone que el vendedor de una opción put tiene una posible ganancia conocida y limitada, y una posible pérdida desconocida e ilimitada.

Gráfica 3.3. Put larga



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 3.4. Put corta



Fuente. Elaboración propia.

Para la determinación del precio de las opciones se deben de considerar las siguientes variables básicas:⁶⁹

- a) plazo al vencimiento,
- b) precio del bien subyacente *versus* el precio de ejercicio de la opción,
- c) volatilidad del precio del bien subyacente.

⁶⁹ También es frecuente encontrar que se consideren la tasa de interés y los dividendos en la determinación del valor de una opción.

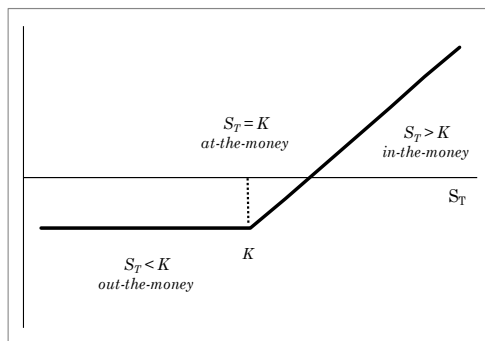
3.3.1. Plazo al vencimiento

Las opciones son instrumentos que se deprecian con el paso del tiempo. El periodo determina su precio, una opción con un plazo de tiempo más largo es más cara que una opción con un plazo menor, debido a que las probabilidades de que se ejerza la opción son mayores.

3.3.2. Precio del bien subyacente *versus* precio de ejercicio

En el caso de una opción call si el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio, se recomienda no ejercer la opción, y queda fuera del dinero (*out-of-the-money*). Si el precio de mercado es igual al precio de ejercicio, la opción se ejerce, y se dice que está en el dinero (*at-the-money*). Cuando el precio de mercado es mayor que el precio de ejercicio, la opción debe ejercerse con una utilidad, en este caso, se dice que la opción está dentro del dinero (*in-the-money*).

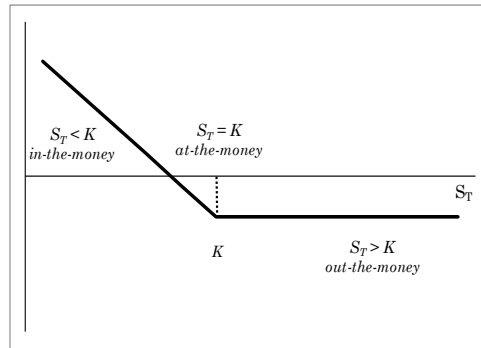
Gráfica 3.5. *Opción call*



Fuente. Elaboración propia.

En el caso de una opción put, la relación es inversa, si el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio, la opción debe ejercerse con utilidades y se dice que está dentro del dinero (*in-the-money*).

Gráfica 3.6. Opción put



Fuente. Elaboración propia.

Cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio, la opción está en el dinero (*at-the-money*), y finalmente, cuando el precio de mercado es superior al precio de ejercicio, se recomienda no ejercer la opción, por tanto, está fuera del dinero (*out-of-the-money*).

3.3.3. Volatilidad⁷⁰ del precio del bien subyacente

Como se considera en el presente trabajo, la volatilidad es una medida de dispersión de los precios y del riesgo. Mientras más volátil sea el precio de un bien, mayor será su dispersión de precios, y la probabilidad de que ejer-

⁷⁰ La volatilidad que se considera en el precio de una opción es la volatilidad *esperada*. En general se utiliza la volatilidad histórica como estimación. En algunos estudios se considera la volatilidad implícita bajo el supuesto de que los precios de las opciones son eficientes y suficientes, es decir, consideran toda la información disponible en el mercado.

za la opción será mayor, y por tanto, la prima. Si se espera que la volatilidad disminuya, las primas también lo harán, y la estrategia es vender opciones, si se espera que la volatilidad aumente, la estrategia es comprar opciones.

3.3.4. Valores de una opción

La determinación del precio de una opción considera elementos ya mencionados en los incisos anteriores, por ejemplo, el plazo al vencimiento y la volatilidad determinan el *valor por tiempo*, V_t . Cabe mencionar que únicamente las opciones *at-the-money* y *out-the-money* tienen valor por tiempo. El valor por tiempo se aproxima a cero a medida que avanza el tiempo al vencimiento de la opción.

La diferencia que guarda el precio del bien subyacente con respecto al precio de ejercicio de la opción determina el *valor intrínseco*,⁷¹ V_i . Por tanto el valor total, V_p , de la prima de la opción esta dado por

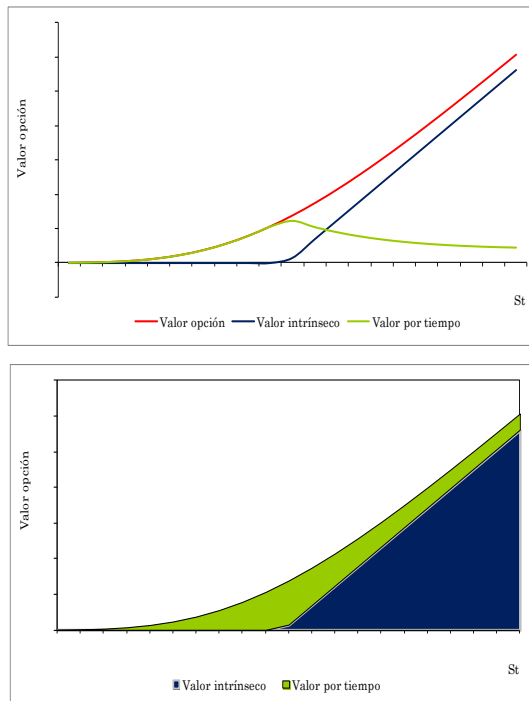
$$V_p = V_t + V_i. \quad [3.3]$$

La gráfica 3.7. y la gráfica 3.8., presentan los V_t y V_i para una opción call y una put. Se puede observar que V_i es una función de la relación existente entre el precio del bien subyacente y el precio de ejercicio. Cuando el precio del bien subyacente es menor que el precio de ejercicio, $V_i = 0$, se recomienda no ejercer la opción porque se encuentra *out-the-money*. Cuando el precio del bien subyacente es igual al precio de ejercicio, $V_i = 0$ y la opción está

⁷¹ El *valor extrínseco*, V_e , es la diferencia entre V_i y V_p . V_e contempla tres parámetros: tiempo al vencimiento, volatilidad y tasa de interés. También se identifica a V_e como la valuación que hace el mercado con respecto a las probabilidades de obtener utilidades.

at-the-money la opción se ejerce. Cuando el precio del bien subyacente es mayor que el precio de ejercicio, $V_i > 0$, la opción está *in-the-money*, debe ejercerse con utilidades.

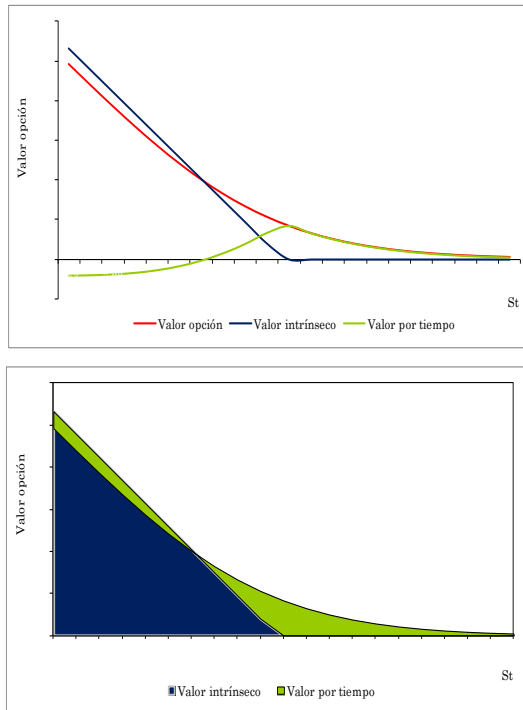
Gráfica 3.7. *Valores de una call europea*



Fuente. Elaboración propia.

En el caso de una opción put, hay que considerar el razonamiento inverso.

Gráfica 3.8. *Valores de una put europea*



Fuente. Elaboración propia.

A continuación se presentan en el cuadro 3.1., los posibles efectos que pueden desencadenar los movimientos de todas las variables que influyen en el precio de una opción que considera una acción como activo subyacente.

Cuadro 3.1. *Determinación del precio de una opción sobre acciones*

Variable	Opción europea		Opción americana	
	call	put	call	put
Factores endógenos (del contrato)				
Precio de ejercicio	–	+	–	+
Tiempo de vencimiento	?	?	+	+
Dividendos	–	+	–	+
Factores exógenos (de mercado)				
Volatilidad	+	+	+	+
Precio actual de la acción	+	–	+	–
Tasa libre de riesgo	+	–	+	–

NOTA. El signo + indica que un aumento de la variable hace que el precio de la opción se incremente; el signo – indica que un aumento de la variable hace que el precio de la opción disminuya; el signo ? indica que la relación es incierta.

Fuente. Elaboración propia con información de Hull (2009), pág. 210.

3.4. Valuación de opciones considerando *volatilidad constante*

Durante la década de los setentas, y en particular 1973, fue un año en el que se revolucionó la valuación de opciones al publicarse dos trabajos⁷² que planteaban bajo condiciones de equilibrio general, la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, que obtiene el precio de una opción europea sobre una acción que no pagaba dividendos.

Robert Merton, publicó “Theory of Rational Option Pricing”, en *Bell Journal of Economics and Management Science* y Fischer Black y Myron Scholes publicaron “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, en *Journal of Political Economy*, ambos en 1973 y debido a su importancia, a continuación se expondrá el modelo de Black-Scholes que permite obtener

⁷² Para entonces, Paul A. Samuelson había publicado su trabajo “Rational Theory of Warrants Prices” en *Industrial Management Review* en 1965. Samuelson hace un planteamiento para eliminar la posibilidad de tener valores negativos para el precio del activo subyacente, (limitación más importante en el planteamiento de Bachellier) al considerar que el precio del activo es guiado por un movimiento geométrico Browniano.

el precio de una opción europea bajo condiciones de no arbitraje de diversos instrumentos derivados que se ofrecen en el mercado actualmente. El precio de la opción se puede expresar como

$$c = c(S_t, K, T, \sigma, r) \quad [3.4]$$

Los supuestos que determinan el modelo de Black-Scholes son

- a) no existen oportunidades de arbitraje (equilibrio en los mercados),
- b) no hay costos de transacción (ni comisiones e impuestos),
- c) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos,
- d) el precio del activo subyacente es guiado por un movimiento geométrico Browniano⁷³,
- e) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en fracciones de título,
- f) la *volatilidad* del precio el activo subyacente se mantiene *constante*,
- g) existe información simétrica, todos los agentes tienen acceso a la misma información,
- h) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados ni domingos ni días festivos,
- i) las ventas en corto del subyacente son permitidas,
- j) existe un mercado de crédito, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo constante para todos los plazos.

En este contexto, es factible crear un portafolio autofinanciable y replicante, es decir, una estrategia de cobertura dinámica, dado que el precio del

⁷³ Implica que el precio del activo subyacente (en este caso, una acción) en cualquier fecha futura tiene una distribución *log-normal* de la forma $\frac{\Delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$, si se consideraran los rendimientos se tendría: $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$.

activo subyacente y el precio de la opción dependen de la misma fuente de incertidumbre. Por tanto, supongamos que el precio del activo subyacente es guiado por el proceso siguiente

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.5)$$

donde

μ : rendimiento promedio esperado, con $\mu > 0$.

σ : volatilidad instantánea, con $\sigma > 0$.

dW_t : movimiento geométrico Browniano, $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

Al igual que el precio del activo subyacente en un instante de tiempo $(t, t + dt)$ cambia de $(S_t, S_t + dS_t)$ el precio de la opción también cambia a $(c, c + dc)$. El lema de Itô permite calcular dicho cambio

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (3.6)$$

Ahora considere un portafolio Π_t que considera ω_1 unidades de activo subyacente con precio S_t y ω_2 unidades de una opción call sobre el subyacente con precio $c(S_t, t)$. Entonces el portafolio

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t), \quad (3.7)$$

y el cambio en un instante dt se puede denotar como

⁷⁴ Samuelson y Merton plantean la ecuación diferencial como $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t$. En el modelo de Samuelson los agentes son adversos al riesgo ($\alpha \geq 0$). En el modelo de Merton no se hace ningún supuesto sobre las preferencias de los agentes pues supone que aceptan dichos valores generados en el mercado ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc, \quad [3.8]$$

sustituyendo [3.5] y [3.6] en [3.8] se obtiene el cambio en el portafolio

$$d\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t. \quad [3.9]$$

Está ecuación permite identificar dos factores, el primero es el que representa a la tendencia (dt) y el segundo es el riesgo de mercado (dW_t). La eliminación del último término implica infinitas posibilidades al considerar una selección de ω_1 y ω_2 que cancele dW_t , sin embargo, existe una combinación que permite realizar una cobertura dinámica eliminando el riesgo de mercado, se conoce como *cobertura delta*, aunque sólo es útil durante un instante dt , ya que a medida que pasa el tiempo, la cobertura se va deteriorando. Dicha estrategia considera a $\omega_1 = -\Delta$ y $\omega_2 = 1$, es decir, se realiza una venta en corto de Δ unidades de subyacente con una opción call. El portafolio que se obtiene, sustituyendo en [3.7] es

$$\Pi_t^\Delta = -\Delta S_t + c \quad [3.10]$$

suponiendo que los agentes son adversos al riesgo, y se considera una inversión en una cuenta bancaria a una tasa libre de riesgo, r , el cambio en el valor del portafolio en un instante dt sería

$$d\Pi_t^\Delta = d\Pi_t^\Delta r dt = (-\Delta S_t + c) r dt. \quad [3.11]$$

En condiciones de equilibrio general, se tienen dos alternativas, la primera sería, que la tasa de rendimiento del portafolio fuera mayor que la tasa de interés que paga el banco, entonces sería preferible pedir prestado al banco

en t la cantidad $(-\Delta S_t + c)$ para invertir en acciones y cubrirse con opciones, posteriormente $(t + dt)$ se pagaría el préstamo y se obtendría una ganancia libre de riesgo. La segunda alternativa considera, que la tasa que paga el banco sea mayor que la tasa de rendimiento del portafolio, en ese caso, la inversión debería realizarse en el banco. Entonces bajo el supuesto de no arbitraje se tiene que

$$d\Pi_t^r = d\Pi_t^A \quad [3.12]$$

Al considerar las alternativas de inversión es posible plantear la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, de acuerdo a [3.12] se tiene

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt \quad [3.13]$$

ordenando se tiene la fórmula típica, conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0 \quad [3.14]$$

Las condiciones de frontera y final se establecen de la siguiente manera

$$c(0, t) = 0 \quad c(S_t, T) = \max(S_T - K, 0)$$

Finalmente, el precio de una opción call es

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad [3.15]$$

y, el precio de una opción put es

$$p(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) \quad [3.16]$$

donde

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La ecuación de Black-Scholes considera todas las variables y parámetros que influyen en el valor de la opción, a excepción del rendimiento promedio esperado, μ . Lo anterior es debido a que en su lugar aparece r , la tasa libre de riesgo, con lo cual, los agentes consideran en primera instancia el nivel de volatilidad del activo y después están dispuestos a aceptar la tasa de rendimiento libre de riesgo, incluso dejando de lado sus preferencias al riesgo.

La consideración anterior implica un análisis más profundo, ya que, en primera instancia se determina el nivel de volatilidad en la toma de decisiones y como se ha comprobado empíricamente no es constante, es necesario modelarla y estimarla como un proceso estocástico.

3.5. Valuación de opciones considerando *volatilidad estocástica*

De acuerdo con el contexto establecido por Black-Scholes, cuando existe volatilidad no constante, no es factible crear un portafolio autofinanciable y replicante libre de riesgo, es decir, una estrategia de cobertura dinámica, debido a que existen dos fuentes de incertidumbre, la del precio del activo subyacente y el precio de la opción que se utilizará para eliminar la volatilidad. Por tanto, supongamos que el precio del activo subyacente es guiado por el proceso siguiente

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_{1t}, \quad [3.17]$$

y el proceso⁷⁵ que sigue la volatilidad del subyacente es

$$d\sigma_t = \alpha(S_t, \sigma, t)dt + \beta(S_t, \sigma, t)dW_{2t}, \quad [3.18]$$

donde

μ : rendimiento promedio esperado, con $\mu > 0$.

σ : volatilidad instantánea, con $\sigma > 0$.

dW_1 y dW_2 son dos movimientos geométricos Brownianos que $\sim \mathcal{N}(0, dt)$ y

$$(dW_{1t} \cdot dW_{2t}) = \rho dt, \text{ como coeficiente de correlación.}$$

Como se había mencionado, con dos fuentes de aleatoriedad, es necesario construir un portafolio con los siguientes activos y con la siguiente estrategia de cobertura:

- a) cantidad de subyacente determinado por Δ unidades,
- b) la opción que se pretende valorar definida por f_1 ,
- c) otra opción determinada por Θ unidades y definida por f_2 .

⁷⁵ La determinación de α y β dependen de la forma funcional seleccionada, es decir, del modelo planteado para modelar la evolución de la volatilidad.

Con dicha estrategia el valor de la portafolio queda conformado por

$$\Pi_t = f_1 - \Delta S_t - \Theta f_2. \quad [3.19]$$

Dado que se tienen dos funciones asociadas, una para el precio de la opción a valorar $f_1(S_t, \sigma, t)$ y otra para el precio de la segunda opción $f_2(S_t, \sigma, t)$ que permitirá eliminar la volatilidad asociada. Se tiene que las funciones aplicando el lema de Itô son

$$df_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho \right) dt + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} d\sigma, \quad [3.20]$$

$$df_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho \right) dt + \frac{\partial f_2}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} d\sigma. \quad [3.21]$$

Aplicando el lema de Itô a [3.17] y [3.18] para determinar el proceso que sigue el portafolio se tiene que

$$d\Pi_t = df_1 - \Delta dS_t - \Theta df_2, \quad [3.22]$$

sustituyendo [3.20] y [3.21] en [3.22] se tiene

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho \right) dt \\ & - \Theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho \right) dt \\ & + \left(\frac{\partial f_1}{\partial S_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial S_t} - \Delta \right) dS_t + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad [3.23]$$

reordenando [3.23] se tiene

$$\begin{aligned}
d\Pi_t = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} \alpha \right) dt \\
& - \Theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_2}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} \alpha \right) dt \quad [3.24] \\
& - \Delta \mu S_t + \left(\frac{\partial f_1}{\partial S_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial S_t} - \Delta \right) \sigma S_t dW_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} \right) \beta dW_2.
\end{aligned}$$

Para la construcción del portafolio libre de riesgo es necesario establecer condiciones que permitan durante un periodo infinitesimal dt un rendimiento igual a la tasa libre de riesgo r . Para ello se presentan las siguientes restricciones, en un sistema de tres ecuaciones [3.25], [3.26] y [3.27], con dos incógnitas (Δ, Θ).

$$\begin{aligned}
d\Pi_t = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} \alpha \right) \\
& - \Theta \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_2}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} \alpha \right) - \Delta \mu S_t \quad [3.25] \\
& = r(f_1 - \Delta S_t - \Theta f_2).
\end{aligned}$$

Las siguientes ecuaciones [3.26] y [3.27], si se cumplen, van a permitir eliminar la incertidumbre en el portafolio [3.25].

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial S_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial S_t} - \Delta \right) \sigma S_t = 0 \quad [3.26]$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} - \Theta \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_t} \right) \beta = 0 \quad [3.27]$$

La solución al sistema anterior, se plantea como una combinación lineal del tipo $(E_1 - \lambda_1) \cdot (E_2 - \lambda_2) \cdot E_3 = 0$. El término λ_2 se conoce como *precio de mercado del riesgo de la volatilidad*, donde los términos asociados a Δ deben cumplir con

$$-\mu S_t + r S_t + \lambda_1 \sigma S_t = 0, \quad [3.28]$$

obteniendo

$$\lambda_1 = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad [3.29]$$

y

$$r = \mu - \lambda_1 \sigma \quad [3.30]$$

Los términos independientes asociados a f_1 cumplen con lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} \alpha - r f_1 \\ - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial S_t} \sigma S_t - \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} \beta = 0, \end{aligned} \quad [3.31]$$

reordenando se tiene

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} r S_t - r f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} (\alpha - \lambda_2 \beta) = 0 \quad [3.32]$$

Por tanto, para obtener el precio de la opción que se quiere valorar es necesario resolver [3.31] en función de f_1 .⁷⁶

Desafortunadamente, esta ecuación no tiene solución explícita, y su solución debe obtenerse mediante métodos numéricos. La estrategia será construir un portafolio comprando opciones y vendiendo Δ unidades de subyacente, donde el portafolio será $\Pi = f_1 - \Delta S_t$, y el cambio en su valor estará dado por $d\Pi_t = df_1 - \Delta dS_t$. Sustituyendo [3.31] para determinar el valor del nuevo portafolio se tiene

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho \right) dt + \left(\frac{\partial f_1}{\partial S_t} - \Delta \right) + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} d\sigma \quad [3.33]$$

Como se puede observar existen dos factores de cobertura $\frac{\partial f_1}{\partial S_t}$ y $\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t}$ que corresponde a las fuentes de incertidumbre, por un lado la del subyacente, y por el otro la de su volatilidad, ambas deben eliminarse. Al elegir la cobertura delta $\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial S_t}$ es posible eliminar la incertidumbre del subyacente, de manera similar a la planteada en el modelo de Black-Scholes, pero en el caso de de la volatilidad será necesario estimar el factor λ_2 . Para ello se puede considerar el exceso de rendimiento obtenido con [3.32] sobre el rendimiento del activo libre de riesgo para identificar el precio de mercado del riesgo de la volatilidad.

⁷⁶ Para resolver la ecuación asociada a f_2 y que corresponde a la opción que permitirá eliminar la incertidumbre de la volatilidad debe cumplir en sus términos independientes con una ecuación similar a [3.31], únicamente cambiando f_1 por f_2 .

$$\begin{aligned}
d\Pi_t - r\Pi_t &= r(f_1 - \Delta S_t)dt \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_t^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S_t \partial \sigma_t} \sigma S_t \beta \rho + \frac{\partial f_1}{\partial S_t} r S_t - r f_1 \right) dt \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} (\alpha dt + \beta dW_2) \tag{3.34} \\
&= (\alpha - \lambda_2 \beta) \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} dt + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} (\alpha dt + \beta dW_2) \\
d\Pi_t - r\Pi_t &= \beta \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_t} (\alpha dt + \beta dW_2).
\end{aligned}$$

En este análisis se pueden observar que por cada unidad de riesgo de volatilidad, representado por dW_2 , se tienen λ_2 unidades de rendimiento extra, representados por dt . Además es posible identificar dos componentes:

- a) tasa de rendimiento neutral al riesgo de la volatilidad $(\alpha - \lambda_2 \beta)$, en vez de α .
- b) la tasa de rendimiento neutral al riesgo del subyacente en Black-Scholes es r y no μ , ($r = \mu - \lambda_1 \sigma$).

4. Modelos de valuación de opciones con volatilidad estocástica

4.1. Introducción

La estimación, modelación y pronóstico⁷⁷ de la volatilidad de mercado es determinante en la valuación de cualquier activo, en general, la valuación se había enfocado en la construcción de métodos que permitían realizar coberturas de riesgos utilizando instrumentos derivados con portafolios replicantes. Actualmente existen modelos que consideran los precios de las opciones como insumos (información que otorga el mercado) y el objetivo es la estimación de la volatilidad, considerada como la variable relevante en el modelo.

El presente capítulo abordará la modelación y estimación de la volatilidad, desde el punto de vista teórico y empírico. Se consideran dos tipos de modelos, los más populares que pertenecen a la familia ARCH-GARCH y permiten capturar comportamientos típicos en una serie de tiempo financiera, y los modelos de volatilidad estocástica univariantes que por su flexibilidad permiten distinguir las características de los rendimientos financieros en datos de alta frecuencia.

Análisis y estudios empíricos han mostrado que los modelos de volatilidad estocástica, aunque son más sofisticados, son más apropiados, véase por ejemplo Ruíz (1994), Malmsten y Teräsvirta (2010) y Teräsvirta y Zhao (2011), García y Mínguez (2011).

⁷⁷ Los modelos que permiten pronosticar la volatilidad consideran el pasado de los rendimientos y se conocen como *backward looking* (procesos hacia atrás).

4.2. Modelos de Valuación⁷⁸

Diversos son los métodos que se plantean en la valuación de opciones, sin embargo los modelos que consideran opciones bajo volatilidad estocástica, la literatura los agrupa en los siguientes casos:

- a) Modelo de *elasticidad constante de la varianza*.
- b) Modelo de *opción compuesta*.
- c) Modelo de *difusión desplazada*.
- d) Modelos tipo ARCH.
- e) Modelos de volatilidad estocástica.
- f) Sonrisas de volatilidad y superficies de volatilidad.

En el presente trabajo de investigación se presentará una breve descripción de todos los modelos agrupados en la literatura, sin embargo, el análisis cuantitativo se avocará a los modelos *d)* y *e)* para efectos comparativos.

4.2.1. Modelo de *elasticidad constante de la varianza*

La propuesta inicial fue hecha por Cox (1975) y replanteada por Cox y Ross (1976), posteriormente lo han utilizado Macbeth y Merville (1980), Emanuel y Macbeth (1982), entre otros.

El planteamiento considera que la dinámica del precio⁷⁹ del activo subyacente se rige por la siguiente ecuación diferencial estocástica

⁷⁸ La literatura considera muchos modelos más, que pueden ser líneas de investigación y considerarse como una extensión del presente trabajo. Entre los modelos se pueden mencionar los modelos mixtos de difusión con saltos propuesto por Amin, Ng y Naik (1993), modelos de procesos de caos propuesto por Savit (1989), modelos con volatilidades implícitas como aproximaciones de Jarrow y Wiggins (1989), y modelos de memoria larga de Beran (1994), Robinson (1994) y Baillie (1996).

⁷⁹ Se considera que los precios no son independientes de su pasado, por lo que se puede afirmar que no se comporta como una caminata aleatoria como se supone en el modelo de Black-Scholes.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\alpha dW_t, \quad [4.1]$$

cuando

$\alpha < 1$: a medida que el precio del activo subyacente aumenta, la volatilidad disminuye.

$\alpha > 1$: a medida que el precio del activo subyacente aumenta, la volatilidad aumenta.

$\alpha = 1$: se tiene el modelo de Black-Scholes.

4.2.2. Modelo de opción compuesta

El planteamiento fue desarrollado por Geske (1979) y considera la relación entre el valor de una acción y el valor de la empresa, donde el valor de la empresa es el activo subyacente y la acción sería la opción.⁸⁰ La construcción de este modelo contempla una opción call sobre una acción, lo que en realidad sería una opción sobre una opción, es decir, una opción compuesta. La formulación se basa en el teorema expresado por Geske que considera que los inversionistas son insaciables, que los mercados son perfectos y competitivos, no hay restricciones en las ventas en corto, la tasa libre de riesgo es conocida y constante en el tiempo, que las transacciones son continuas y que los cambios en el valor de la empresa se rigen por una caminata aleatoria con una varianza proporcional a la raíz cuadrada del valor de la firma y que por tanto los inversionistas están de acuerdo con dicho valor, entonces la ecuación que permite obtener el precio de la opción⁸¹ es

⁸⁰ En este modelo, la variable *valor de la empresa* se comporta como un proceso estacionario. Cuando el valor de la empresa es constante, la acción se comporta como un proceso no estacionario donde la volatilidad se incrementa a medida que el precio de la acción disminuye.

⁸¹ Cuando $M = 0$ y $T \rightarrow \infty$, se obtiene el modelo de Black-Scholes como un caso particular del modelo de Geske. Incluso, si se considera una empresa que no tiene deuda, los

$$c = VN_2\left(h + \sigma_V\sqrt{\tau_1}, k + \sigma_V\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Me^{-r_F\tau_2}N_2\left(h, k; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Ke^{-r_F\tau_1}N_1(h), \quad [4.2]$$

donde

$$h = \frac{\ln\left(\frac{V}{\bar{V}}\right) + \left(r_F - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_1}{\sigma_V\sqrt{\tau_1}}.$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{V}{M}\right) + \left(r_F - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_2}{\sigma_V\sqrt{\tau_2}}.$$

\bar{V} : valor de V tal que

$$S_\tau - K = VN_1(k + \sigma_V\sqrt{\tau}) - Me^{-r_F\tau}N_1(k) - K = 0, \quad [4.3]$$

donde

c : valor actual de la opción call.

S : valor de mercado actual del activo subyacente.

V : valor de mercado actual de la firma.

M : valor nominal de la deuda.

r_F : tasa de interés libre de riesgo.

σ_V^2 : varianza instantánea de los rendimientos de los activos de la firma.

$N_1(\cdot)$: función de distribución normal acumulada univariada.

$N_2(\cdot)$: función de distribución normal acumulada bivariada con h y k como límites de la integral doble.

t : tiempo actual.

T : tiempo de maduración de la deuda.

modelos son iguales; situación que permite considerar que el modelo de Black-Scholes en realidad no considera una cobertura sin riesgo.

$$\tau = T - t^*.$$

$$\tau_1 = t^* - t.$$

$$\tau_2 = T - t.$$

$\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}$: coeficiente de correlación.

4.2.3. Modelo de *difusión desplazada*

Modelo propuesto por Rubinstein (1983) en el que considera la existencia de una empresa que mantiene su valor total, V , en dos activos, uno con riesgo, en una proporción α y otro sin riesgo, con proporción $(1 - \alpha)$, donde $(0 \leq \alpha \leq 1)$. El activo con riesgo sigue un proceso de difusión lognormal con volatilidad instantánea anual de σ_R y el activo sin riesgo crece a una tasa compuesta anual de $(r - 1)$. Al final de t años, el valor de la empresa será

$$V = [\alpha e^y + (1 - \alpha)r^t], \quad [4.4]$$

donde y es una variable aleatoria distribuida normalmente con volatilidad instantánea de $\sigma_R\sqrt{t}$. Además supone que la empresa tiene una estructura de capital muy simple con una relación deuda-capital de β medida en términos del valor de mercado actual, si S es el valor de mercado actual y no hay dividendos y la deuda no es riesgosa⁸², el valor del activo después del tiempo t sería

$$S^* = [\alpha(1 + \beta)e^y + (1 - \alpha - \alpha\beta)r^t]S. \quad [4.5]$$

⁸² El hecho de considerar la deuda (de insolvencia) hace que la volatilidad del activo subyacente tienda a disminuir cuando se producen incrementos rápidos en el precio del activo. Por otro lado, la evidencia empírica muestra que el impacto en el precio de las opciones es muy bajo, y es razonable suponer deuda sin riesgo.

Como consecuencia, para asegurar que la deuda es sin riesgo, se requiere que $(1 - \alpha - \alpha\beta) \geq 0$, por tanto, $\beta \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

De manera más general, se considera el pago de dividendos, k , donde $k \leq t$, correspondiente a la proporción sin riesgo del valor de la acción $d_k S$, además se pagará un dividendo de acuerdo a la proporción del valor del activo con riesgo $(1 - \alpha - \alpha\beta)r^t S$. También es necesario considerar que la empresa en el futuro pagará a sus accionistas una fracción δ_k correspondiente al activo riesgoso. Por tanto, el dividendo total a pagar sería

$$D_k = [\alpha(1 + \beta)[\Pi_{\tau < k}(1 - \delta_\tau)]\delta_k e^y + d_k]S, \quad [4.6]$$

lo que implica que el valor del activo tenga dos componentes:

a) proporción con riesgo: $[\alpha(1 + \beta)[\Pi_{k \leq t}(1 - \delta_\tau)]e^y]S = ae^y S$.

b) proporción sin riesgo: $[(1 - \alpha - \alpha\beta)r^t - \sum_{k \leq t} d_k r^{t-k}]S \equiv bS$.

Finalmente, la expresión que permite obtener el valor de una opción call europea bajo condiciones de arbitraje está dada por $c(aS, K - bS, t, r, \sigma_R)^{83}$.

Reescribiendo, se tiene

$$c = aS \mathcal{N}(x) - (K - bS)r^{-t} \mathcal{N}(x - \sigma_R \sqrt{t}), \quad [4.7]$$

donde

$$x = \frac{\log\left(\frac{aS}{(K - bS)r^{-t}}\right)}{\sigma_R \sqrt{t}} + \frac{1}{2} \sigma_R \sqrt{t}.$$

$$a = \alpha(1 - \beta)\Pi_{k \leq t}(1 - \delta_k).$$

$$b = (1 - \alpha - \alpha\beta)r^t - \sum_{k \leq t} d_k r^{t-k}.$$

⁸³ Expresión similar a la planteada por Black-Scholes, si $a = b = 0$, se tiene dicho modelo.

4.3. Modelos *tipo ARCH*

Los modelos de la familia ARCH permiten capturar características de la varianza condicional⁸⁴ que cambian con el tiempo. La primera propuesta fueron los modelos ARCH(p) planteados por Engle (1982), posteriormente Bollerslev (1986) generaliza dicho modelo proponiendo los modelos GARCH (ARCH generalizados) que consideran las varianzas condicionales del pasado además de los cuadrados de los errores. Nelson propone los modelos EGARCH que permiten capturar los comportamientos simétricos de las series financieras, en particular de la serie de rendimientos de un activo subyacente, así, la familia de modelos ARCH está compuesta por al menos 20 tipos de modelos,⁸⁵ todos buscando capturar las características de las series financieras o sus hechos estilizados.

A continuación se presentarán brevemente los modelos de la familia ARCH más utilizados en la estimación de series de tiempo financieras.

4.3.1. Modelo ARCH(p)⁸⁶

Los modelos ARCH propuestos por Engle (1982) permite modelar los cambios de la varianza condicional como una función del pasado de la serie. En resumen, la varianza condicional σ_t^2 es una función lineal de los cuadrados de las observaciones pasadas de r_t con la siguiente especificación funcional:

⁸⁴ Los modelos de la familia ARCH definen a la volatilidad como la varianza condicional de la serie en cuestión. La varianza condicional considera la expectativa del futuro sujeta a la información acumulada hasta el tiempo t .

⁸⁵ Véase el Anexo 2 que presenta los modelos de la familia ARCH con sus formas funcionales para la varianza y los autores que propusieron dichos modelos.

⁸⁶ En la literatura econométrica existen trabajos que recopilan y revisan los modelos ARCH, por ejemplo, Bollerslev, Chou y Kroner (1992), Gouriéroux (1993), Novales y Gracia-Díez (1993) Bollerslev, Engle y Nelson (1994) y De Arce (2004).

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t}, \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde

α_0 : mínima varianza condicional, $\alpha_0 > 0$.

α_i : persistencia de la volatilidad⁸⁷, $0 \leq \alpha_i < 1, \forall i$.

$z_t \sim iid(0,1)$, El modelo más sencillo es un ARCH(1) que considera una perturbación normal.

Las restricciones impuestas tienen dos objetivos:

- a) la varianza sea estrictamente positiva,
- b) el modelo sea estacionario, si y sólo si $(\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1)$.

En general este tipo de modelos se consideran adecuados para modelar el exceso de curtosis, los efectos asimétricos y el agrupamiento de volatilidad de la serie.

4.3.2. Modelo GARCH(p, q)⁸⁸

Los modelos Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicional formulados por Bollerslev (1986) tienen características similares a las de los modelos ARCH con la diferencia de que la estimación se realiza sobre menos parámetros. Los modelos GARCH tienen similitud también

⁸⁷ Si el coeficiente se aproxima a uno, existe una alta persistencia de shocks de volatilidad. Es una condición necesaria y suficiente para la existencia de las varianzas condicionales e incondicionales.

⁸⁸ En la literatura econométrica existen trabajos que recopilan y revisan los modelos GARCH, por ejemplo, Bollerslev, Chou y Kroner (1992), Bera y Higgins (1993) y Bollerslev, Engle y Nelson (1994), Palm (1996) y Ritchken y Rob (1999).

con los modelos ARMA(m, p) formulación propuesta por Pantula (1986).⁸⁹ Los modelos GARCH(p) tiene la siguiente especificación funcional:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t}, \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \end{aligned} \quad [4.9]$$

donde

$\alpha_0 > 0$.

α_i : mide el efecto de las volatilidades pasadas en la volatilidad presente, (efecto ARCH), $\alpha_i \geq 0, \forall i$.

β_i : efecto GARCH, $\beta_i \geq 0, \forall i$.

$(\alpha_i + \beta_1)$: persistencia de la volatilidad condicional en el tiempo⁹⁰, tasa a la que disminuyen los efectos de las volatilidades pasadas.

$z_t \sim iid(0,1)$.

Las propiedades estadísticas que tienen estos modelos, en general, permiten modelar adecuadamente la mayoría de las series de tiempo financieras con un modelo GARCH(1,1), capturando los hechos estilizados que consideran también los modelos ARCH: el exceso de curtosis, los efectos asimétricos y el agrupamiento de volatilidad.

⁸⁹ La consideración de la nueva perturbación $v_t = r_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$ con media cero y sin autocorrelación, permite que el modelo GARCH(p, q) se pueda representar mediante un modelo ARMA(m, p) como

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j}.$$

⁹⁰ Si la suma de los coeficientes se aproxima a uno, existe alta persistencia de shocks de volatilidad, lo que implica que los efectos tardan más en desaparecer.

4.3.3. Modelo IGARCH(p, q)

Los modelos Generalizados Autorregresivos Integrados de Heteroscedasticidad Condicional fueron formulados por Engle y Bollerslev (1986) y Nelson (1991). Los modelos IGARCH consideran la persistencia de la varianza y la existencia de raíces unitarias. Los modelos IGARCH pueden ser representados por modelos MA(1) estacionarios en primeras diferencias, e incluso podrían ser aproximados como modelos ARIMA(0,1,1).

Los modelos IGARCH(p, q) tiene la siguiente especificación funcional:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t}, \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i &= 1,\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde

$\alpha_0 > 0$.

α_i : efecto ARCH, $\alpha_i \geq 0, \forall i$.

β_i : efecto GARCH, $\beta_i \geq 0, \forall i$.

$(\alpha_i + \beta_1) = 1$, persistencia de la volatilidad condicional en el tiempo.

$z_t \sim iid(0,1)$.

Los modelos IGARCH empíricamente han resultado adecuados para modelar los efectos asimétricos de la volatilidad, además el efecto de persistencia permite capturar el comportamiento dinámico de la media en el largo plazo. La ecuación de la varianza, sin embargo, no presenta reversión a la media, aunque, como la varianza condicional es un proceso estacionario en el largo plazo si tiende a un valor constante.

Cabe mencionar que los modelos IGARCH son no estacionarios en covarianza, lo que confirma la persistencia, además de que el polinomio autorregresivo en la ecuación de la varianza tiene raíz igual a uno, y considera que la evolución de la volatilidad es probabilística.

4.3.4. Modelo EGARCH(p, q)

El planteamiento del modelo Exponencial Generalizado Autorregresivo de Heteroscedasticidad Condicional propuesto por Nelson (1991)⁹¹ buscaba cubrir ciertas limitaciones del modelo GARCH, *i*) las restricciones sobre los parámetros para asegurar la no negatividad y *ii*) la incapacidad para capturar la asimetría de la volatilidad ante cambios de los precios de manera repentina.

El modelo E-GARCH expresa la varianza condicional en forma logarítmica, lo que implica que no hay necesidad de imponer ninguna restricción para evitar obtener una varianza negativa, con lo cual cumple con *i*). El modelo E-GARCH permite que los errores tengan diferentes impactos (pesos) en la varianza condicional dependiendo del signo del shock, lo que permite capturar los efectos asimétricos, cumpliendo con *ii*). El modelo GARCH exponencial tiene la siguiente forma funcional:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t}, \\ \log h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \gamma_i r(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \gamma_i^b \log h_{t-i}, \end{aligned} \quad [4.11]$$

⁹¹ Engle y Ng (1993) definen el concepto de *curva de impactos asimétricos*, que identifica cómo impactan las buenas o malas noticias en el mercado. Ellos consideraron que las malas noticias se veían reflejadas en la obtención de un rendimiento menor al esperado y como consecuencia existía un aumento en la volatilidad, la situación inversa se presenta con las buenas noticias.

donde

γ : mide la sensibilidad de la varianza condicional ante shocks de diferente signo. El proceso es estacionario en covarianza si y solo si $\sum_{i=1}^q \gamma_i < 1$.

$z_t \sim iid GED(0,1)$: las innovaciones se consideran bajo una Distribución Generalizada de Errores, familia de distribuciones que modela muchas series financieras

$r(x)$: función de las innovaciones z_t que considera el valor como su magnitud en términos absolutos, $r(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 (|x| - E|x|)$.

A continuación se expondrán los modelos de volatilidad estocástica, segunda alternativa de modelación de la volatilidad. Aunque los modelos tipo GARCH son más utilizados que los modelos de volatilidad estocástica por la implementación de su cálculo en muchos programas econométricos, la diferencia básica radica en la especificación de la varianza en cada enfoque.

4.4. Modelos de *volatilidad estocástica*

Los modelos de volatilidad estocástica tienen en Taylor (1982) a su principal expositor, aunque algunos autores consideran que Clark (1973) podría ser el origen de este tipo de modelos. Algunos otros, consideran que Mandelbrot (1963) ya exponía de manera clara la necesidad de modelar *i)* la volatilidad que no es constante en el tiempo y *ii)* los movimientos conjuntos de las volatilidades.

Los modelos de volatilidad estocástica han evolucionado, sin embargo, en este tipo de modelos existen dos ecuaciones comunes para todos los modelos:

- a) la ecuación de la media, proceso definido por el rendimiento del activo financiero,

- b) la ecuación de la volatilidad, proceso estocástico propio definido por una variable no observable.

A continuación se expondrán los modelos univariantes que se han propuesto para estimar la volatilidad y capturar los hechos estilizados de las series financieras.

4.4.1. Modelo ARVS

El modelo de Volatilidad Estocástica Autorregresivo fue propuesto por Taylor (1982), y plantea que el logaritmo de la volatilidad se rige por un proceso estocástico de tipo autorregresivo. La especificación de la ecuación de la media es:

$$r_t = \mu_t + \sigma^* \sigma_t \varepsilon_t, \quad [4.12]$$

donde

r_t : rendimiento de la serie.

μ_t : media del proceso de los rendimientos⁹².

σ^* : parámetro de escala positivo en la ecuación de la media⁹³.

σ_t : proceso estocástico que genera la volatilidad, determinado por perturbaciones aleatorias propias.

ε_t : perturbaciones aleatorias que se supone se distribuyen *iid* $\mathcal{N}(0,1)$ y con cuarto momento de orden finito.

ε_t y σ_t son dos procesos independientes entre sí.

⁹² Los valores que puede tomar están determinados por una constante ($-\infty \leq r_t \leq +\infty$) o por una función que incluya variables explicativas e incluso sus retardos.

⁹³ Este término es necesario para no incluir un término constante en la ecuación que considera el logaritmo de la volatilidad.

La ecuación de la volatilidad se expresa de forma exponencial⁹⁴

$$\sigma_t^2 = e^{h_t}, \quad [4.13]$$

donde

$$h_t: \log(\sigma_t^2).$$

El proceso estocástico que propuso inicialmente Taylor (1982) para h_t fue un ARSV(1), que se expresa de la manera siguiente:

$$h_t = \phi h_t + v_t, \quad [4.14]$$

donde

ϕ : parámetro que relaciona el logaritmo de la volatilidad con su pasado⁹⁵, el supuesto de que $|\phi| < 1$ garantiza que el proceso sea estacionario.

v_t : perturbación aleatoria de la ecuación de la volatilidad⁹⁶, se supone que se distribuye como $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$.

Desafortunadamente, el modelo ARVS no permite explicar la asimetría de la volatilidad ante shocks de diferente signo, debido a que en este modelo se supone que ε_t y v_t , son independientes. Harvey y Shephard (1996) proponen un modelo de volatilidad asimétrica que resuelve este problema.

⁹⁴ Si se considera $\mu_t = 0$, y se considera el proceso de volatilidad en la ecuación de la media [4.12] se tiene

$$r_t = \sigma^* e^{\frac{1}{2}h_t} \varepsilon_t.$$

⁹⁵ Por dicha característica se le considera como una medida de persistencia de los shocks en el logaritmo de la volatilidad.

⁹⁶ Este parámetro mide la dispersión del proceso estocástico que rige a la volatilidad, y por tanto, da información sobre la incertidumbre de las volatilidades futuras.

4.4.2. Modelo A-ARVS

El modelo de Volatilidad Estocástica Autorregresivo Asimétrico fue propuesto por Harvey y Shephard (1996) y posteriormente desarrollado en principio por Asai y McAleer (2005). La forma funcional de este modelo está definida para las ecuaciones de la media y la volatilidad, son las mismas ecuaciones [4.12] y [4.13] propuestas para el modelo ARVS, la diferencia fundamental está en las perturbaciones que se rigen por una distribución normal bivariada expresada como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ v_{t+1} \end{pmatrix} \sim iid \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \delta\sigma_v \\ \delta\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \right), \quad [4.15]$$

donde

δ : correlación entre las perturbaciones de las dos ecuaciones, la de la media y la del logaritmo de la volatilidad, es decir, r_t y h_{t+1} .

Para δ se pueden considerar las siguientes restricciones, si

$\delta < 0$: valores de ε negativos en el periodo t tienden a inducir valores positivos en v en el periodo $t + 1$ y con ello más volatilidad.

$\delta > 0$: valores de ε positivos en el periodo t tienden a inducir valores negativos en v en el periodo $t + 1$ y con ello menos volatilidad.

$\delta = 0$: se tiene el modelo ARVS como caso particular.

4.4.3. Modelo ARVS-M

El modelo de Volatilidad Estocástica Autorregresivo en Media fue propuesto por Koopman y Hol (2002) al intentar establecer la relación que existía entre el rendimiento de un activo financiero y su riesgo. La característica de este modelo radica en la inclusión de una variable explicativa que repre-

señala a la volatilidad en la ecuación de la media. Al mismo tiempo permite capturar de manera simultánea la relación entre rendimiento y volatilidad ya que la volatilidad aparece en las dos ecuaciones. La ecuación de la media se expresa como

$$r_t = d\sigma^{*2}e^{h_t} + \sigma^*\sigma_t\varepsilon_t, \quad [4.16]$$

y la ecuación de la volatilidad como

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_v\nu_t, \quad [4.17]$$

donde

r_t : rendimiento de la variable.

σ^* : parámetro de escala positivo en la ecuación de la media.

σ_t : proceso estocástico que genera la volatilidad.

ϕ : parámetro que relaciona el logaritmo de la volatilidad con su pasado, el supuesto de que $|\phi| < 1$ garantiza que el proceso sea estacionario.

ε_t : perturbaciones aleatorias que se supone se distribuyen *iid* $\mathcal{N}(0, 1)$.

4.4.4. Modelo ARVS-X

Hol y Koopman (2002) también proponen los modelos de Volatilidad Estocástica Autorregresivo con Variables Explicativas al considerar la volatilidad implícita como variable explicativa en la ecuación de la volatilidad. La volatilidad implícita se obtiene mediante algún método de valuación de opciones y se incluye en el modelo.

Las ecuaciones del modelo propuesto son las siguientes:

$$r_t = \sigma^* e^{\frac{1}{2}h_t} \varepsilon_t, \quad [4.18]$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \gamma(1 - \phi L)x_{t-1} + \sigma_v \nu_t, \quad [4.19]$$

donde

x_t : logaritmo de la volatilidad implícita, $x_t = \log \sigma_{V,t}^2$ y su influencia sobre

la volatilidad estocástica se mide con el parámetro γ .

L : operador de retardos, $L^k x_t = x_{t-k}$.

ϕ :⁹⁷ parámetro que relaciona el logaritmo de la volatilidad con su pasado, el supuesto de que $|\phi| < 1$ garantiza que el proceso sea estacionario.

ε_t : perturbaciones aleatorias que se supone se distribuyen *iid* $\mathcal{N}(0, 1)$.

ε_t y ν_t , son independientes.

El modelo considera la ecuación de la volatilidad en términos lineales,⁹⁸ para ello es necesario considerar una restricción sobre la variable explicativa retardada de la siguiente forma

$$(1 - \phi L)h_t = \gamma(1 - \phi L)x_{t-1} + \sigma_v \nu_t,$$

si se dividen ambos factores por $(1 - \phi L)$ se obtiene

⁹⁷ Si en [4.19] se considera $\phi = 0$, se obtiene el modelo de volatilidad estocástica implícito.

⁹⁸ Una especificación alternativa del modelo ARVS-X considera la siguiente ecuación

$$h_t = \phi h_{t-1} + \gamma x_{t-1} + \sigma_v \nu_t, \quad \text{con } \nu_t \sim \text{iid } \mathcal{N}(0, 1)$$

Esta ecuación considera una distribución exponencial retardada para la volatilidad implícita. Si se sustituye de forma recursiva para los distintos retardos de h_t , se tiene

$$\log(\sigma_t^2) = \log(\sigma_t^{*2}) + \gamma x_{t-1} + \gamma \sum_{i=2}^{t-1} \phi^{i-1} x_{t-1} + \sigma_v \sum_{i=0}^{t-i} \phi^i \nu_{t-i},$$

obteniendo en términos de Hol y Koopman (2002) la siguiente función de volatilidad implícita

$$h_t = \gamma x_{t-1} + \sigma_v \nu_t.$$

$$h_t = \gamma x_{t-1} + u_t, \quad [4.20]$$

donde

$u_t = \phi u_{t-1} + \sigma_v v_t$, es decir, las perturbaciones aleatorias se rigen por un proceso autorregresivo de primer orden, donde $u_t = \frac{\sigma_v v_t}{(1-\phi L)}$.

x_{t-1} : medida de volatilidad implícita en $t - 1$, considera toda la información disponible de la volatilidad.

4.5. Modelos empíricos de volatilidad estocástica

Entre los principales modelos de volatilidad estocástica con evidencia empírica se pueden encontrar los modelos de Scott (1987), Hull y White (1987), Stein y Stein (1991) y el modelo de Heston (1993). A continuación se expondrán de manera breve, excepto el modelo de Heston que se desarrollará en el siguiente capítulo.

4.5.1. Modelo de Scott

El modelo de Scott (1987) considera dos ecuaciones

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dz_1, \quad [4.21]$$

$$d\sigma = \beta(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \gamma dz_2, \quad [4.22]$$

donde

S : precio del activo.

σ : volatilidad del activo.

α, β y γ son constantes fijas.

dz_1 y dz_2 son procesos de Wiener independientes.

Se supone que el parámetro de la volatilidad sigue un proceso de reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Si $\beta = 0$, σ es una caminata aleatoria y la varianza incondicional de los rendimientos del activo es infinita. El parámetro σ se distribuye de manera normal y existe posibilidad de obtener valores negativos, pero la varianza será negativa.

El precio de una opción call de un activo subyacente es una función de tres variables: $H(S, \sigma, \tau)$, donde τ es el tiempo al vencimiento de la opción. La función que valúa el precio de una opción bajo el modelo de Scott es

$$H(S_0, \sigma_0, t; r, c, \beta, \bar{\sigma}, \gamma) = \int_0^{\infty} [S_0 \mathcal{N}(d_1) - ce^{-rt} \mathcal{N}(d_2)] dF(V; t, \sigma_0, \beta, \bar{\sigma}, \gamma), \quad [4.23]$$

donde

$$V = \int_0^t \sigma_{(s)}^2 ds.$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{c}\right) + rt + \frac{1}{2}V}{\sqrt{V}}.$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{V}.$$

4.5.2. Modelo de Hull y White

El modelo de Hull y White (1987) considera las siguientes ecuaciones

$$dS = \phi S dt + \sigma S dw, \quad [4.24]$$

$$dV = \mu V dt + \xi V dz, \quad [4.24]$$

$$[dw, dz] = \rho dt,$$

donde el parámetro ϕ depende de S , σ y t . Las variables μ y ξ dependen de σ y t , pero no dependen de S . El proceso que sigue la varianza impide que pueda tomar valores negativos, aunque la desviación estándar instantánea puede aproximarse a cero, si σ^2 se aproxima a cero.

La ecuación desarrollada por Hull y White es una aproximación que considera series de Taylor con términos de tercer orden. La ecuación que permite obtener el precio de una opción es

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int f(S_T, \sigma_T^2, T) p(S_T | S_t, \sigma_t^2) dS_T, \quad [4.25]$$

donde

$p(S_T | S_t, \sigma_t^2)$: distribución condicional⁹⁹ de S_T dado el precio del activo y la varianza en el tiempo t .

$E(S_T | S_t) = S_t e^{r(T-t)}$ y $f(S_T, \sigma_T^2, T)$ es $\max[0, S - K]$.

Para obtener finalmente la ecuación que permite obtener el precio de una opción bajo el modelo de Hull y White es necesario utilizar la definición

⁹⁹ La distribución condicional de S_T depende de los procesos conducidos por S y σ^2 .

propuesta para $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt$, que se distribuye de manera normal con media, $\mu_{\bar{V}} = rT - \frac{\bar{V}T}{2}$ y varianza, $\sigma_{\bar{V}}^2 = \bar{V}T$.

$$C(\bar{V}) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2), \quad [4.26]$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}.$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{V}(T-t)}.$$

Por tanto, la valuación de la opción está dada por

$$f(S_t, \sigma_T^2) = \int C(\bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_T^2) d\bar{V}. \quad [4.27]$$

La ecuación [4.27] siempre es cierta en un mundo neutral al riesgo cuando el precio del activo y la volatilidad estén correlacionadas.

4.5.3. Modelo de Stein y Stein

El modelo de Stein y Stein (1991) considera dos ecuaciones

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1, \quad [4.28]$$

$$d\sigma = -\delta(\bar{\sigma} - \theta) dt + \kappa dz_2, \quad [4.29]$$

$$E[dz_1, dz_2] = \rho dt,$$

donde

S : es el precio del activo.

σ : es la volatilidad del activo.

κ, μ, δ y θ : son constantes fijas.

dz_1 y dz_2 son procesos de Wiener independientes.

El modelo considera que el proceso de la volatilidad está guiado por un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck con reversión a un valor promedio de θ en largo plazo. Utilizan técnicas analíticas, relacionadas con la ecuación de calor para obtener una solución de forma cerrada para la distribución de los precios de los activos subyacentes.

La función que obtiene el precio de una opción europea bajo el modelo de Stein y Stein es

$$F = e^{-rt} \int_{S=K}^{\infty} [S - K] S(S, t | \delta, r, \kappa, \hat{\theta}), \quad [4.30]$$

donde

$$S(S, t) = e^{-\mu t} S_0 (S e^{-\mu t}).$$

$$\hat{\theta} = \theta - \frac{\phi \kappa}{\delta}.$$

5. Modelo de Heston

5.1. Introducción

El modelo de Heston (1993) es el modelo de volatilidad más popular que se aplica ampliamente en las finanzas y es el que más éxito tiene, por ejemplo, se aplica al momento de capturar los efectos *sonrisa* (smile) en la volatilidad implícita que se presenta en las opciones que cotizan en bolsa. El modelo considera la existencia de volatilidad no constante a diferencia del modelo de Black-Scholes. En el modelo de Heston, las volatilidades tienen una especificación que sigue un proceso de raíz cuadrada con reversión a la media.¹⁰⁰ Teniendo las fórmulas de análisis de precios del modelo de Heston, se puede calibrar un modelo con datos de mercado de manera eficiente y robusta.

La dinámica estocástica de los precios de los diferentes activos (acciones, tipos de cambio, divisas, tasas de interés, entre otros) se describen comúnmente por un movimiento geométrico Browniano, que proporciona una función de distribución de probabilidad (FDP)¹⁰¹ para el rendimiento del activo. El modelo considera dos parámetros: la deriva, μ , que caracteriza la tasa de crecimiento promedio, y la volatilidad, σ , la cual caracteriza el ruido del proceso.

¹⁰⁰ La razón principal de la preferencia por el proceso de difusión de raíz cuadrada se encuentra en la flexibilidad analítica de sus funciones características, a pesar de tener una distribución no normal. Un supuesto clave en el modelo de Heston es considerar que la volatilidad instantánea del activo subyacente es $\sqrt{v_t}$.

¹⁰¹ Numerosos estudios muestran que las colas de la FDP decaen lentamente, gráficamente se puede apreciar una similitud a la distribución log-normal que permite identificar el efecto llamado *colas pesadas*.

Existe evidencia empírica que indica que la volatilidad, en lugar de ser un parámetro constante, es conducido por un proceso estocástico con reversión a la media. Diversos modelos matemáticos con volatilidad estocástica se han discutido en la literatura, Clark (1973), Taylor (1982, 1986), Johnson y Shanno (1987), Wiggins (1987), Hull y White (1987, 1988), Scott (1987), Chesney y Scott (1989), Melino y Turnbull (1990), Stein y Stein (1991), Heston (1993), Schöbl y Zhu (1999), entre otros.

Para el presente trabajo de investigación se expone el modelo de Heston en particular, donde el cuadrado de la volatilidad, llamada varianza, sigue un proceso estocástico que se conoce en la literatura financiera como proceso Cox, Ingersoll y Ross (CIR)¹⁰² y en estadística matemática como proceso de Feller¹⁰³.

5.2. Supuestos del modelo

El modelo de Heston se basa principalmente en supuestos que permiten estimar parámetros que tienen una interpretación analítica para los precios de las opciones europeas, de manera inicial. Estos resultados permiten realizar ajustes considerando los precios de mercado. El relajar el supuesto de volatilidad constante, y considerarla estocástica, positiva y acotada en un rango, permite recoger efectos de segundo orden, por ejemplo, la volatilidad de la volatilidad, fundamental en la valuación de opciones exóticas.

¹⁰² El proceso CIR se puede escribir como

$$d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2) dt + \gamma\sigma_t dU_t$$

¹⁰³ El proceso de Feller se puede definir por una ecuación diferencial estocástica

$$dY_s = (\alpha - Y_s) ds + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{Y_s} dW_s$$

En el caso de que $2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \geq 1$, el proceso se mantiene positivo para todo t , (en términos de Feller, la frontera en cero es llamada frontera de entrada, definida como el inicio del proceso pero no el regreso. El proceso de Feller se convierte en estacionario asintóticamente con $s \rightarrow \infty$. Véase Karlin y Taylor (1981), pág. 234.

El modelo de Heston supone que el subyacente, S_t , es guiado por la siguiente dinámica estocástica,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t^2 S_t dW_{1t}, \quad [5.1]$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\{W_{1t}\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

El modelo también supone que la volatilidad instantánea, σ_t , de un activo subyacente, por ejemplo una acción, sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck de la siguiente forma

$$d\sigma_t = -\alpha_t \sigma_t dt + \beta_t dW_{2t}, \quad [5.2]$$

donde $\{W_{2t}\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Al utilizar el lema de Itô para obtener la varianza del proceso σ_t^2 en [5.2] se obtiene

$$d\sigma_t^2 = (\beta_t^2 - 2\alpha_t \sigma_t^2) dt + 2\beta_t \sqrt{\sigma_t^2} dW_{2t}. \quad [5.3]$$

Lo anterior puede representarse de manera similar considerando un proceso CIR, pero con parámetros definidos por

$$a = 2\alpha_t, \quad b = \frac{\beta_t^2}{2\alpha_t}, \quad \gamma = 2\beta_t.$$

Se supone que los procesos dW_{1t} y dW_{2t} se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt.$$

Un supuesto importante que considera el modelo por simplicidad, es que la tasa de interés es constante. El precio en el tiempo t de un bono descontado que madura en el tiempo $t + \tau$ es

$$P(t, t + \tau) = e^{-r\tau}. \quad [5.4]$$

Este supuesto se considera insuficiente para la fijación de precios, si no se determina el precio del riesgo de la volatilidad.¹⁰⁴

Un último supuesto que se considera es que el activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.

5.3. Derivación del Modelo

En el modelo de Heston al igual que en el modelo de Black-Scholes, los procesos que siguen los precios de los activos subyacentes son similares, con la diferencia de que el primero considera que la volatilidad sigue su propio proceso estocástico.

El modelo de Heston considera que S_t está definido por el siguiente proceso estocástico,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t}, \quad [5.5]$$

donde dW_{1t} es un proceso de Wiener.

¹⁰⁴ Sin embargo, si se consideran los argumentos de arbitraje, se puede demostrar que el valor de cualquier activo $U(S, v, t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} v S^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} \rho \sigma v S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial U}{\partial S} r S + \frac{\partial U}{\partial v} \{ \kappa [\theta - v(t)] - \lambda(S, v, t) \} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

donde el término $\lambda(S, v, t)$ representa el riesgo por volatilidad.

En la literatura financiera se considera que la volatilidad v_t sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la forma

$$d\sqrt{v_t} = -\beta \sqrt{v_t} dt + \delta dW_{2t}, \quad [5.6]$$

donde dW_{2t} es otro proceso de Wiener, tal que ambos procesos, W_{1t} y W_{2t} están correlacionados con correlación ρ .

Sea $v_t = \sqrt{\sigma_t^2}$ y aplicando el lema de Itô en $f(v_t) = v_t^2$, el resultado es

$$dv_t = (\delta^2 - 2\beta v_t) dt + 2\delta v_t dW_{2t}, \quad [5.7]$$

donde los parámetros están definidos de manera similar al proceso CIR representado por [5.3], obteniendo así, la ecuación de la varianza denotada por [5.9], utilizada por primera vez por Stein y Stein (1991), y que considere las siguientes definiciones

$$\kappa = 2\beta, \quad \theta = \frac{\delta^2}{2\beta}, \quad \sigma = 2\delta.$$

Por lo tanto, el modelo de Heston queda especificado por los dos siguientes procesos

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t}, \quad [5.8]$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_t \sqrt{v_t} dW_{2t}, \quad [5.9]$$

$$E[dW_{1t}, dW_{2t}] = \rho dt,$$

donde los parámetros del modelo son:

μ : deriva del proceso para el activo, también considerada como la tasa de crecimiento del activo subyacente.

κ : velocidad de reversión a la media de la varianza¹⁰⁵.

θ : nivel de reversión a la media de la varianza en largo plazo.

σ_t : la volatilidad de la varianza¹⁰⁶.

ρ : correlación entre los movimientos Brownianos, W_{1t} y W_{2t} .

v_0 : nivel inicial de la varianza, en $t = 0$.

La relación entre el parámetro θ y la volatilidad de v_t determina la deriva instantánea de v . Si $\theta < v$, entonces el proceso decrece hasta que la volatilidad se reduce hasta el parámetro θ . Posteriormente vuelve a subir y así sucesivamente. El parámetro θ es la variación a largo plazo. El parámetro κ muestra que tan rápido el proceso regresa a θ . Una κ alta implica una mayor tasa de reversión, y viceversa. El parámetro σ en [5.8] es la volatilidad de la volatilidad. Finalmente la correlación entre los dos procesos de Wiener está denotado por ρ , donde $\rho \in [-1, 1]$.

5.4. La ecuación diferencial parcial del modelo de Heston

La obtención de la ecuación diferencial parcial para el modelo de Heston es un caso particular de los modelos generales¹⁰⁷ de volatilidad estocástica. La construcción del portafolio¹⁰⁸ Π , se plantea de manera similar al modelo de

¹⁰⁵ Si $\kappa > 0$, la varianza instantánea es estable asintóticamente. Para que la varianza instantánea sea mayor que cero, es necesario que $2\kappa\theta > \sigma^2$, restricción conocida como *condición de Feller*.

¹⁰⁶ Cuando $\sigma = 0$, la función es determinística y depende del tiempo.

¹⁰⁷ Los modelos generales de volatilidad estocástica satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t}$$

$$dv_t = \alpha(S_t, v_t) dt + \sigma \beta(S_t, v_t) \sqrt{v_t} dW_{2t}$$

donde los movimientos Brownianos tienen correlación ρdt .

Black-Scholes con una opción con precio $V = V(S, v, t)$, con $-\Delta$ unidades de un activo S_t , y con $-\phi$ unidades de otra opción con precio $U = U(S, v, t)$, que se usa para cubrir la volatilidad. Cabe recordar, que en este modelo existen dos fuentes de aleatoriedad, una la del activo y la segunda la de la volatilidad. El portafolio tiene un valor de

$$\Pi = V - \Delta S_t - \phi U, \quad [5.10]$$

Para obtener el valor del cambio en el portafolio en un instante dt es necesario diferenciar con respecto a las variables S_t , v_t y t . En principio el cambio en el portafolio se expresa como

$$d\Pi = dV - \Delta dS_t - \phi dU, \quad [5.11]$$

para obtener $d\Pi$, obtenemos dV utilizando el lema de Itô, donde

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} v S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} v \sigma^2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S dt. \quad [5.12]$$

Hay que considerar que

$$(dS)^2 = v S^2 (dW_1)^2 = v S^2 dt.$$

$$(dv)^2 = \sigma^2 v dt, \text{ y}$$

$$dS dv = S v \sigma dW_1 dW_2 = S v \sigma \rho dt. \text{ }^{109}$$

¹⁰⁸ En principio cuando la volatilidad no es constante, es necesario incluir supuestos sobre el equilibrio de los precios de los activos considerando las preferencias de los inversionistas ante el riesgo para la determinación de la prima de riesgo. Básicamente, se debe a que cuando un activo está perfectamente correlacionado con la volatilidad, no es un activo negociado, y por tanto el precio del riesgo de volatilidad no está reflejado en su precio y las opciones no se pueden valorar considerando únicamente la opción y el activo subyacente, falta el activo que depende de la volatilidad.

¹⁰⁹ Se utilizaron las reglas de diferenciación estocástica, $(dt)^2 = 0$ y $dW_1 dt = dW_2 dt = 0$.

Aplicando el lema de Itô a dU se obtiene el mismo resultado, pero en términos de U , es decir,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} v S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} v \sigma^2 dt + \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S dt, \quad [5.13]$$

al combinar los dos resultados, el cambio en el valor del portafolio, $d\Pi$, se puede expresar como,

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} v S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} v \sigma^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S \right) dt \\ &+ \phi \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} v S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} v \sigma^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S \right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \phi \frac{\partial U}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V}{\partial v} - \phi \frac{\partial U}{\partial v} \right) dv. \end{aligned} \quad [5.14]$$

5.5. Portafolio sin riesgo

Dentro de los objetivos al construir el portafolio, es que se garantice cobertura contra los movimientos del activo y de la volatilidad, es decir, un portafolio autofinanciable, para ello, los últimos dos términos de la ecuación [14] deben de ser cero. Esto significa que los parámetros de cobertura para tener un portafolio libre de riesgo deben ser

$$\phi = \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}}, \quad [5.15]$$

y

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} - \phi \frac{\partial U}{\partial S}. \quad [5.16]$$

De esta forma, el portafolio obtiene una tasa libre de riesgo, r . Por lo que se tiene

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V + \Delta S_t + \phi U)dt. \quad [5.17]$$

Al considerar los valores de ϕ y Δ de la ecuación [5.15] y [5.16] el cambio en el valor del portafolio libre de riesgo es

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} vS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} v\sigma^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S \right) dt \\ & + \phi \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} vS^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} v\sigma^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S \right) dt, \end{aligned} \quad [5.18]$$

y se puede escribir como

$$d\Pi = (A + \phi B)dt, \quad [5.19]$$

por tanto, se tiene

$$A + \phi B = r(V + \Delta S + \phi U), \quad [5.20]$$

sustituyendo para ϕ y ordenando, se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{A - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{B - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \quad [5.21]$$

El lado izquierdo de la ecuación [5.21] es solo función de V , y el lado derecho es solo función de U . Esto implica que ambas funciones pueden ser es-

critas como una función $f(S, v, t)$. De acuerdo al modelo de Heston, la función se especifica como $f(S, v, t) = -\kappa(\phi - v) + \lambda(S, v, t)$, donde $\lambda(S, v, t)$ es el precio del riesgo por volatilidad.¹¹⁰

El lado izquierdo de la ecuación [5.21] se puede escribir como:

$$\frac{A - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = -\kappa(\phi - v) + \lambda(S, v, t), \quad [5.22]$$

sustituyendo para A y agrupando para obtener la ecuación diferencial parcial de Heston expresada en términos del precio S se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} v S^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} v \sigma^2 - rV + \frac{\partial V}{\partial S} rS \\ + \frac{\partial V}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)] = 0. \end{aligned} \quad [5.23]$$

Esta es la ecuación (6) que aparece en el trabajo de Heston (1993). La ecuación diferencial parcial en la ecuación [5.23] se puede escribir como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V - rV = 0$$

¹¹⁰ Heston se basa en el modelo de Breeden (1979) que considera un modelo basado en el consumo bajo la siguiente ecuación

$$\lambda(S, v, t) dt = \gamma \text{Cov} \left[dv, \frac{dC}{C} \right],$$

donde $C(t)$ es la tasa de consumo y γ es la aversión relativa al riesgo de un inversionista. Algunos modelos consideran el precio del riesgo por volatilidad proporcional a la varianza, λv . Por ejemplo, el proceso del consumo en el modelo macroeconómico planteado por Cox, Ingersoll y Ross (1985), bajo condiciones de equilibrio general, considera una prima de riesgo con estas características bajo la siguiente ecuación:

$$dC(t) = \mu_c v(t) C dt + \sigma_c \sqrt{v(t)} C dz_3(t).$$

donde

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S^2} vS^2 + \frac{\partial}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial V}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S, \quad [5.24]$$

ecuación que determina el modelo de Heston. De acuerdo a Lewis¹¹¹, la primera parte de la ecuación [5.24] es la ecuación que determina el modelo de Black-Scholes, y en la segunda parte se agregan las correcciones por volatilidad estocástica.

Heston hace un supuesto importante al considerar $\lambda(S, v, t)$ como una función lineal. Además considera a $x = \ln S_t$ o $S = e^x$ y la ecuación diferencial parcial se expresa en términos de x , t , y v en lugar de S , t y v . Lo cual nos lleva a obtener de manera simple la ecuación diferencial parcial, al derivar de la siguiente manera utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} = e^{-x} \frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = \left(e^{-x} \frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \frac{\partial x}{\partial S}$$

$$= \left(-\frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \frac{1}{S} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{S} \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x},$$

si sustituimos los resultados obtenidos en la ecuación [5.23] se obtiene

¹¹¹ Lewis plantea la ecuación de la volatilidad del modelo de Heston como un proceso de raíz cuadrada. Para una mayor explicación véase Lewis (2000), capítulo 1.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} v + \frac{\partial V}{\partial x} \left(r - \frac{1}{2} v \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x} \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \sigma^2 v - rV + \frac{\partial V}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0 \quad [5.25]$$

Al relacionar la ecuación diferencial [5.23] con los resultados obtenidos, la principal diferencia en [5.25] es que los coeficientes de las derivadas parciales no contienen términos S o x haciendo más sencillo resolverla. Al cancelarse todos los términos S o x se obtiene la ecuación diferencial parcial de Heston en términos del logaritmo del precio $x = \ln S_t$ o $S = e^x$. Además se verifica que el precio de mercado del riesgo es una función lineal de la volatilidad, donde $\lambda(S, v, t) = \lambda v$.

5.6. El precio de una opción call

Una opción call europea con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T que satisface la ecuación diferencial parcial [5.23] se plantea de manera similar al modelo de Black-Scholes

$$V(S, v, t) = SP_1 - e^{-r\tau} KP_2, \quad [5.26]$$

bajo las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} V(S, v, T) &= \max(0, S - K), \\ V(0, v, t) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial S}(\infty, v, t) &= 1, \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) rS + \frac{\partial V}{\partial v}(S, 0, t) \kappa \theta - rV(S, 0, t) + V(S, 0, t) &= 0, \\ V(S, \infty, t) &= S. \end{aligned} \quad [5.27]$$

El precio de una opción call se expresa de la ecuación [5.26] como

$$V(S, v, t) = e^x P_1 - e^{-r \tau} K P_2, \quad [5.28]$$

donde P_1 y P_2 son funciones de densidad acumuladas que determinan la probabilidad de que la opción se encuentre *in-the-money* en la fecha de vencimiento.

Una forma alternativa para determinar el precio de una opción es la siguiente

$$\begin{aligned} V(K) &= e^{-r \tau} E[(S_T - K)^+] & [5.29] \\ &= e^{-r \tau} E[S_T 1_{S_T > K}] - e^{-r \tau} K E[1_{S_T > K}] \\ &= e^{-x} P_1(x, v, \tau) - e^{-r \tau} K P_2(x, v, \tau). \end{aligned}$$

En esta expresión $P_j(x, v, \tau)$ representa la probabilidad de la expiración de la opción call *in-the-money*, el valor depende de $x_t = \ln S_t$ del activo y del valor de la volatilidad v en el tiempo t , donde $\tau = T - t$ es el tiempo de expiración. Por tanto,

$$P_j(x, v, \tau) = Pr(\ln S_T > \ln K), \quad [5.30]$$

para $j = 1, 2$. Como puede observarse, la valuación considera probabilidades bajo diferentes medidas de probabilidad. La ecuación [5.29] considera el valor esperado de $E[1_{S_T > K}]$ que permite obtener la probabilidad de que la opción call expire *in-the-money* bajo la medida de probabilidad original \mathbb{Q} ,¹¹² por tanto, se tiene

¹¹² La medida de probabilidad \mathbb{Q} considera movimientos Brownianos a W_{1t} y W_{2t} en [5.1] y [5.2].

$$E^{\mathbb{Q}}[1_{S_T > K}] = \mathbb{Q}(S_T > K) \quad [5.31]$$

$$= \mathbb{Q}(\ln S_T > \ln K) = P_2(x, v, \tau).$$

Al evaluar $e^{-r\tau} E[S_T 1_{S_T > K}]$ en la ecuación [5.29] es necesario cambiar la medida original \mathbb{Q} por una nueva medida \mathbb{P} , usando la derivada de Radon-Nikodyn se tiene

$$\mathbb{Z}_t = \frac{S_t/S_T}{B_t/B_T},$$

donde $B_t = \exp\left(\int_0^t r ds\right) = e^{rt}$. Entonces el segundo momento es

$$e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}}[S_T 1_{S_T > K}] = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t}{B_T} S_T 1_{S_T > K}\right] \quad [5.32]$$

$$= E^{\mathbb{P}}\left[\frac{B_t}{B_T} S_T 1_{S_T > K} \mathbb{Z}_t\right]$$

$$= S_t E^{\mathbb{P}}[1_{S_T > K}]$$

$$= e^{x_t} \mathbb{P}(S_T > K) = e^{x_t} P_1(x, v, \tau).$$

Esto implica que el precio de la opción call en la ecuación [5.29] se puede escribir en términos de las dos medidas de probabilidad como

$$V(K) = S_t \mathbb{P}(S_T - K) - K e^{-r\tau} \mathbb{Q}(S_T - K). \quad [5.33]$$

Finalmente, la ecuación [5.28] o [5.29] permiten obtener el precio de una opción europea, para ello son necesarias las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial t} - r e^{-r\tau} K P_2 - e^{-r\tau} K \frac{\partial P_2}{\partial t} = e^x \left[\frac{\partial P_1}{\partial t} \right] - K e^{-r\tau} \left[r P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial t} \right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^x P_1 + e^x \frac{\partial P_1}{\partial x} - e^{-r\tau} K \frac{\partial P_2}{\partial x} = e^x \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] - K e^{-r\tau} \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= e^x P_1 + 2e^x \frac{\partial P_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - e^{-r\tau} K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ &= e^x \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] - K e^{-r\tau} \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} - e^{-r\tau} K \frac{\partial P_2}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - e^{-r\tau} K \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} + e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} - e^{-r\tau} K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} = e^x \left[\frac{\partial P_1}{\partial v_t} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v_t} \right] - K e^{-r\tau} \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v_t} \right],$$

sustituyendo los resultados obtenidos de las derivadas parciales¹¹³ en [5.25] se tiene

¹¹³ Al obtener las derivadas parciales es necesario obtener la derivada respecto a la maduración, τ , en vez de derivar con respecto a t , es decir,

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{\partial V}{\partial \tau}.$$

$$e^x[f(P_1)] - e^{rt-rT}K[f(P_2)] = 0, \quad [5.34]$$

donde $f(P_i)$ con $i = 1, 2$ es una función polinomial de P_i . Una solución para [5.34] es

$$f(P_1) = f(P_2) = 0.$$

5.7. La ecuación diferencial parcial para P_1 y P_2

El precio de la opción call planteado por la ecuación [5.28] o [5.29] que es guiado por la ecuación diferencial parcial [5.25], puede escribirse en términos de V derivando también con respecto a τ en lugar de t , teniendo

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} v + \frac{\partial V}{\partial x} \left(r - \frac{1}{2} v \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v} \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \sigma^2 v - rV + \frac{\partial V}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0. \quad [5.35]$$

Para obtener la ecuación diferencial parcial del modelo de Heston para P_1 y P_2 , se observa que la ecuación diferencial parcial en la ecuación [5.35] es independiente de los términos de la opción call.

Por tanto, si $K = 0$ y $S = 1$ en la ecuación [5.29] se obtiene una opción cuyo precio es P_1 . De la misma forma, si se considera que $K = 1$, $S = 0$ y $r = 0$ en la ecuación [5.29] se obtiene una opción cuyo precio es $-P_2$, que al igual que P_1 y P_2 también se rige por la ecuación diferencial parcial.

Esto supone que las derivadas parciales se pueden agrupar en términos comunes para P_1 . Sustituyendo en la ecuación [5.35] se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v_t \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] + \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) \\ & + \left[\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \sigma^2 v - r[e^x P_1 - e^{-r\tau} K P_2] + \frac{\partial P_1}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0, \end{aligned} \quad [5.36]$$

si se considera para P_1 que $K = 0$ y $S = 1$ en la ecuación [5.36], se tiene

$$f(P_1) = -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] v + \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} \right] \left(r - \frac{1}{2} v \right) + \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial P_1}{\partial v} [\rho \sigma v + \kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0. \quad [5.37]$$

De manera similar, si se agrupan términos comunes para P_2 en la ecuación [5.35] y se sustituyen, se tiene

$$\left[r P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right] v_t + \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} \right] \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) + \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v_t} \right] \rho \sigma v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \sigma^2 v - r [e^x P_1 - e^{-r \tau} K P_2] + \frac{\partial P_2}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0, \quad [5.38]$$

si se considera para P_2 que $K = -1$, $S = 0$ y $r = 0$, en la ecuación [5.36], se tiene

$$f(P_2) = -\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right] v + \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} \right] \left(r - \frac{1}{2} v \right) + \left[\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \right] \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial P_2}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda v] = 0. \quad [5.39]$$

Por conveniencia, se combinan las ecuaciones [5.37] y [5.39] en una sola expresión, teniendo entonces la ecuación (12) del trabajo de Heston (1993) en términos de τ en lugar de t

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} \right] v + \left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v_t} \right] \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial P_j}{\partial x} (r + u_j v) + \frac{\partial P_j}{\partial v_t} (a - b_j v) = 0, \quad [5.40]$$

para $j = 1, 2$ y donde $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, y $b_2 = \kappa + \lambda$. Desafortunadamente, las funciones de probabilidad acumuladas P_j en [5.40] no se pueden obtener de manera inmediata con solución cerrada. Sin embargo, se puede demostrar que sus funciones características $f_j(x, v, T; \phi)$ pueden satisfacer la ecuación diferencial parcial de Heston.

5.8. Funciones características

Las funciones características se representan por $f_1(\phi; x, v)$ y $f_2(\phi; x, v)$ correspondientes a las probabilidades *in-the-money* para P_1 y P_2 que son conocidas, cada probabilidad puede ser tomada de su función característica vía el Teorema de inversión

$$P_j = \Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi. \quad [5.41]$$

En la fecha de maduración, cuando $t = T$ y $\tau = 0$ las probabilidades están sujetas a la siguiente condición final

$$P_j(x, v, T; \phi) = e^{i\phi x}, \quad [5.42]$$

de manera alternativa

$$P_j(x, v, 0) = 1_{x > \ln K}, \quad [5.43]$$

lo que significa que al vencimiento, cuando $S_T > K$ la probabilidad de que la opción call este *in-the-money* es la unidad. Heston supone que las funciones características son log-lineales y la solución es de la forma

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x}, \quad [5.44]$$

donde C_j y D_j son funciones de τ , que es el tiempo para la maduración. Las funciones características f_j siguen la ecuación diferencial parcial presentada en la ecuación [5.40]. Esto es una consecuencia del Teorema de Feynman–Kac, el cual estipula que si una función $f(x_t, t)$ de la ecuación diferencial estocástica x_t satisface la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial f}{\partial t} - rf + \mathcal{A}f = 0$ con condición final $f(x_T, T)$, entonces $x_t = (\ln S_t, v_t)$ es el proceso de difusión bivariado de Heston y \mathcal{A} es el determinante de la ecuación [5.24] por lo que se tiene

$$\mathcal{A} = rS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S^2} v S^2 + \frac{\partial}{\partial v \partial S} \rho \sigma v S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial}{\partial v} [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)], \quad [5.45]$$

entonces la solución para f es

$$f(x_t, t) = E[f(x_T, T) | x_t = x, v_t = v], \quad [5.46]$$

usando $f(x_T, T) = e^{i\phi x_T} = e^{i\phi \ln S_T}$, se obtiene la solución

$$f(x_t, t) = E[e^{i\phi \ln S_T} | \ln S_t = S, v_t = v], \quad [5.47]$$

que es la función característica para $\ln S_T$. Por lo que la ecuación diferencial parcial de la función característica es, a partir de la ecuación [5.40] la ecuación (A4) del apéndice del trabajo de Heston (1993)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} \rho \sigma v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \sigma^2 v + \frac{\partial f}{\partial x} (r + u_j v) + \frac{\partial f}{\partial v} (a - b_j v) = 0. \quad [5.48]$$

Para evaluar la ecuación diferencial parcial para la función característica se necesitan las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t}v\right)f, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = i\phi f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = i\phi Df,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\phi^2 f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = D^2 f,$$

sustituyendo las derivadas en la ecuación [5.48] y con la eliminación de los términos f se obtiene

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t}v\right)f + \rho\sigma i\phi Df - \frac{1}{2}v\phi^2 f + \frac{1}{2}v\sigma^2 D^2 + (r + u_j v)i\phi f + (a - b_j v)Df = 0, \quad [5.49]$$

de manera equivalente, se tiene

$$\left(\frac{\partial D}{\partial t} + \rho\sigma i\phi D - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + u_j i\phi - b_j D\right)v + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + ri\phi + aD\right) = 0. \quad [5.50]$$

Esto permite plantear un sistema de dos ecuaciones diferenciales Riccati

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial t} + \rho\sigma i\phi D - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + u_j i\phi - b_j D \\ &= 0 \end{aligned} \quad [5.51]$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + ri\phi + aD = 0$$

Estas son las ecuaciones (A7) del apéndice en el trabajo de Heston (1993). Heston especifica que las condiciones iniciales son $D(0, \phi) = 0$ y $C(0, \phi) = 0$. La primera ecuación en [5.51] es una ecuación de Riccati en D mientras que la segunda es una ecuación diferencial ordinaria para C que puede resolverse usando integración directa una vez obtenida D .

5.9. Solución de la ecuación Riccati

La ecuación de Riccati para $y(t)$ con coeficientes $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$

$$\frac{dy(t)}{dt} = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)y(t)^2 \quad [5.52]$$

puede resolverse considerando la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para $w(t)$

$$w'' - \left[\frac{P'}{P} + Q \right] w' + PRw = 0 \quad [5.53]$$

y que se puede escribir como $w'' + bw' + cw = 0$. Por tanto, la solución a la ecuación [5.53] es

$$y(t) = -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{R(t)}.$$

La ecuación diferencial ordinaria en la ecuación [5.53] puede ser resuelta utilizando la ecuación auxiliar $x^2 + bx + c = 0$ que tiene dos soluciones dadas por

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la ecuación [5.44] es $w(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$, donde A y B son constantes. La solución a la ecuación de Riccati es por tanto

$$y(t) = -\frac{A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}}{Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}} \frac{1}{R(t)}. \quad [5.54]$$

Al considerar el sistema de ecuaciones Riccati [5.51] en el modelo de Heston, se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} = P - QD + RD^2 \quad [5.55]$$

donde

$$P = u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2.$$

$$Q = b_j - \rho \sigma i \phi.$$

$$R = \frac{1}{2} \sigma^2.$$

La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden correspondiente es

$$w'' + Qw' + PR = 0 \quad [5.56]$$

donde $D = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w}$. La ecuación auxiliar es $r'' + Qr' + PR = 0$, con las siguientes raíces

$$\alpha = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2} = \frac{-Q + d_j}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2} = \frac{-Q - d_j}{2},$$

donde

$$d_j = \alpha - \beta = \sqrt{Q^2 - 4PR} = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}.$$

En general, se omite el subíndice j para algunas variables por simplicidad en la notación. La solución de la ecuación [5.51] de Riccati para el modelo de Heston es

$$D = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w} = -\frac{1}{R} \left(\frac{A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}}{Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}} \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{K\alpha e^{\alpha t} + \beta e^{\beta t}}{Ke^{\alpha t} + e^{\beta t}} \right), \quad [5.57]$$

donde $K = \frac{A}{B}$. La condición inicial para $D(0, \phi) = 0$ implica que

$$D = -\frac{\beta}{R} \left(\frac{-e^{\alpha t} + e^{\beta t}}{-g_j e^{\alpha t} + e^{\beta t}} \right) = -\frac{\beta}{R} \left(\frac{1 - e^{d_j t}}{1 - g_j e^{d_j t}} \right), \quad [5.58]$$

donde

$$g_j = -K = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}.$$

La solución para D se puede escribir como

$$D = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j t}}{1 - g_j e^{d_j t}} \right) \quad [5.59]$$

La solución para C se encuentra integrando la segunda ecuación en [5.51]

$$C = \int_0^t ri\phi dy + a \left(\frac{Q + d_j}{2R} \right) \int_0^t \left(\frac{1 - e^{d_j t}}{1 - g_j e^{d_j t}} \right) dy.$$

La solución de la primera integral es $ri\phi t$ y la solución de la segunda integral se encuentra por sustitución considerando $x = e^{d_j y}$, donde $dx = d e^{d_j y} dy$ y $y = \frac{1}{x d} dx$. Finalmente, se tiene

$$C = ri\phi t + \frac{a}{d_j} \left(\frac{Q + d_j}{\sigma^2} \right) \int_1^{e^{d_j t}} \left(\frac{1 - x}{1 - g_j x} \right) \frac{1}{x} dx. \quad [5.60]$$

La integral en la ecuación [5.59] se resuelve mediante fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{d_j t}} \frac{1 - x}{x(1 - g_j x)} dx &= \int_1^{e^{d_j t}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1 - g_j}{1 - g_j x} \right] dx \\ &= \left[\ln x + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln(1 - g_j x) \right]_{x=1}^{x=e^{d_j t}} \\ &= \left[dt + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j t}}{1 - g_j} \right) \right], \end{aligned}$$

sustituyendo la integral en [5.59] y considerando d_j , Q y g_j se obtiene la solución para C

$$C = r i \phi t + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho \sigma i \phi + d_j) t - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j t}}{1 - g_j} \right) \right]. \quad [5.61]$$

Con la ecuación [5.61] se tiene el desarrollo completo del modelo de Heston.

5.10. Propiedades del proceso de la varianza

Se puede considerar que la varianza condicional de un valor dado de v_s , sigue un proceso definido por CIR, mediante una distribución chi-cuadrada con $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$ grados de libertad y parámetro $2c_t v_s e^{-\kappa(t-s)}$ no centrado, donde

$$c_t = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}. \quad [5.62]$$

Por tanto, la media condicional y varianza de v_t son, respectivamente:

$$\mu = \theta + (v_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)}, \quad [5.63]$$

y

$$s^2 = \frac{v_t \sigma^2 e^{-\kappa(t-s)}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2. \quad [5.64]$$

6. Valuación de opciones europeas con volatilidad estocástica bajo el modelo de Heston

6.1. Introducción

El presente trabajo de investigación considera el estudio del rendimiento¹¹⁴ del IPC de la BMV, que representa la evolución de los mercados financieros en los mercados emergentes de manera clara, y como tal la volatilidad de sus títulos negociados en la bolsa de valores. Dicha volatilidad se estima utilizando modelos en tiempo discreto, en particular, modelos tipo ARCH.

La valuación de los precios de las opciones europeas sobre el IPC se obtiene mediante simulación Monte Carlo bajo el modelo de Heston.

A continuación se exponen las variables a utilizar, sus propiedades estadísticas, las especificaciones funcionales que capturan la varianza, los principales resultados y estimaciones bajo el modelo de Heston.

6.2. El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

El IPC expresa el rendimiento del mercado accionario mexicano y es el principal indicador de la BMV. EL IPC está compuesto por las series accionarias que cumplen con dos criterios de selección: rotación diaria y valor de

¹¹⁴ La variaciones en los precios de los índices determinan su rendimiento, y dicho rendimiento es impredecible, probablemente con valores extremos, incluso se puede afirmar que el comportamiento de mayor movimiento, como el de menor movimiento estarán agrupados en el tiempo, característica que generalmente está acompañada con exceso de curtosis.

mercado ajustado por acciones flotantes¹¹⁵. No se considerarán aquellas series que tengan menos de 3 meses de operación o cuando exista la posibilidad de ser suspendidas o retiradas del mercado.

El cuadro 6.1. presenta las series accionarias que componen el IPC, para una revisión del número de acciones y pesos relativos véase el Anexo 4.

Cuadro 6.1. Series accionarias del IPC

Emisora	Serie
AC	*
ALFA	A
ALSEA	*
AMX	L
ARA	*
ASUR	B
AXTEL	CPO
AZTECA	CPO
BIMBO	A
BOLSA	A
CEMEX	CPO
CHEDRAUI	B
COMERCI	UBC
COMPARC	*
ELEKTRA	*
FEMSA	UBD
GAP	B
GEO	B

Emisora	Serie
GFNORTE	O
GMEXICO	B
GMODELO	C
GRUMA	B
HOMEX	*
ICA	*
KIMBER	A
LAB	B
LIVERPOL	C-1
MEXCHEM	*
MFRISCO	A-1
OHLMEX	*
PEÑOLES	*
SORIANA	B
TLEVISIA	CPO
URBI	*
WALMEX	V

¹¹⁵ Las *acciones flotantes* son las acciones que resultan de restar el total de acciones listadas en Bolsa de aquellas acciones en manos firmes que una empresa reporta. Las *acciones en manos firmes* son aquellas acciones que se encuentran en manos de: accionistas de control; fideicomisos de control, directivos de primer nivel y consejeros; el fondo de pensiones de empleados; empresas tenedoras; socios estratégicos; personas físicas o morales que mantengan vínculos patrimoniales y/o parentesco de manera directa o indirecta y que ostenten al menos el 1% de las acciones listadas o títulos de crédito que representen a la compañía; personas físicas o morales que en lo individual mantengan directa o indirectamente, el 30% de las acciones listadas o títulos de crédito que representen a la compañía; gobiernos que fungen como accionistas y no como parte de un portafolio diversificado de inversión que busca un rendimiento determinado.

Las emisoras que cumplen con los dos criterios¹¹⁶, se ordenan de mayor a menor y forman parte del IPC las primeras 35 series accionarias de las 45 que inicialmente se consideran.¹¹⁷

La fórmula que permite determinar el peso relativo de cada serie accionaria dentro del IPC es

$$\omega_i = \frac{VMAF_i}{VMAF}, \quad [6.1]$$

donde:

ω_i : peso relativo de cada serie accionaria dentro de la muestra del índice.

$VMAF$: valor de mercado ajustado por acciones flotantes del total de series accionarias de la muestra del índice.

$VMAF_i$: valor de mercado ajustado por acciones flotantes de la serie accionaria i

$$VMAF_i = (FAF_i * Q_i) * P_i, \quad [6.2]$$

donde:

FAF_i : factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i .

Q_i : número de acciones inscritas en Bolsa de la serie accionaria i .

P_i : último precio registrado en Bolsa de la serie accionaria i .

¹¹⁶ En caso de que dos series accionarias tengan la misma calificación, se considera como factor de desempate el valor de mercado ajustado por acciones flotantes.

¹¹⁷ Durante la realización del presente trabajo de investigación la muestra del IPC sufrió un cambio al retirar a Telmex e incluir a Asea en la muestra del índice en el mes de noviembre de 2011.

6.2.1. Metodología diaria de cálculo del índice

El IPC mantiene una base de 0.78 que corresponde al 30 de octubre de 1978.

$$I_t = I_{t-1} \left(\frac{\sum P_{it} * (Q_{it} * FAF_i)}{\sum P_{it-1} * (Q_{it-1} * FAF_i) * f_{it-1}} \right), \quad [6.3]$$

donde:

I_t : índice del día t .

P_{it} : precio de la serie accionaria i el día t .

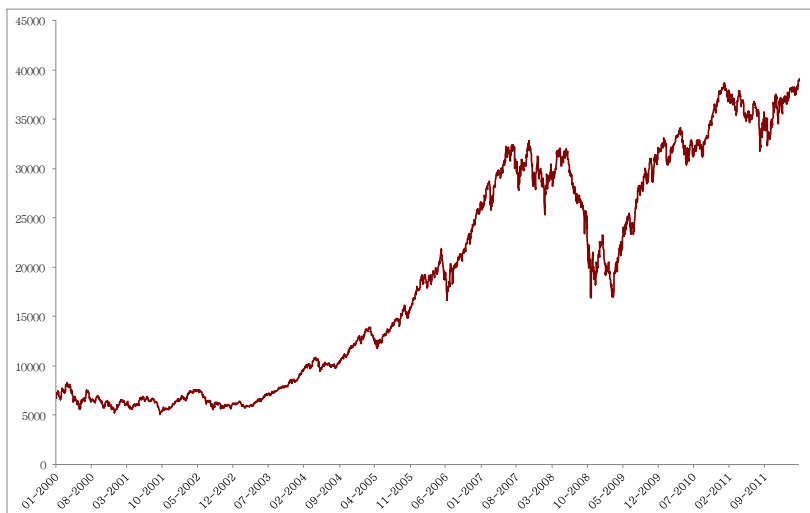
Q_{it} : acciones inscritas de la serie accionaria i el día t .

FAF_i : factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i .

f_i : factor de ajuste por ex-derechos de la serie accionaria i el día t .

i : 1, 2, 3, ... n .

Gráfica 6.1. Evolución del IPC, 2000-2012



Fuente. Elaboración propia.

6.3. Datos

En este análisis se considera información de enero de 2000 a febrero de 2012, teniendo 3,071 datos, eliminando los días en que no hubo operaciones en los mercados.

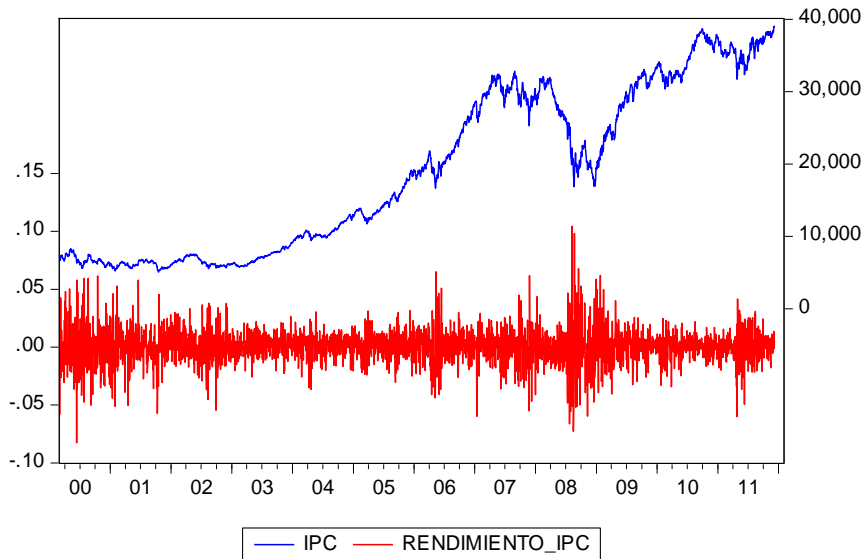
6.4. Análisis estadístico

El análisis estadístico se presenta para las series IPC y para sus rendimientos. Los programas utilizados para efectuar el análisis estadístico y econométrico son Excel 2010 y Econometric Views 7.0.

En la gráfica 6.2. se puede observar la existencia tres periodos definidos de manera clara, crecimiento (2000-2007), inestabilidad (2008-2009) y recuperación (2009-2012). Obviamente la crisis hipotecaria de Estados Unidos afectó a todos los mercados y es por ello que se puede identificar la caída de los precios y el incremento de volatilidad en los índices.

Además, al presentar los datos de los precios de cada índice y su rendimiento en la misma gráfica, se puede observar que coinciden los periodos en que los precios de cierre descienden con la existencia de mayor volatilidad, y cuando los precios de cierre aumentan, la volatilidad es menor, en 2008 sobretodo, es más claro. También es importante mencionar que los rendimientos se comportan como estacionarios en media, pero no en varianza, con lo que será necesario realizar un análisis mediante los correlogramas y la prueba de Dickey Fuller Aumentada (ADF).

Gráfica 6.2. IPC y rendimiento, 2000-2012



Fuente. Elaboración propia.

Las estadísticas descriptivas se presentan en el Cuadro 6.2. Se consideran las series de análisis, el IPC y el rendimiento del IPC.

Cuadro 6.2. Resumen estadístico del IPC y su rendimiento

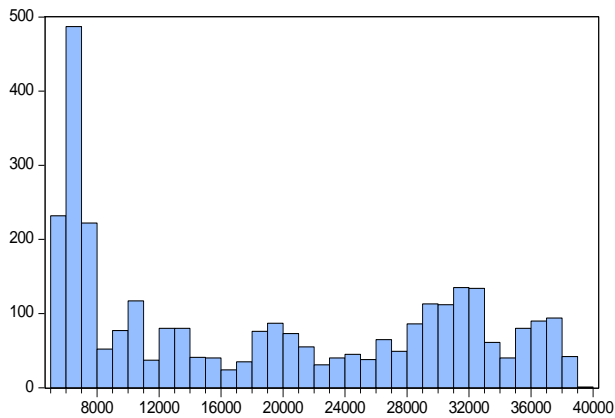
Estadísticos	IPC	Rendimiento IPC
Media	18739.59	0.0005
Mediana	17811.20	0.0011
Máximo	38696.24	0.1044
Mínimo	5081.92	-0.0827
Desviación estándar	11132.55	0.0148
Simetría	0.2477	0.0250
Curtosis	1.5022	7.1536
Jarque-Bera	313.9876	2177.0050
Probability	0.0000	0.0000

Fuente. Elaboración propia.

También se presentan los histogramas para cada una de las series en las siguientes gráficas

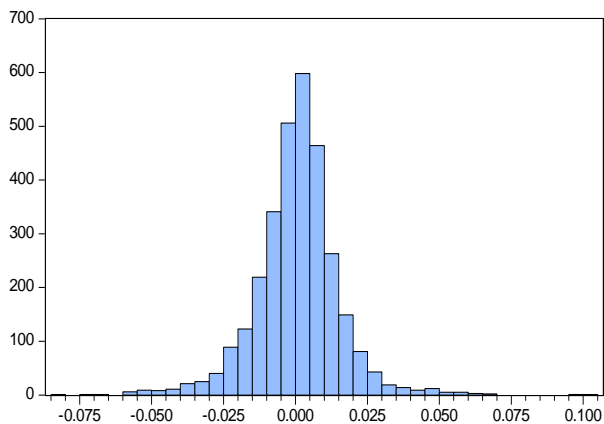
Al revisar los estadísticos de las series en niveles, se puede observar que son asimétricas y platocúrticas, rechazando la existencia de normalidad considerando los resultados proporcionados por el estadístico Jarque-Bera.

Gráfica 6.3. *Histograma IPC*



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.4. *Histograma rendimiento IPC*



Fuente. Elaboración propia.

En el caso de los rendimientos, se pueden observar algunos hechos estilizados, leptocúrtosis, el valor de es muy superior a 3 que representa a una distribución normal, 7.1536 y asimetría positiva, 0.025, lo que confirma nuevamente la ausencia de normalidad para los rendimientos.

En el caso de la serie de rendimientos se tiene que apenas son superiores a cero, 0.0548 para el IPC, lo que indica que existen probabilidades de rendimientos positivos (ganancias), aunque también es posible considerar que en promedio se mueve alrededor de cero, con lo que también valdría la afirmación de que no existen ganancias ni pérdidas.

Con toda la información anterior es necesario determinar la existencia de raíces unitarias mediante la prueba de ADF, donde la hipótesis nula considera que la serie es no estacionaria.

Cuadro 6.3. *Pruebas de raíces unitarias del rendimiento del IPC*

Estadístico	Tendencia + intercepto	Intercepto	Ninguno
Criterio de Akaike	-5.623564	-5.624161	-5.623400
Criterio de Schwarz	-5.609798	-5.612361	-5.613567
Criterio de Hannan-Quinn	-5.618618	-5.619921	-5.619867
Durbin Watson	1.994096	1.994071	1.994086
r^2	0.457390	0.457360	0.456592
Suma de residuos al cuadrado	0.645193	0.645229	0.646141
ADF Test Statistic	-25.88840	-25.88906	-25.79145
1% critical value	-3.961036	-3.432294	-2.565717
5% critical value	-3.411273	-2.862284	-1.940927
10% critical value	-3.127475	-2.567210	-1.616630
Coefficiente del primer retardo	-1.001214	-1.001053	-0.994393
Probabilidad del coeficiente	0.00000	0.00000	0.00000

Fuente. Elaboración propia.

El estadístico Durbin Watson que indica la presencia de autocorrelación en los residuos es estadísticamente significativo, es decir, se eliminaron los problemas de autocorrelación.

En el caso de ambos modelos ni la constante ni la tendencia fueron estadísticamente significativos, lo que sugiere que se podrían estimar dichos modelos sin constante, suponiendo que la media es cero para un análisis de corto plazo, sin embargo, para un análisis de largo plazo no es adecuado realizar este supuesto.

Los resultados nos permiten asegurar que existe evidencia estadística que indica que los rendimientos del IPC son estacionarios, y también permite identificar la existencia de procesos autorregresivos de primer orden, representados por el primer rezago, en todos los casos los coeficientes de los rendimientos fueron estadísticamente significativos.

Cuadro 6 4. Regresión del rendimiento del IPC, modelo AR(1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000578	0.000290	1.994665	0.0462
AR(1)	0.092229	0.017932	5.143167	0.0000
R-squared	0.008551	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.008228	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014578	Akaike info criterion		-5.617907
Sum squared resid	0.651824	Schwarz criterion		-5.613978
Log likelihood	8622.678	Hannan-Quinn criter.		-5.616495
F-statistic	26.45216	Durbin-Watson stat		1.984955
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.09			
Inverted AR Roots	.01			

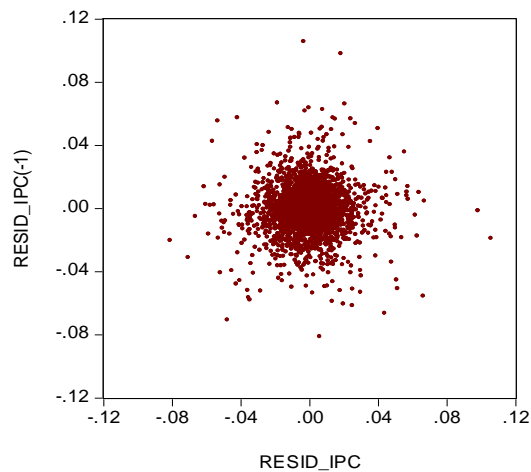
Fuente. Elaboración propia.

Con los resultados obtenidos de la regresión para la ecuación de la media mediante modelos autorregresivos se puede vislumbrar que para los rendimientos del IPC el coeficiente del proceso AR(1) es estadísticamente significativo, se puede descartar la existencia de autocorrelación de los residuos con su pasado.

Asimismo, al realizar una segunda prueba considerando los residuos al cuadrado para descartar por completo la posibilidad de existencia de autocorrelación de primer orden, se realiza el contraste ARCH, que también identifica la existencia de heteroscedasticidad.

Los resultados que se obtienen consideran la conveniencia de construir un modelo del tipo ARCH para identificar de manera adecuada la ecuación de la varianza. Los resultados confirman que no hay una relación estadísticamente significativa entre los residuos al cuadrado y su pasado, lo que significa que no existe autocorrelación entre los residuos. Gráficamente se presentan en las Gráfica 6.5. y los resultados se presentan en el cuadro 6.5.

Gráfica 6.5. *Correlación de los residuos del IPC*



Fuente. Elaboración propia.

Cuadro 6.5. Contraste ARCH para el rendimiento del IPC

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	66.03732	Prob. F(5,3058)	0.0000
Obs*R-squared	298.5939	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 3/10/2000 12/07/2011

Included observations: 3064 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000100	1.11E-05	9.017367	0.0000
RESID^2(-1)	0.061237	0.017851	3.430378	0.0006
RESID^2(-2)	0.151821	0.017795	8.531608	0.0000
RESID^2(-3)	0.057163	0.017954	3.183784	0.0015
RESID^2(-4)	0.094253	0.017770	5.304060	0.0000
RESID^2(-5)	0.158879	0.017815	8.918432	0.0000
R-squared	0.097452	Mean dependent var		0.000211
Adjusted R-squared	0.095977	S.D. dependent var		0.000531
S.E. of regression	0.000504	Akaike info criterion		-12.34416
Sum squared resid	0.000778	Schwarz criterion		-12.33236
Log likelihood	18917.25	Hannan-Quinn criter.		-12.33992
F-statistic	66.03732	Durbin-Watson stat		2.041920
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fuente. Elaboración propia.

Otro contraste que es necesario revisar es el estadístico de White para determinar la existencia de heteroscedasticidad. Es un estadístico muy flexible pero con la desventaja de que no nos indica la naturaleza o forma funcional que podría adoptar la varianza.

Cuadro 6.6. *Contraste de White para detectar heteroscedasticidad*

Heteroskedasticity Test: White

F-statistic	46.06583	Prob. F(2,3066)	0.0000
Obs*R-squared	89.53144	Prob. Chi-Square(2)	0.0000
Scaled explained SS	279.8088	Prob. Chi-Square(2)	0.0000

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Sample: 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069

Collinear test regressors dropped from specification

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000181	1.02E-05	17.81146	0.0000
GRADF_01*GRADF_02	-0.003662	0.000710	-5.158966	0.0000
GRADF_02^2	0.143300	0.017613	8.135885	0.0000
R-squared	0.029173	Mean dependent var		0.000212
Adjusted R-squared	0.028540	S.D. dependent var		0.000531
S.E. of regression	0.000524	Akaike info criterion		-12.26998
Sum squared resid	0.000841	Schwarz criterion		-12.26409
Log likelihood	18831.29	Hannan-Quinn criter.		-12.26786
F-statistic	46.06583	Durbin-Watson stat		2.079262
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fuente. Elaboración propia.

Los resultados ofrecen evidencia que permite considerar que los rendimientos del IPC pueden ser modelados de manera adecuada por modelos de la familia ARCH. Las series leptocúrticas, asimétricas, ausencia o escasa correlación en los residuos, varianza no constante, agrupamiento de volatilidades y persistencia de la volatilidad son capturados de manera adecuada por dichos modelos.

6.5. Especificaciones modelos tipo ARCH

Los resultados confirman que la correcta especificación de la ecuación de la varianza puede ser modelada por un modelo de la familia ARCH. En el cuadro 6.7. se presentan algunos estadísticos y criterios que sirven para elegir el mejor modelo por sus propiedades estadísticas.

Cuadro 6. 7. *Regresiones modelos familia ARCH de un proceso AR(1) para los rendimientos del IPC*

Modelo	r^2	Suma de cuadrados de los residuos	Criterio de Akaike	Criterio de Schwarz	Criterio Hannan-Quinn
ARCH(1)	0.00644	0.653212	-5.662673	-5.654815	-5.65985
GARCH(1,1)	0.007082	0.652577	-5.887874	-5.878051	-5.884345
GARCH(1,2)	0.00738	0.652594	-5.887277	-5.875490	-5.883043
GARCH(1,3)	0.00727	0.652666	-5.888395	-5.874644	-5.883455
GARCH(2,1)	0.007343	0.652619	-5.887348	-5.875561	-5.883113
GARCH(2,2)	0.007423	0.652566	-5.888039	-5.874288	-5.883099
GARCH(2,3)	0.007321	0.652633	-5.888461	-5.872744	-5.882814
GARCH(3,1)	0.007275	0.652663	-5.88887	-5.8751519	-5.88393
GARCH(3,2)	0.007338	0.652622	-5.892058	-5.876342	-5.886411
GARCH(3,3)	0.007327	0.652629	-5.892143	-5.874463	-5.885791
EGARCH(1,1)	0.008448	0.651892	-5.924208	-5.912421	-5.919973

Fuente. Elaboración propia.

Al revisar la especificación funcional, se puede considerar la suma de los coeficientes de los términos ARCH y GARCH, que en el caso de ser cercanos a 1, indican que los shocks son persistentes y que el proceso que determina la varianza converge en el largo plazo a un valor no condicional.

El cuadro 6.8. presenta las estimaciones para la ecuación de la varianza para los rendimientos del IPC mediante modelos de la familia ARCH.

Cuadro 6.8. Regresiones GARCH de un proceso AR(1).

Ecuación de la varianza

Modelo	Coefficiente constante	Coefficiente ARCH(1)	Coefficiente ARCH(2)	Coefficiente ARCH(3)	Coefficiente GARCH(1)	Coefficiente GARCH(2)	Coefficiente GARCH(3)	Suma coeficientes GARCH
ARCH(1)	0.000168	0.227234						0.227234
GARCH (1,1)	2.59E-06	0.082633			0.90557			0.988203
GARCH (1,2)	2.73E-06	0.087733			0.835418	0.064447*		0.923151
GARCH (1,3)	2.85E-06	0.097806			1.078834	-0.621944	0.432468	0.987164
GARCH (2,1)	2.48E-06	0.094326	-0.013570*		0.907984			1.00231
GARCH (2,2)	5.07E-06	0.075193	0.085441		-0.065754	0.881615		0.976495
GARCH (2,3)	3.81E-06	0.082603	0.046941		0.888311	-0.673718	0.638785	0.982922
GARCH (3,1)	1.91E-06	0.087542	0.042270*	-0.062178	0.923663			0.949027
GARCH (3,2)	4.27E-08	0.087378	0.058578**	-0.026687*	1.808336	-0.810712		1.026424
GARCH (3,3)	6.36E-08	0.085455	0.023782*	-0.106063	1.031861	0.618929	-0.654361	0.975821

* No significativo estadísticamente.

** Estadísticamente significativo al 90%.

Fuente. Elaboración propia.

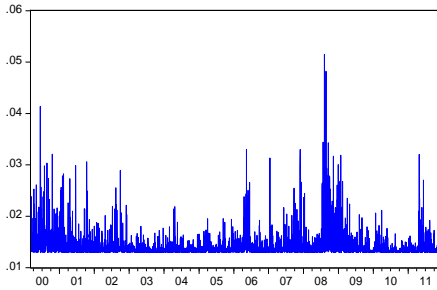
A continuación se presentan las gráficas de la desviación estándar condicional (DEC) y la varianza condicional (VC) obtenidas por los modelos de la familia ARCH.

a) Modelo ARCH(1)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0009 + 0.0545r_{t-1} + \varepsilon_t$

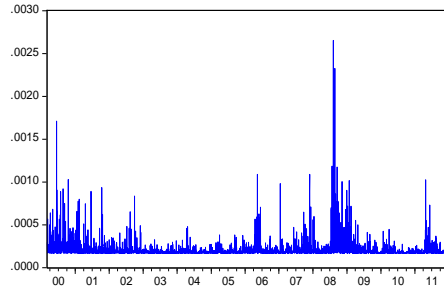
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 0.0001 + 0.2272\varepsilon_{t-1}^2$

Gráfica 6.6. DEC ARCH(1)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.7. VC ARCH(1)



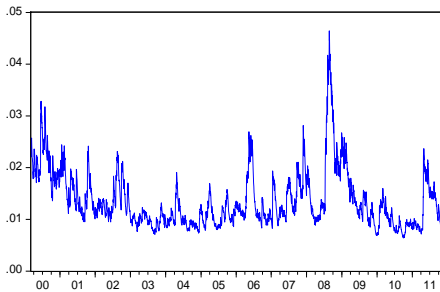
Fuente. Elaboración propia.

b) Modelo GARCH(1,1)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0736r_{t-1} + \varepsilon_t$

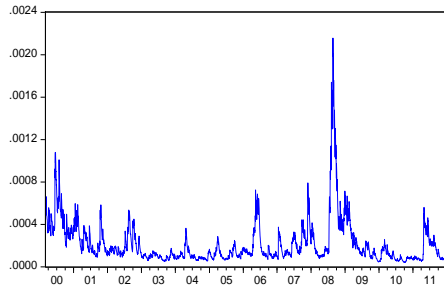
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 2.059E-06 + 0.0826\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9055\sigma_{t-1}^2$

Gráfica 6.8. DEC GARCH(1,1)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.9. VC GARCH(1,1)



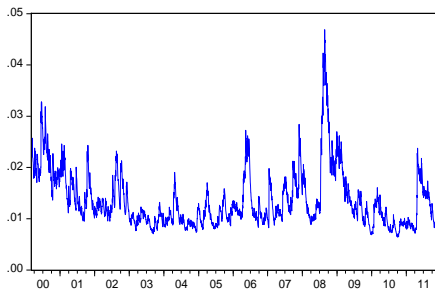
Fuente. Elaboración propia.

c) Modelo GARCH(1,2)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0732r_{t-1} + \varepsilon_t$

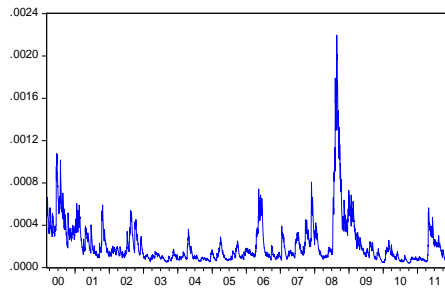
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 2.73E-06 + 0.0877\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8354\sigma_{t-1}^2 + 0.0644\sigma_{t-2}^2$

Gráfica 6.10. DEC GARCH(1,2)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.11. VC GARCH(1,2)



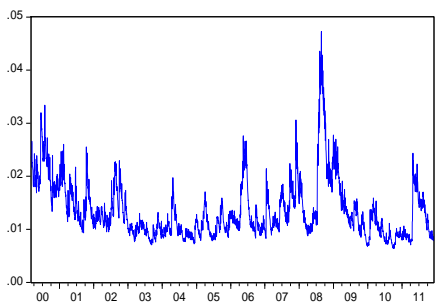
Fuente. Elaboración propia.

d) Modelo GARCH(1,3)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0728r_{t-1} + \varepsilon_t$

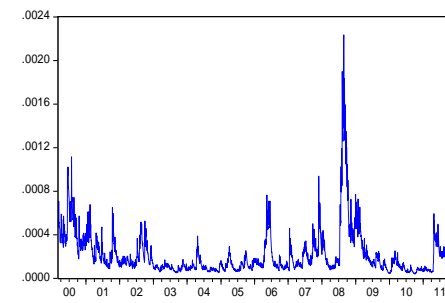
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 2.85E-06 + 0.0978\varepsilon_{t-1}^2 + 1.0788\sigma_{t-1}^2 - 0.6219\sigma_{t-2}^2 + 0.4324\sigma_{t-3}^2$

Gráfica 6.12. DEC GARCH(1,3)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.13. VC GARCH(1,3)



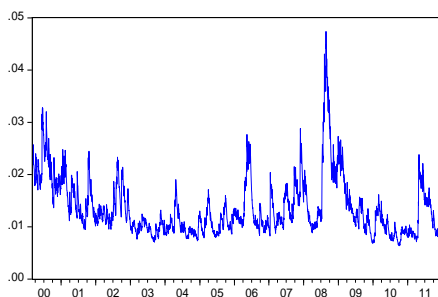
Fuente. Elaboración propia.

e) Modelo GARCH(2,1)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0726r_{t-1} + \varepsilon_t$

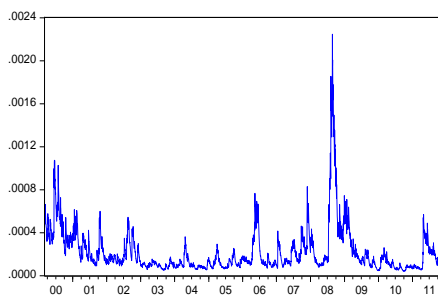
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 2.48E-06 + 0.0943\varepsilon_{t-1}^2 - 0.0135\varepsilon_{t-2}^2 + 0.9079\sigma_{t-1}^2$

Gráfica 6.14. DEC GARCH(2,1)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.15. VC GARCH(2,1)



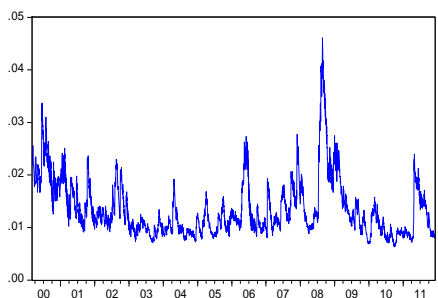
Fuente. Elaboración propia.

f) Modelo GARCH(2,2)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0741r_{t-1} + \varepsilon_t$

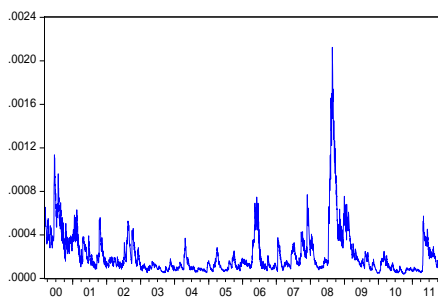
Ecuación de la varianza:
$$\sigma_t^2 = 5.07E-06 + 0.0751\varepsilon_{t-1}^2 - 0.0854\varepsilon_{t-2}^2 - 0.0657\sigma_{t-1}^2 + 0.8816\sigma_{t-2}^2$$

Gráfica 6.16. DEC GARCH(2,2)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.17. VC GARCH(2,2)



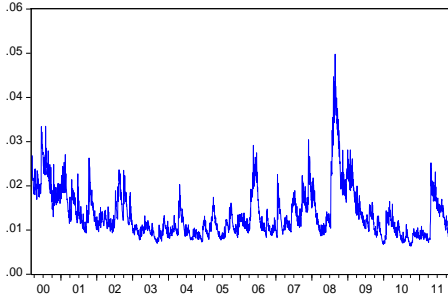
Fuente. Elaboración propia.

g) Modelo GARCH(2,3)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0735r_{t-1} + \varepsilon_t$

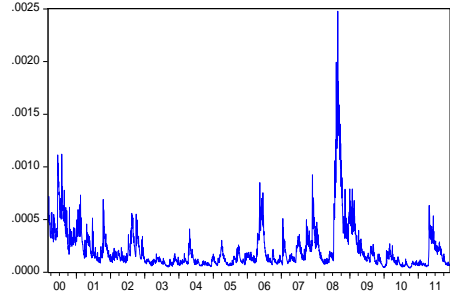
Ecuación de la varianza:
$$\sigma_t^2 = 3.81E-06 + 0.0826\varepsilon_{t-1}^2 + 0.0469\varepsilon_{t-2}^2 + 0.8883\sigma_{t-1}^2 - 0.6737\sigma_{t-2}^2 + 0.6387\sigma_{t-3}^2$$

Gráfica 6.18. DEC GARCH(2,3)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.19. VC GARCH(2,3)



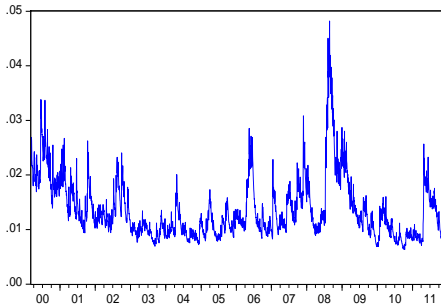
Fuente. Elaboración propia.

h) Modelo GARCH(3,1)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0731r_{t-1} + \varepsilon_t$

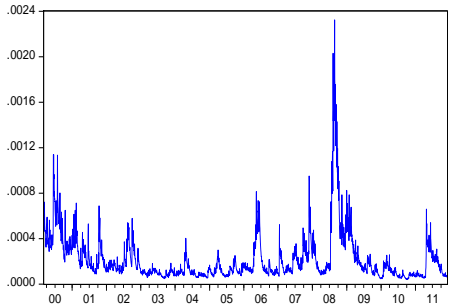
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 1.91\text{E-}06 + 0.0875\varepsilon_{t-1}^2 + 0.0422\varepsilon_{t-2}^2 - 0.0621\varepsilon_{t-3}^2 + 0.9236\sigma_{t-1}^2$

Gráfica 6.20. DEC GARCH(3,1)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.21. VC GARCH(3,1)



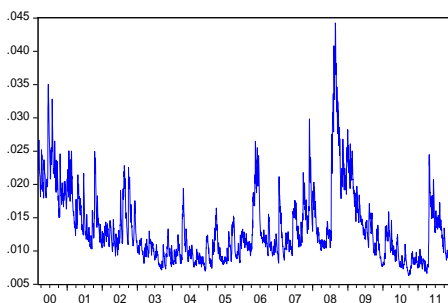
Fuente. Elaboración propia.

i) Modelo GARCH(3,2)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0760r_{t-1} + \varepsilon_t$

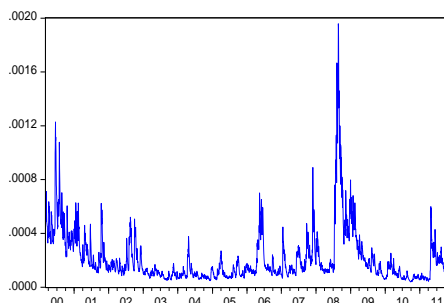
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 4.27\text{E-}08 + 0.0873\varepsilon_{t-1}^2 - 0.0585\varepsilon_{t-2}^2 - 0.0266\varepsilon_{t-3}^2 + 1.8083\sigma_{t-1}^2 - 0.8107\sigma_{t-2}^2$

Gráfica 6.22. DEC GARCH(3,2)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.23. VC GARCH(3,2)



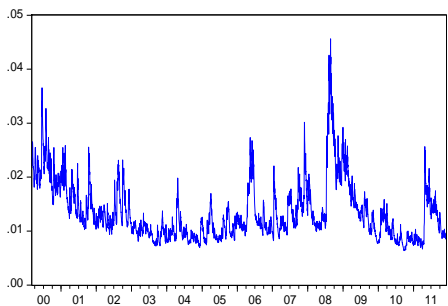
Fuente. Elaboración propia.

j) Modelo GARCH(3,3)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0010 + 0.0754r_{t-1} + \varepsilon_t$

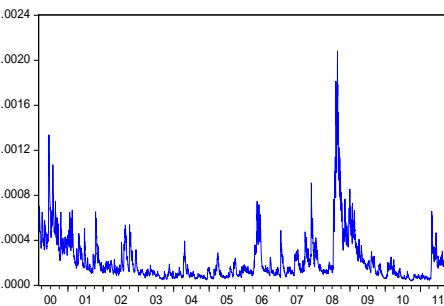
Ecuación de la varianza: $\sigma_t^2 = 6.36E-08 + 0.0854\varepsilon_{t-1}^2 + 0.0237\varepsilon_{t-2}^2 - 0.1060\varepsilon_{t-3}^2 + 1.0318\sigma_{t-1}^2 + 0.6189\sigma_{t-2}^2 - 0.6543\sigma_{t-3}^2$

Gráfica 6.24. DEC GARCH(3,3)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.25. VC GARCH(3,3)



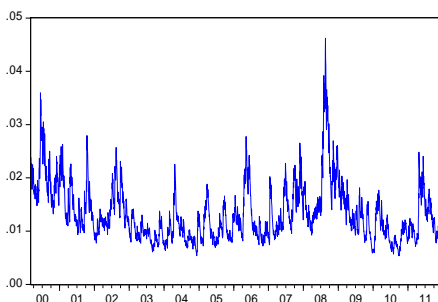
Fuente. Elaboración propia.

k) Modelo EGARCH(1,1)

Ecuación de la media: $r_t = 0.0005 + 0.0826r_{t-1} + \varepsilon_t$

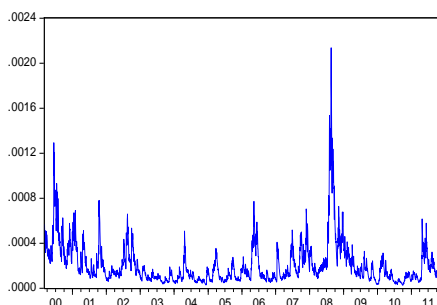
Ecuación de la varianza: $\log \sigma_t^2 = -0.3079 + 0.1453 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - 0.1121 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) + 0.9776 \log \sigma_{t-1}^2$

Gráfica 6.26. DEC EGARCH(1,1)



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.27. VC EGARCH(1,1)



Fuente. Elaboración propia.

De los modelos anteriores, el modelo GARCH(1,1) presenta el menor valor en el criterio de Schwarz, el modelo GARCH(3,3) presenta el menor valor en el criterio de Akaike y el modelo GARCH(3,2) tiene el menor valor en el criterio de Hannan-Quinn, sin embargo, se elige el modelo GARCH(1,1) porque los otros dos modelos tienen coeficientes no significativos. El resto de los modelos además de tener algún coeficiente no significativo tienen signos negativos en los coeficientes.

La consideración de la suma de los coeficientes de los términos ARCH y GARCH del modelo GARCH(1,1) es de 0.98820, muy cercano a la unidad, lo que implica que los shocks de volatilidad son muy persistentes y que el proceso de la varianza converge a su valor no condicional o de largo plazo.

En cuanto a la elección de los siguientes modelos, el EGARCH(1,1) y el modelo TARCH(1,1) también son elegibles para modelar la volatilidad. Hay que recordar que las innovaciones que se presentan por la aparición de noticias en los mercados financieros produce movimientos en las cotizaciones dependiendo de si son buenas (volatilidad en menor magnitud) o malas noticias (volatilidad en mayor magnitud).

En el caso del modelo TARCH(1,1), las buenas noticias impactarán en α y las malas noticias en $(\alpha + \gamma)$. Los coeficientes son estadísticamente significativos, incluso el criterio de Akaike y Schwarz son menores que el modelo GARCH(1,1). Los resultados del modelo TARCH(1,1) indican que las buenas noticias tendrán un impacto de 0.8857% sobre la volatilidad y las malas noticias de 14.4658% sobre la volatilidad.¹¹⁸

En el caso del modelo EGARCH(1,1) se pueden observar resultados similares a los obtenidos por los modelos TARCH(1,1), incluso se pueden observar criterios menores que los del modelo TARCH(1,1). Los resultados indican que los impactos de las buenas noticias serán de $(\gamma_i + \gamma_i^b)$ si z_{t-i} es positivo, en valores se tiene que el impacto sobre el logaritmo de la varianza condicional es de 3.3143%. Los impactos de las malas noticias serán de $(\gamma_i + \gamma_i^b)$ si z_{t-i} es negativo, en valores el impacto es de 25.7511%.

Los resultados anteriores permiten identificar tres modelos con características idóneas para estimar y predecir la volatilidad del IPC, los tres ofrecen coeficientes estadísticamente significativos. Sin embargo, los modelos TARCH(1,1) y EGARCH(1,1) permiten capturar los efectos asimétricos en el mercado mexicano en cuanto a las reacciones de los inversionistas ante las buenas y malas noticias.

A continuación se expone el método de simulación Monte Carlo que nos permitirá obtener los precios de las opciones europeas bajo el modelo de Heston.

¹¹⁸ Cuando γ es estadísticamente significativo recibe el nombre de efecto Leverage, en este caso el valor es 0.135801 o 13.5801%.

6.6. Simulación Monte Carlo

El método de simulación Monte Carlo¹¹⁹ utilizado por Boyle (1977) por primera vez como una herramienta que permite resolver integrales que se encuentran en la formulación de los precios de las opciones y que no es posible alcanzar mediante soluciones analíticas, lo que hace necesario el uso de métodos numéricos.

Este método goza de flexibilidad y su implementación es muy simple. Los resultados se presentan mediante trayectorias de precios del activo subyacente que permiten identificar los procesos que determinan la distribución de probabilidad a la que convergen los rendimientos promedio, además se obtiene una medida de su dispersión con exactitud¹²⁰, ambos procesos permiten estimar el precio de una opción.

Para el caso de una opción europea utilizando el método Monte Carlo se debe resolver la siguiente integral

$$V_t = E^* \left[e^{-r(T-t)} h \left(S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} \right) \right]. \quad [6.4]$$

El algoritmo para valuar opciones europeas en $t = 0$, es decir, $V_t = 0$, sea $V = V_t$ y σ_i la varianza acumulada hasta i , es el siguiente:

¹¹⁹ Para una revisión más completa del método de simulación Monte Carlo véanse Hammersley y Handscomb (1964), Glasserman (2003). En Duan (1995), Hull y White (1987), Johnson y Shanno (1987) y Scott (1987) se puede encontrar el uso de simulación Monte Carlo para el análisis de la volatilidad estocástica.

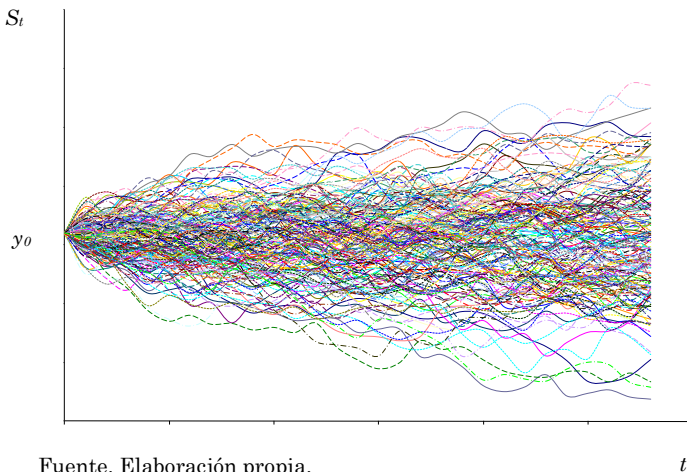
¹²⁰ Una desventaja que se consideraba era que el error estándar de la estimación era inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de ensayos de la simulación. También se puede considerar como desventaja que en algunos casos es necesario realizar un gran número de simulaciones para obtener resultados precisos, aunque ya existen muchas técnicas de reducción de varianza para mejorar la eficiencia del método.

- a) Se toma a r como la tasa libre de riesgo, Cetes a 28 días y se estima la volatilidad anual, σ , con información histórica de los precios del activo subyacente.
- b) Se determina el inicio de las variables, $t = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\widehat{V}_0 = 0$ y $\widehat{V}_1 = h\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma y_1 \sqrt{T}}\right)$, donde $y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- c) Para cada trayectoria i , con $i = 2, 3, \dots, m$ se genera una trayectoria aleatoria $y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ que se calcula con $h_i = h\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma y_i \sqrt{T}}\right)$.
- d) Se calculan $\widehat{V}_{i+1} = \widehat{V}_i + \frac{h_i - \widehat{V}_i}{i+1}$, $\sigma_{i+1} = \left(1 - \frac{1}{i}\right)\sigma_i + (i+1)(\widehat{V}_{i+1} - \widehat{V}_i)^2$.
- e) Se determina el intervalo de confianza con un nivel de significancia de 0.05

$$V \in \left[\widehat{V}_m - \frac{1.9599\sqrt{\sigma_m}}{\sqrt{m}}; \widehat{V}_m + \frac{1.9599\sqrt{\sigma_m}}{\sqrt{m}} \right]$$

En la gráfica 6.28. se presenta un ejemplo típico de simulación Monte Carlo para la obtención del precio de una opción.

Gráfica 6.28. Trayectorias por simulación Monte Carlo



6.7. Implementación del modelo de Heston

Para poder obtener los precios de las opciones bajo el modelo de Heston, es necesario realizar una aproximación en tiempo discreto de las ecuaciones [5.8] y [5.9], de la siguiente forma

$$S_t = S_{t-1} + S_{t-1}(r\Delta t + \sqrt{V_{t-1}}S_{t-1}\sqrt{\Delta t}W_{1t})^{121} \quad [6.5]$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1})\Delta t + \sigma\sqrt{V_{t-1}}\sqrt{\Delta t}W_{2t} \quad [6.6]$$

$$W_{1t} = w_{1t} \quad [6.7]$$

$$W_{2t} = \rho w_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2}w_{2t} \quad [6.8]$$

donde las w_t son variables normales estándar independientes y las W_t son variables normales estándar con correlación ρ .

A continuación se presentan de manera gráfica los principales resultados obtenidos por simulación Monte Carlo bajo el modelo de Heston.

La gráfica 6.29. presenta una trayectoria del precio del subyacente y grafica 6.30. presenta una trayectoria de la volatilidad. Los resultados consideran los siguientes parámetros:

Precio inicial del activo: $S_0 = 100$

$\beta = 2$

Horizonte de tiempo: $T = 1$ año

Varianza inicial: $v_0 = 0.05$

Varianza de largo plazo: $\theta = 0.05$

¹²¹ Para propósitos de valuación se considera utilizar la tasa corta r en lugar de la tendencia promedio μ .

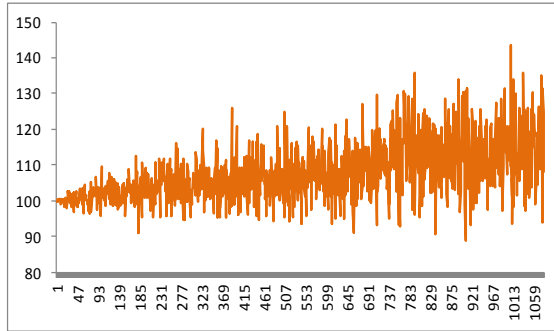
Tasa de reversión a la media: $\kappa = 4$

Volatilidad de la volatilidad: $\sigma = 0.10$

Correlación: $\rho = -0.6$

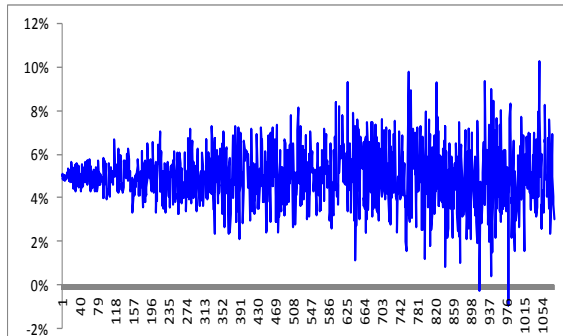
Periodos en el tiempo: $n = 250$

Gráfica 6.29. *Trayectoria del precio*



Fuente. Elaboración propia.

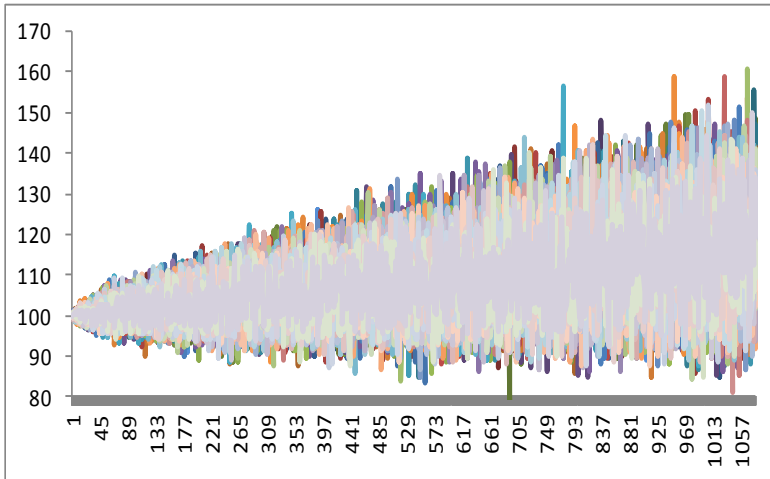
Gráfica 6.30. *Trayectoria de la volatilidad*



Fuente. Elaboración propia.

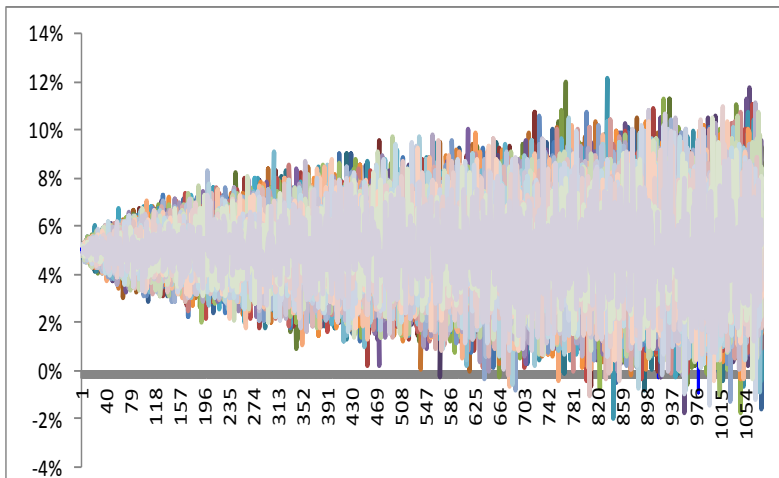
La gráfica 6.31. presenta todas las trayectorias simuladas para el precio del subyacente y la gráfica 6.32. muestra todas las trayectorias simuladas de la volatilidad.

Gráfica 6.31. *Trayectorias del precio del activo subyacente*



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.32. *Trayectorias de la volatilidad*



Fuente. Elaboración propia.

A continuación se presenta la calibración del modelo considerando el precio del IPC y la volatilidad histórica del 29 de marzo de 2012.

La gráfica 6.33. presenta una trayectoria del precio del subyacente y grafica 6.34. presenta una trayectoria de la volatilidad. Los resultados consideran los siguientes parámetros:

Precio inicial del activo: $S_0 = 39125.35$

Horizonte de tiempo: $T = 1$ año

Varianza inicial: $v_0 = 0.05$

Varianza de largo plazo: $\theta = 0.05$

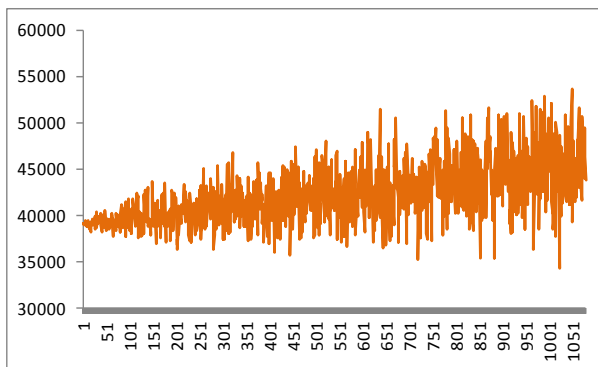
Tasa de reversión a la media: $\kappa = 4$

Volatilidad de la volatilidad: $\sigma = 0.05$

Correlación: $\rho = -0.6$

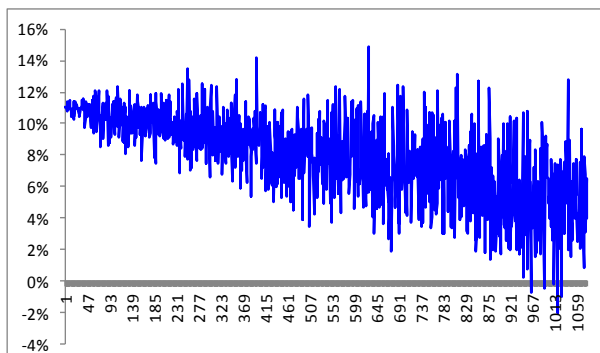
Periodos en el tiempo: $n = 250$

Gráfica 6.33. *Trayectoria del precio*



Fuente. Elaboración propia.

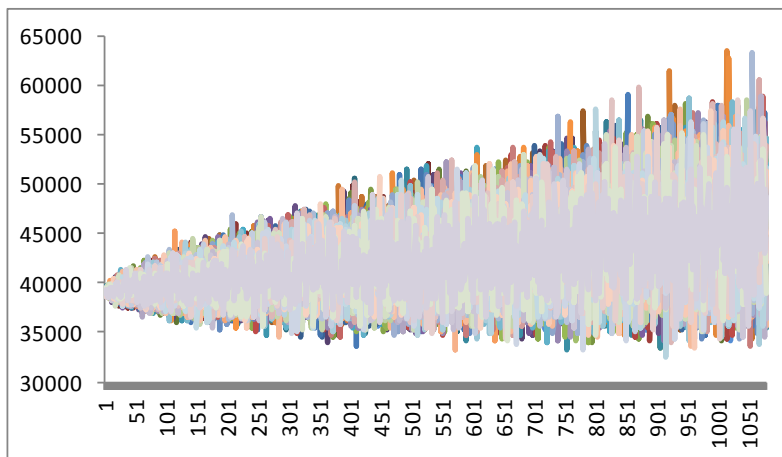
Gráfica 6.34. *Trayectoria de la volatilidad*



Fuente. Elaboración propia.

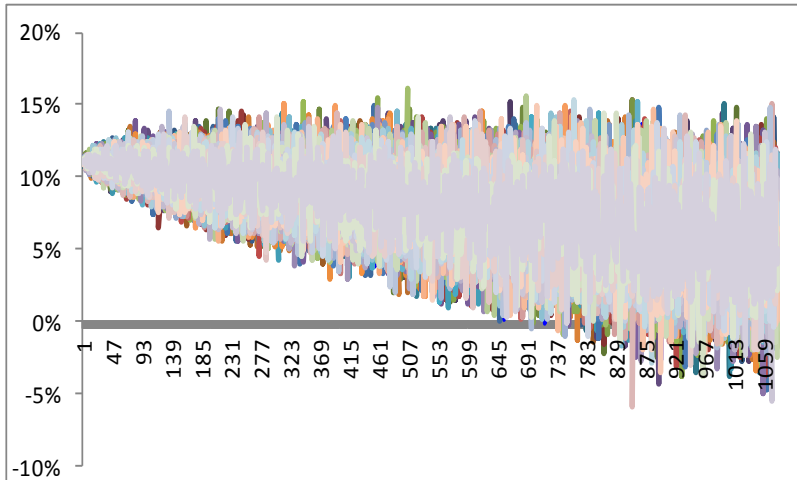
La gráfica 6.35. presenta todas las trayectorias simuladas para el precio del subyacente y la gráfica 6.36. muestra todas las trayectorias simuladas de la volatilidad.

Gráfica 6.35. *Trayectorias del precio del activo subyacente*



Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.36. Trayectorias de la volatilidad



Fuente. Elaboración propia.

Las gráficas anteriores permiten identificar los efectos que provocan en particular dos parámetros: ρ y σ en el modelo de Heston. A continuación se presentan los efectos sobre la asimetría y la curtosis.

6.7.1. Asimetría

Al construir la distribución del precio de los activos bajo el modelo de modelo de Heston se puede observar que existe mayor curtosis y es más sesgada que la que podría observarse en el modelo de Black-Scholes, lo anterior se puede apreciar en la gráfica 6.37.

Lo anterior también se puede identificar al considerar ciertos valores de ρ . Por ejemplo, si se selecciona

- i) $\rho > 0$, la distribución de precios tendrá un sesgo positivo mayor que el obtenido por Black-Scholes, lo que implica que si la opción call se encuentra *out-the-money* será más cara (cola derecha) y si la

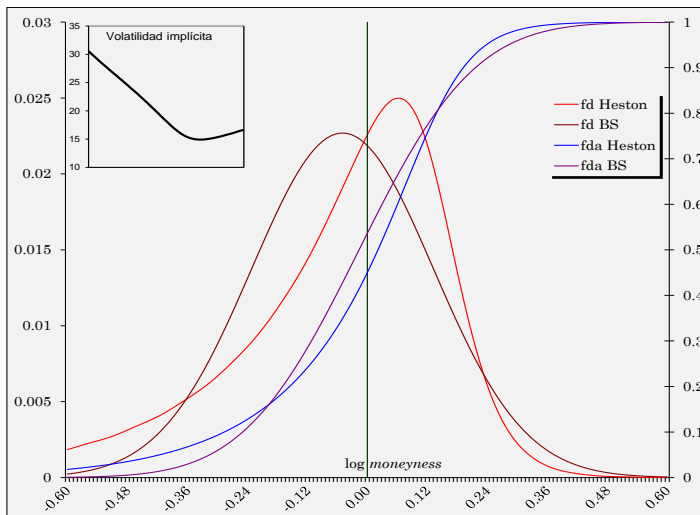
opción se encuentra *in-the-money* será más barata (cola izquierda).

ii) $\rho < 0$, se tendrá un sesgo negativo mayor que el obtenido por Black-Scholes, lo que implica que si la opción call está *out-the-money* será más barata (cola derecha) y si la opción se encuentra *in-the-money* será más cara (cola izquierda).

6.7.2. Curtosis

La volatilidad de la volatilidad impacta de manera directa en los precios y provoca un aumento automático en la curtosis. La diferencia entre el modelo de Heston y Black y Scholes es mayor a medida que aumenta σ . El modelo de Heston presentará precios mayores para la opción call en las regiones *in-the-money* y *out-the-money* y precios menores en la región *at-the-money*, además se observarán las características colas pesadas en la distribución.

Gráfica 6.37. Distribución del modelo de Black-Scholes y Heston



Fuente. Elaboración propia.

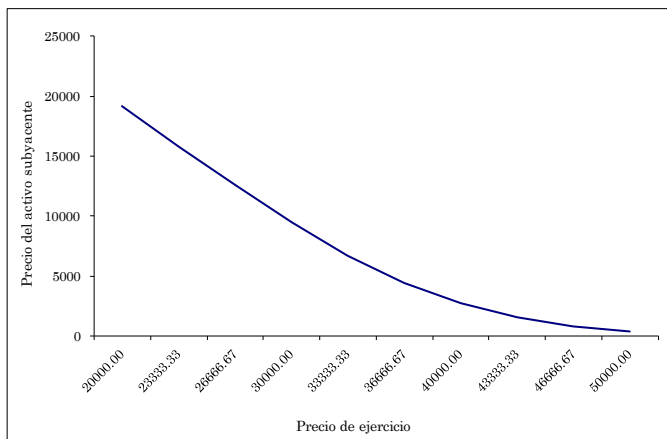
Finalmente para obtener los precios de una opción call europea se usa simulación Monte Carlo bajo el modelo de Heston y se simulan los procesos. Algunos resultados se muestran en el cuadro 6.9. y la gráfica 6.38.

Cuadro 6.9. Simulación de la opción call bajo el modelo de Heston

Precio de ejercicio	Precio call	Volatilidad implícita
20000.00	19131.54	24.44%
23333.33	15813.80	22.11%
26666.67	12556.55	21.30%
30000.00	9467.36	20.84%
33333.33	6706.98	20.49%
36666.67	4433.09	20.20%
40000.00	2723.87	19.94%
43333.33	1555.54	19.71%
46666.67	830.20	19.52%
50000.00	414.31	19.33%

Fuente. Elaboración propia.

Gráfica 6.38. Precios de la opción call bajo el modelo de Heston



Fuente. Elaboración propia.

Conclusiones

La contribución de Black-Scholes a los mercados financieros es indudable, sin embargo, los supuestos de volatilidad constante y la distribución normal de los rendimientos han sido los principales inconvenientes en la modelación del comportamiento de los activos financieros en los mercados y como consecuencia el estudio del modelado de la volatilidad, en particular, se incremento de manera considerable. Los modelos que consideran volatilidad estocástica, pretenden representar la creciente inestabilidad en los mercados financieros y, determinar los factores que ocasionan las variaciones en los precios de los activos, con el propósito de reducir el riesgo realizando estimaciones de su comportamiento futuro.

Todo modelo depende del comportamiento de la volatilidad a través del tiempo, por lo que es necesario plantear el modelo que mejor la estime y que capture la mayor información para que los pronósticos sean lo más apegados a la realidad. De manera típica, la volatilidad se estimaba con largas series históricas, aunque existe evidencia empírica que pone al descubierto que los datos más recientes aportan mayor información.

En la literatura econométrica existen diversos factores que los modelos deben capturar: exceso de curtosis, asimetría en los rendimientos, agrupamiento de volatilidad, entre otros, que expresan el comportamiento del mercado, y que el modelo de valuación utilizado debe considerar en sus estimaciones, en particular, los modelos del tipo ARCH tuvieron una gran contribución en las estimaciones de la volatilidad futura, ahora los modelos de volatilidad estocástica están teniendo su auge.

En el presente trabajo de investigación se estimaron los modelos ARCH, GARCH, EGARCH y TARCH que permitieron estimar las ecuaciones de

varianza y considerar las volatilidades futuras. Los modelos que mejores propiedades estadísticas tuvieron para estimar y pronosticar la volatilidad fueron los modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) y TARCH(1,1), los últimos permiten identificar el comportamiento asimétrico en particular.

Entre los modelos de volatilidad estocástica, el modelo de Heston goza de gran popularidad, básicamente por la implementación que se puede realizar para obtener una solución analítica utilizando funciones características para el precio de opciones europeas, hoy día la eficiencia computacional es indispensable para la toma de decisiones inmediatas. El método de simulación Monte Carlo permite obtener con mayor precisión y confiabilidad los parámetros del modelo calibrado, y por tanto los precios de las opciones al considerar una simulación de un proceso de raíz cuadrada. También es conveniente mencionar que los procesos que determinan la volatilidad pueden llegar a ser negativos, aunque con diversos métodos de discretización es posible eliminar esa posibilidad.

En resumen, se pueden considerar las siguientes ventajas en la implementación del modelo de Heston para la valuación de opciones europeas asociadas al IPC de la BMV:

- a) permitió describir el comportamiento de los rendimientos del IPC como activo subyacente bajo una distribución no normal,
- b) permitió determinar las trayectorias de los precios del IPC y de la volatilidad mediante una discretización de los procesos,
- c) permitió capturar el efecto *leverage* o de apalancamiento al considerar coeficientes de correlación negativos entre los procesos que guían los precios y la volatilidad,
- d) permitió obtener una solución cerrada para calcular el precio de las opciones europeas utilizando simulación Monte Carlo,

Las desventajas identificadas en el modelo de Heston son:

- a) existen parámetros que son sensibles en la estimación, ρ y σ , pues no son observables y pueden generar inconvenientes en la calibración del modelo y por tanto de su pronóstico,
- b) cuando el vencimiento es a corto plazo se podrían obtener mejores resultados con mayor precisión si se considera un modelo con saltos, lo que implica crear una banda para medir la intensidad del salto.

El presente trabajo de investigación considero la estimación de los parámetros del modelo utilizando datos de los rendimientos del IPC mediante simulación Monte Carlo, asimismo se estimaron las volatilidades históricas e implícitas de mercado desde enero de 2000 a 2012. Los resultados muestran ser robustos a pesar de que en 2008-2009 la crisis financiera impacto de manera considerable a los mercados internacionales y genero cambios estructurales en las series de precios y por tanto, de los rendimientos.

En términos estadísticos se considera de manera especial el efecto que podrían tener los parámetros relacionados con la asimetría y la curtosis, en este caso la volatilidad de la volatilidad, que en el modelo de Heston es el más importante, y que puede considerar como parámetro la volatilidad implícita en su estimación.

Entre las posibles líneas de investigación, se pueden considerar los siguientes temas relacionados con el modelo de Heston:

- a) valuación de superficies de volatilidad con volatilidad implícita.
- b) valuación de *smiles* o sonrisas de volatilidad,
- c) valuación de opciones americanas,
- d) valuación de opciones con dos factores de incertidumbre (modelos multivariados de volatilidad),
- e) valuación de opciones con saltos,
- f) valuación de volatilidad con memoria larga.

Bibliografía

- [1] Amin, Kaushik I. y Ng Victor K. (1993). "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", *The Journal of Finance*, vol. 48, USA, julio, núm. 3, pp. 881-910.
- [2] Andersen, Leif (2007). "Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model", enero.
- [3] Andersen, Tobern G. (1994). "Stochastic Autoregressive Volatility: A Framework for Volatility Modelling", *Mathematical Finance*, vol. 4, USA, enero, núm. 1, pp. 75-102.
- [4] Andersen, Torben G. y Bollerslev, Tim (1998). "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts", *International Economic Review*, Symposium of Forecasting and Empirical Methods in Macroeconomics and Finance, vol. 39, USA, noviembre, núm. 4, pp. 885-905.
- [5] Andersen, Torben G.; Bollerslev, Tim; Christoffersen y Diebold, Francis X. (2005). "Volatility Forecasting". *PIER Working Paper 05-011*, Penn Institute for Economic Research, Universidad de Pennsylvania, USA, febrero, págs. 111.
- [6] Asai, Manabu y McAleer, M (2005). "Dynamic Asymmetric Leverage in Stochastic Volatility Models", *Econometrics Reviews*, vol. 24, USA, núm. 3, pp. 317-332.
- [7] Asai, Manabu (2008). "Autoregressive Stochastic Volatility Models with Heavy-Tailed Distributions: A Comparison with Multifactor Volatility Models", *Journal of Empirical Finance*, vol. 15, USA, marzo, num. 2, pp. 332-341.
- [8] Aydemir, Abdurrahman Bekir (1998). Forecast performance of Threshold Autoregressive Models - A Monte Carlo Study, *Research Report 9910*, Department of Economics, University of Western Ontario, USA, november, págs. 64.
- [9] Bae, Kee-Hong y Karolyi, Andrew (1994) "Good News, Bad News and International Spillovers of Stock Return Volatility Between Japan and the U. S.", *Pacific Basin Finance Journal*, vol. 2, USA, pp. 405-438.

- [10] Bailey, W y Stulz, E (1989). "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24, USA, marzo, núm. 1, pp. 1-12.
- [11] Baillie, Richard T. (1996). "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics", *Journal of Econometrics*, vol. 73, USA, julio, núm. 1, pp. 5-59.
- [12] Ball, Clifford A. y Roma, Antonio (1994). "Stochastic Volatility Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29, USA, diciembre, núm. 4, pp. 589-607.
- [13] Balland, Philippe (2002). "Deterministic Implied Volatility Models". *Quantitative Finance*, vol. 2, Reino Unido, marzo, núm. 1, pp. 31-44.
- [14] Barndorff-Nielsen, Ole E. y Shephard, Neil (2002). "Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models", *Journal of The Royal Statistical Society, Serie B*, vol. 3. USA, mayo, núm. 2, pp. 253-280.
- [15] Barndorff-Nielsen, Ole E.; Nicolato, Elisa y Shephard, Neil (2002). "Some Recent Developments in Stochastic Volatility Modelling", *Quantitative Finance*, vol. 2, USA, enero-febrero, núm. 1, pp. 11-23.
- [16] Bartolucci, Francesco y De Luca, Giovanni (2002). "A General Framework for Fitting Stochastic Volatility Models", en Pardalos P. and Hearn D. W. edited by *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance, Kluwer Applied Optimization Series*, pp. 645-648.
- [17] Beckers, Stan (1980). "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing", *The Journal of Finance*, vol. 35, USA, junio, núm. 3, pp. 661-673.
- [18] Bera, Anil K. y Higgins, Matthew L. (1993). "ARCH Models: Properties, Estimation and Testing", *Journal of Economics Surveys*, vol. 7, USA, núm. 4, pp. 305-362.
- [19] Beran, Jan (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, vol. 61, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman y Hall, USA, págs. 315.
- [20] Black, Fisher (1976). "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, USA, núm. 1-2, pp. 167-179.

- [21] Black, Fisher y Scholes, Myron (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, USA, mayo-junio, núm. 3, pp. 637-654.
- [22] Blattberg, R. C. y Gonedes, N. J. (1974). "A Comparison of Stable and Student Distributions As Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, vol. 47, USA, núm. 2, pp. 244-280.
- [23] Bollerslev, Tim T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, vol. 31, USA, núm. 3, pp. 307-327.
- [24] Bollerslev, Tim T.; Chou, Ray y Kroner, Kenneth F. (1992). "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics*, vol. 52, USA, núm. 1-2, pp. 5-59.
- [25] Bollerslev, Tim T.; Engle, Robert F. y Nelson, Daniel B. (1994). "ARCH Models", capítulo 49, *Handbook of Econometrics*, Vol. IV, edited by Engle, Robert F. y McFadden, D. L.. North Holland, págs. 89.
- [26] Bollerslev, Tim T.; Russell, Jeffrey R. y Watson, Mark W. (editores) (2010). Volatility and Time Series Econometrics. Essays in Honor of Robert F. Engle, *Advanced Texts in Econometrics*, Reino Unido, Oxford University Press, págs. 419.
- [27] Bossaert, Peter; Ghysels, Eric y Gouriéroux, Christian (1996). "Arbitrage-Based Pricing when Volatility is Stochastic", *Cirano papers, Scientific Series*, 96s-20, Canadá, julio, págs. 47.
- [28] Boyle, Phelim P. (1977). "Options: A Monte-Carlo Approach", *Journal Financial Economics*, vol. 4, USA, mayo, núm. 3, pp. 323-338.
- [29] Breeden, Douglas T. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics*, vol. 7, USA, septiembre, núm. 3, pp. 265-296.
- [30] Breidt, Jay F.; Crato, Nuno y De Lima, Pedro (1998). "On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, vol. 83, USA, marzo-abril, núms. 1 y 2, pp. 325-348.
- [31] Brennan, M. J. (1979). "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models", *The Journal of Finance*, vol. 24, USA, March, núm. 1, pp. 53-68.

- [32] Brooks, Chris (2004). *Introductory Econometrics for Finance*, Reino Unido, Cambridge, cuarta edición, págs. 437-532.
- [33] Broto, Carmen y Ruiz Esther (2002). "Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey", *Working Papers* 02-54 (14), *Statistics and Econometric Series*, España, noviembre, págs. 52.
- [34] Campbell, John Y. y Hentschel, Ludger (1992). "No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, vol. 31, USA, junio, núm. 3, pp. 281-318.
- [35] Carnero, M. Angeles; Peña, Daniel y Ruiz, Esther (2001). "Is Stochastic Volatility more Flexible than GARCH?", *Working paper* 01-08, *Statistics and Econometrics Series* 05. España, marzo, págs. 38.
- [36] Carnero, M. Angeles (2004). "Persistence and Kurtosis in GARCH and Stochastic Volatility Models", *Journal of Financial Econometrics*, vol. 2, USA, abril-junio, núm. 2, pp. 319-342.
- [37] Chesney, Marc y Scott, Louis O. (1989). "Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24, USA, September, núm. 3, pp.
- [38] Chou, Ray Y. (1988). "Volatility Persistence and Stock Valuations: some Empirical Evidence Using GARCH", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 3, USA, octubre-diciembre, núm. 4, pp. 279-294.
- [39] Christie, Andrew A. (1982). "The Stochastic Behavior of Common Stock Variance: Value, Leverage and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics*, vol. 10, núm. 4, pp. 407-432.
- [40] Clark, Peter K. (1973). "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, vol. 41, USA, enero, núm. 1, pp. 135-155.
- [41] Cox, John C. (1975). "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions", *Unpublished Notes*, Stanford University, Graduate School of Business.
- [42] Cox, John C. y Ross, Stephen A. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, USA, núm. , pp. 145-166.
- [43] Cox, John C. y Rubinstein, Mark (1985). *Options Markets*, Prentice Hall Inc, págs. 510.

- [44] Drăgulescu Adrian A. y Yakovenko, Victor M. (2002). "Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility", *Quantitative Finance*, vol. 2. Reino Unido, diciembre, núm. 6. pp. 443-453.
- [45] Dash, Jan W. (2005). *Quantitative Finance and Risk Management. A Physicist's Approach*, Singapur, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., primera reimpression.
- [46] Davis, Mark H. A. (2004). "Complete-market Models of Stochastic Volatility", *Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Finance*, vol. 460, USA, enero, pp. 1-16.
- [47] De Arce, Borda Rafael (2000). "Modelización tipo ARCH aplicada en el contexto del IBEX-35. Visión Preliminar", Junio, págs. 29.
- [48] De Arce, Borda Rafael (2004). "20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia", *Estudios de Economía Aplicada. Asociación de Economía Aplicada (ASEPELT)*, vol. 22, España, abril, núm. 001, pp. 1-27.
- [49] Duan, Jin-Chuan (1995). "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, vol. 5, USA, enero, núm. 1, pp. 13-32.
- [50] Duffie, Darrell y Singleton, Kenneth J. (1993). "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices", *Econometrica*, vol. 61, Julio, núm. 4, pp. 929-952.
- [51] Ederington, Louis H. y Guan, Wei (2005). "Forecasting Volatility", *Journal of Futures Markets*, vol. 25, USA, mayo, núm. 5, págs. 465-490.
- [52] Emanuel, David C. y Macbeth, James D. (1982). "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 17, USA, noviembre, núm. 4, pp. 533-554.
- [53] Enders, Walter (2004). *Applied Econometric Time Series*. USA, John Wiley and Sons, Inc., *Series in Probability and Statistics*, segunda edición, págs. 108-155.
- [54] Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, vol. 50, USA, Julio, núm. 4, pp. 987-1008.

- [55] Engle, Robert F. y Bollerslev, Tim (1986). "Modelling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews*, vol. 5, USA, núm. 1, pp. 1-50.
- [56] Engle, Robert F. y Ng, Victor K. (1993). "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *The Journal of Finance*, vol. 48, USA, diciembre, núm. 5, pp. 1749-1778.
- [57] Engle, Robert F. y Patton, Andrew J. (2001). "What Good is a Volatility Model", *Quantitative Finance*, vol. 1, Reino Unido, marzo, núm. 2, pp. 237-245.
- [58] Engle, Robert F. (2004). "Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice". *The American Economic Review*, vol. 94, USA, junio, núm. 3, pp. 405-420.
- [59] Epps, Thomas W. y Epps, Mary Lee (1976). "The Stochastic Dependence of Security Price Change and Transaction Volumes: Implications for the Mixture-of-Distributions Hypothesis", *Econometrica*, USA, marzo, vol. 44, núm. 2, pp. 305-321.
- [60] Epps, Thomas W. (2007). *Pricing Derivatives Securities*, Singapur, segunda edición, *World Scientific*, págs. 627.
- [61] Fama, Eugene F. (1995). "The Behavior of Stock-Market Prices", *The Journal of Business*, vol. 38, USA, enero, núm. 1, pp. 34-105.
- [62] Figlewski, Stephen (1997). "Forecasting Volatility", *Financial Markets, Institutions and Instruments. Topics in Financial Intermediation*, Stern School Business, vol. 6, USA, febrero, núm. 1, pp. 1-88.
- [63] Font, Begoña (1998). "Modelización de series temporales financieras. Una recopilación", *Working Paper 98-21, Statistics and Econometrics Series 06*, España, julio, págs. 46.
- [64] French, D W. (1984). "The Weekend Effect on the Distribution of Stock Prices: Implications for Options Pricing", *Journal of Financial Economics*, vol. 13, USA, diciembre, núm. 4, pp. 547-559.
- [65] Frech, Kenneth R. y Roll, Richard (1986). "Stock Return Variances: The Arrival of Information and The Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, vol. 17, USA, núm. 1, pp. 5-26.
- [66] García, Centeno María del Carmen; Calvo, Martín y Meri Emilia (2005). "Estimación de modelos de volatilidad estocástica en series de rendimientos bursátiles", *XIII Jornadas de ASEPUMA*, España, septiembre, págs. 29.

- [67] García, Centeno María del Carmen y Mínguez, Salido Román (2011). "Stochastic Volatility Models: An Historical Overview", *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 27, España, octubre, núm. 3, pp. 221-244.
- [68] Gatheral, Jim (2002). "Stochastic Volatility and Local Volatility", *Case Studies in Financial Modelling Course Notes*. Courant Institute of Mathematical Sciences, USA, pp. 18.
- [69] Geske, Robert (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, noviembre, núm. 4, pp. 541-552.
- [70] Geske, Robert (1979). "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, vol. 7, USA, marzo, núm. 1, pp. 63-81.
- [71] Ghysels, Eric; Harvey, Andrew y Renault Eric (1996). "Stochastic Volatility", *Cirano papers, Scientific Series*, 95s-49, Canadá, noviembre 1995, págs. 68. (*Handbook of Statistics, Statistical Methods in Finance*, vol. 14, edited by G. S. Maddala and C. R. Rao, North Holland, pp. 119-183).
- [72] Glasserman, Paul (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Stochastic Modelling and Applied Probability, USA, Springer, págs. 616.
- [73] Glosten, Lawrence. R.; Jagannathan, Ravi y Runkle, David E. (1993). "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks", *The Journal of Finance*, vol. 48, USA, núm. diciembre, pp. 1779-1801.
- [74] Gouriéroux, Christian (1993). *ARCH Models and Financial Applications*, Springer Series in Statistics, Springer, pág. 228.
- [75] Gouriéroux, Christian y Jasiak, Joann (2001). *Financial Econometrics. Problems, Models and Methods*. USA, Princeton University Press, *Princeton Series in Finance*, primera edición, págs. 117-148.
- [76] Grajales, Correa Carlos Alexander y Pérez, Ramírez Fredy Ocaris (2008). "Modelos discretos y continuos para estimar la densidad de probabilidad de la volatilidad estocástica de los rendimientos de series financieras", *Cuadernos de Administración*, vol. 21, Colombia, julio, núm. 036, pp. 113-132.

- [77] Hamao, Yasushi; Masulis, Ronald W. y Ng, Victor (1990). "Correlations in Price Changes and Volatility Across International Stock Markets", *The Review of Financial Studies*, vol. 3, USA, núm. 2, pp. 281-307.
- [78] Hammersley, J. M. y Handscomb D. C. (1964). Monte Carlo Methods, Halsted Press, Gran Bretaña, págs. 178.
- [79] Harvey, Andrew C., Ruiz, Esther y Shephard, Neil (1994). "Multivariate Stochastic Variance Models", *Review of Economic Studies*, vol. 61, USA, pp. 247-264.
- [80] Harvey, Andrew C. y Shephard, Neil (1996). "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 14, USA, octubre, núm. 4, pp. 429-434.
- [81] Hasbrouck, Joel (1991). "Measuring the Information Content of Stock Trades", *The Journal of Finance*, vol. 46, USA, marzo, núm. 1, pp. 179-207.
- [82] Herwig, Tobias (2006). Market-Conform Valuation of Options, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Alemania, núm. 571, Springer-Verlag, págs. 104.
- [83] Heston, Steven L. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *The Review of Financial Studies*, vol. 6. USA, abril-junio, núm. 2. pp. 327-343.
- [84] Heston, Steven L. y Nandi, Saikat (2000). "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model", *Review of Financial Studies*, vol. 13, USA, núm. 3, pp. 585-625.
- [85] Hsieh, David A. (1995). "Nonlinear Dynamics in Financial Markets: Evidence and Implications", *Financial Analysts Journal*, vol. 51, USA, julio-agosto, núm. 4, pp. 55-62.
- [86] Hull, John y White, Alan (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *The Journal of Finance*, vol. XLII, USA, junio, núm. 2, pp. 281-300.
- [87] Hull, John y White, Alan (1988). "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility", *Advances in Futures and Options Research*, vol. 3, USA, pp. 29-61.

- [88] Hull, John (2009). *Options, Futures and Other Derivatives*, USA, Pearson Education Inc., Prentice Hall, octava edición.
- [89] Jacquier, Éric; Polson, Nicholas G. y Rossi, Peter E. (1999). "Stochastic Volatility: Univariate and Multivariate Extensions", *Cirano papers, Scientific Series*, 99s-26. Canadá, julio, págs. 46.
- [90] Jarrow, Robert A. y Wiggins, James B. (1989). "Option Pricing and Implicit Volatilities", *Journal of Economic Surveys*, vol. 3, USA, marzo, núm. 1, pp. 59-81.
- [91] Jiang, J. George (1998). "Stochastic Volatility and Option Pricing", en J. L. Knight and S. E. Satchell (Eds.) *Forecasting Volatility in the Financial Market*, London: Butterworth Hernemann, pp. 45-96.
- [92] Jones, Christopher S. (2003). "The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Options Markets", *Journal of Econometrics*, vol. 116, USA, septiembre-octubre, núms. 1 y 2, pp. 181-224.
- [93] Johnson, Herb y Shanno, David (1987). "Option Pricing when the Variance is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, USA, junio, núm. 2, pp. 143-151.
- [94] Karlin Samuel y Taylor, Howard M. (1981). *A second course in stochastic processes*, Academic Press, San Diego, págs. 542.
- [95] Kilin, Fiodar (2007). "Accelerating the Calibration of Stochastic Volatility Models", *Centre for Practical Quantitative Finance*, núm. 6, Alemania, mayo, págs. 18.
- [96] Kim, Sangjoon; Shephard, Neil y Chib, Siddhartha (1996). "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models", *The Review of Economic Studies*, vol. 65, Julio, núm. 3, pp. 361-393.
- [97] Kim, Yong-Jin (2002). "An Asymptotic Valuation for the Option under a General Stochastic Volatility", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 45, Japón, octubre-diciembre, núm. 4, pp. 404-425.
- [98] Knight, John y Satchell, Stephen (editores) (2007). "Forecasting Volatility in the Financial Markets", *Quantitative Finance Series*, Holanda, tercera edición, Elsevier Ltd., págs. 415.

- [99] Koopman, Siem Jan y Hol, Uspensky Eugenie (2002). "Stochastic Volatility in Mean Model: Empirical evidence from international stock markets", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 17, USA, diciembre, núm. 6, pp. 667-689.
- [100] Koutmos, Gregory y Booth, Geoffrey G. (1995). "Asymmetric Volatility Transmission in International Stock Markets", *Journal of International Money and Finance*, vol. 14, USA, diciembre, núm. 6, pp. 747-762.
- [101] Latané Henry A. y Rendleman Richard J. (1976). "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *The Journal of Finance*, vol. 31, USA, mayo, núm. 2, pp. 369-381.
- [102] Lewis, A. L. (2000). *Option Valuation under Stochastic Volatility. With Matematica Code*, Finance Press, USA, págs. 350.
- [103] Lintner, John (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *The Review of Economics and Statistics*, vol. 47, USA, febrero, núm. 1, pp. 13-37.
- [104] Lisenfeld, Roman y Jung, Robert C. (2000). "Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy-Tailed Distributions", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 15, USA, marzo-abril, núm. 2, pp. 137-160.
- [105] Lopes, Moreira da Veiga Maria Helena (2003). "Forecasting Volatility Using a Continuous Time Model", *UFAE-IAE Working Papers*, España, septiembre, núm. 584.03, págs. 32.
- [106] Lopes, Moreira da Veiga Maria Helena (2006). "Volatility Forecasts: A Continuous Time Model versus Discrete Time Models", Working Paper 06-25, *Statistics and Econometrics Series*, Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid, España, abril, págs. 29.
- [107] Macbeth, James D. y Merville, Larry J. (1980). "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models", *Journal of Finance*, vol. 35, USA, mayo, núm. 2, pp. 285-301.
- [108] Mahieu, Ronald J. y Schotman, Peter C. (1998) "An Empirical Application of Stochastic Volatility", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 13, USA, julio-agosto, núm. 4, pp. 333-360.

- [109] Magdon-Ismail, Malik y Abu-Mostafa, Yaser S. (1998). "Validation of Volatility Models", *Journal of Forecasting*, Vol. 17, USA, septiembre-noviembre, núm. 5 y 6, pp. 349-368.
- [110] Malmsten, Hans y Teräsvirta, Timo (2010). "Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility", *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, Turquía, núm. 3, 413-447.
- [111] Mandelbrot, Benoit (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, vol. 36, USA, pp. 394-419.
- [112] Meddahi, Nour y Renault, Éric (2000). "Temporal Aggregation of Volatility Models", *Cirano Papers, Scientific Series*, 2000s-22. Canadá, julio, págs. 43.
- [113] Melino Angelo y Turnbull Stuart M. (1990). "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, vol. 45, USA, Julio-agosto, núm. 1-2, pp. 239-265.
- [114] Merton, Robert C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, USA, enero-marzo, núm. 1-2, pp. 125-144.
- [115] Morimune, Kimio (2007). "Volatility Models", *The Japanese Economic Review*, vol. 58, Japón, marzo, núm. 1, pp. 1-23.
- [116] Mossin, Jay (1966). "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, vol. 34, USA, octubre, núm. 4, pp. 768-783.
- [117] Nelson, Daniel B. (1990). "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model", *Econometric Theory*, vol. 6, USA, núm. 3, pp. 318-334.
- [118] Nelson, Daniel B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, vol. 59, USA, marzo, núm. 2, pp. 347-370.
- [119] Naik, Vasanttilak (1993). "Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns", *Journal of Finance*, vol. 48, USA, diciembre, núm. 5, pp. 1969-1984.
- [120] Nicolato, Elisa y Venardos, Emmanouil (2002). "Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein-Uhlenbeck type", *Working Paper Series*. Centre for Analytical Finance, CAF, Dinamarca, abril, núm. 108, págs. 23.

- [121] Novales, Alfonso y Gracia-Díez, Mercedes (1993). "Guía para la estimación de modelos ARCH", *Estadística Española*, vol. 35, España, núm. 132, pp. 5-38.
- [122] Omori, Yasuhiro; Chib, Siddhartha; Shephard, Neil y Nakajima, Jouchi (2004). "Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference", *Discussion Papers CIRJE-F*, Center for International Research on the Japanese Economy, Japón, agosto, núm. 297, págs. 32.
- [123] Palm, F. C. (1996). "GARCH Models of Volatility", *Handbook of Statistics*, vol. 14, editado por G. S. Maddala y C. Rao, Elsevier Science, Holanda, pp. 209-240.
- [124] Peña, J. Ignacio (1993). "Medidas de volatilidad en mercados financieros", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXIII, España, octubre-diciembre, núm. 77, pp. 937-948.
- [125] Preminger, Arie y Hafner, Christian M. (2006). "Deciding between GARCH and Stochastic Volatility via Strong Decision Rules", *Core Discussion Paper 42*, Institut de Statistique, Universidad Católica de Louvain, Bélgica, págs. 27.
- [126] Press, James S. (1967). "A Compound Events Model for Security Prices", *The Journal of Business*, vol. 40, USA, julio, núm. 3, pp. 317-335.
- [127] Reinhard, Hansen Peter; Lunde, Asger y Nason, James M. (2003). "Choosing the Best Volatility Models: The Model Confidence Set Approach", *Working Paper 2003-05*, Brown University, USA, marzo, pp. 29.
- [128] Ritchken, Peter y Trevor, Rob (1999). "Pricing Options under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes", *The Journal of Finance*, vol. LIV, USA, febrero, núm. 1, pp. 377-402.
- [129] Robinson, Peter M. (2003). *Time Series with Long Memory*, Advanced Texts in Econometrics, Oxford University Press, págs. 382.
- [130] Robles, Fernández María Dolores (2002). "Medidas de volatilidad", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. XXXI, España, octubre-diciembre, núm. 114, pp. 1073-1110.
- [131] Ross, M. Sheldon. (1996). *Stochastic Processes*, USA, segunda edición, John Wiley and Sons, Inc., págs. 510.

- [132] Rossi, Peter E. (1996). *Modelling Stock Market Volatility. Bridging the Gap to Continuous Time*, USA, Academic Press, págs. 485.
- [133] Rubinstein, Mark (1976). "The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets", *The Journal of Finance, Papers and Proceedings of the Thirty-Four Annual Meeting of the American Finance Association*, vol. 31, USA, May, núm. 2, pp. 551-571.
- [134] Rubinstein, Mark (1983). "Displaced Diffusion Option Pricing", *Journal of Finance*, vol. 38, USA, marzo, núm. 1, pp. 213-217.
- [135] Ruiz, Esther (1994). "Quasi-Maximum Likelihood Estimation of stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, vol. 63, USA, July, núm. 1, pp. 289-306.
- [136] Ruiz, Esther y Veiga, Helena (2008). "Alternativa atractiva y factible para modelizar la evolución de la volatilidad", *Anales de Estudios Económicos y Empresariales*, vol. XVIII, España, núm. 18, pp. 9-68.
- [137] Sandmann, Gleb y Koopman, Siem Jan (1998). "Estimation of Stochastic Volatility Models via Monte Carlo Maximum Likelihood", *Journal of Econometrics*, vol. 87, pp. 271-301.
- [138] Schöbel, Rainer y Zhu, Jianwei (1999). "Stochastic Volatility with an Ornstein-Uhlenbeck Process: An Extension", *European Finance Review*, vol. 3, USA, núm. 1, pp. 23-46.
- [139] Scott, Louis O. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, USA, December, núm. 4, pp. 419-438.
- [140] Schwert, William G. (1989). "Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?", *The Journal of Finance*, vol. 44, USA, diciembre, núm. 5, pp. 1115-1153.
- [141] Senra, Díaz Israel y Pena, Trapero J. Bernardo (2005). "Predicción de la volatilidad de los rendimientos del Índice General de la Bolsa de Madrid: el papel de las asimetrías", *Anales de Economía Aplicada*, Asociación de Economía Aplicada (ASEPELT), vol. 19, España, abril, núm. 001, pp. 1-14.

- [142] Sharpe, William F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, vol. 19, USA, septiembre, núm. 3, pp. 425-442.
- [143] Shephard, Neil (2005). *Stochastic Volatility*, Selected Readings, USA, Oxford University Press.
- [144] Shephard, Neil y Andersen, Torben G. (2009). "Stochastic Volatility: Origins and Overview, *Handbook of Financial Time Series*, edited by Andersen, Torben; Davis, R. A.; Kreibeta, J. P. Mikosh, Thomas, USA, Springer Verlag, pp. 233-254.
- [145] Shiryaev, Albert N. (1999). *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*, vol. 3, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., págs. 834.
- [146] Shreider, Y. A. (1966). "*The Monte Carlo Method*, Pergamon Press, USA, pp.
- [147] Stein Elias M. y Stein, Jeremy C. (1991). "Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, vol. 4, USA, núm. 4, pp. 727-752.
- [148] Tamayo, Medina Ronne y Heivar Yesid Rodríguez Pinzón (2010). "Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica", *Comunicaciones en Estadística*, vol. 3, Colombia, junio, núm. 1, pp. 79-98.
- [149] Taylor, Stephen, J. (1986). *Modelling Financial Time Series*, Chichester, Reino Unido, págs. 268.
- [150] Taylor, Stephen, J. (1994). "Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study", *Mathematical Finance*, vol. 4, USA, abril, núm. 2, pp. 183-204.
- [151] Teräsvirta, Timo y Zhao, Zhenfang (2011). "Stylized facts of Returns Series, Robust Estimates and Three Popular Models of Volatility", *Applied Financial Economics*, vol. 21, USA, núm. 1-2, pp. 67-94.
- [152] Yu, Jun (2005). "On Leverage in a Stochastic Volatility Model", *Journal of Econometrics*, vol. 127, USA, agosto, núm. 2, págs. 165-178.

- [153] Yu, Jun; Yang, Zhenlin y Zhang, Xibin (2006). "A Class of Nonlinear Stochastic Volatility Models and Its Implications on Pricing Currency Options", *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 51, USA, diciembre, núm. 4, pp. 2218-2231.
- [154] Venegas, Martínez Francisco e Islas Camargo Alejandro (2005). "Volatilidad de los mercados bursátiles de América Latina: efectos de largo plazo", *Revista de Comercio Exterior*, vol. 55, México, noviembre, núm. 11, pp. 936-947.
- [155] Venegas, Martínez Francisco (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. México, Cengage Learning, segunda edición.
- [156] Wiggins, James B. (1987). "Option Values under Stochastic Volatilities", *Journal of Financial Economics*, vol. 19, USA, diciembre, núm. 2, pp. 351-372.

Glosario

Acción. Cada una de las partes en que se considera dividido el capital social de una sociedad anónima o de una sociedad en comandita por acciones. Título de crédito que sirve para acreditar y transmitir la calidad y los derechos de socio, en esta clase de sociedades.

Activo financiero. Se caracteriza por estar expresado y ser representativo en moneda corriente. Su monto se fija por contrato y origina a sus tenedores un aumento o disminución en el poder de compra según tengan o no un rendimiento por encima de la inflación.

Activo subyacente. Activo que, en los mercados de productos derivados, está sujeto a un contrato y es el objeto de intercambio. Es decir, es aquel activo sobre el que se efectúa la negociación de un activo derivado.

Aleatorio. Se dice que un evento o un proceso es aleatorio si no es posible predecir el siguiente resultado o el siguiente paso del proceso.

Arbitraje. Una estrategia de operaciones simultáneas de compra y venta de un mismo activo en diferentes mercados. Negociación que aprovecha las diferencias de precios y las ineficiencias en los mercados.

Aversión al riesgo. Supuesto respecto al comportamiento de los inversores. Se considera que los inversores aceptarán asumir mayor riesgo solo si el rendimiento esperado es mayor.

Beta. Una medida del riesgo sistemática de un activo.

CAPM (Capital Asset Pricing Model). Un modelo que relaciona el rendimiento esperado de un activo y su beta.

Cartera delta neutral. Una cartera con delta cero por lo que no es sensible ante pequeños cambios en el valor del activo subyacente.

Cobertura: La compra o venta de opciones para reducir el riesgo.

Cobertura delta. Una cobertura diseñada para hacer el precio de una cartera de derivados insensible a pequeños cambios en el precio de su activo subyacente.

Cobertura dinámica. Un procedimiento para cubrir una posición de opciones cambiando periódicamente la posición mantenida en los activos subyacentes. El objetivo suele ser mantener una posición delta neutral.

Contrato de una opción. Contrato estandarizado en el cual el comprador mediante el pago de una prima, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado (precio de ejercicio) en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.

Corta: La posición creada mediante la venta de opciones (ya sea una opción call o una opción put).

Curtosis. Una medida del ancho de las colas de una distribución.

Curva de volatilidad. La variación de la volatilidad implícita en función del precio de ejercicio.

Derivado. Un instrumento cuyo precio depende, o se deriva, del precio de otro activo (índices, tasas, instrumentos de deuda entre otros). Implementados en 1972, los principales derivados son: opciones, futuros, warrants y swaps.

Desviación estándar. Conocida también como desviación típica. Característica de una muestra o población que mide su dispersión o variabilidad. Tiene las mismas unidades que la variable. Se obtiene como la raíz cuadrada de la varianza.

Determinístico. Un evento es determinístico cuando es predecible. Generalmente utilizamos una fórmula matemática para conocer su comportamiento.

Distribución implícita. Distribución del precio futuro de un activo implícito en los precios de las opciones sobre dicho activo.

Distribución lognormal. Una variable tiene una distribución lognormal cuando el logaritmo de esta variable sigue una distribución normal.

Distribución normal. Distribución teórica de probabilidad continua que presentan muchos fenómenos donde cada dato pueden interpretarse como consecuencia del resultado que establece el Teorema Central del Límite.

Ejercicio. La acción efectuada por el comprador de una opción call si desea comprar el activo subyacente o por el portador de una opción put si desea vender el activo subyacente.

Especulación. Actuación consistente en asumir conscientemente un riesgo superior al corriente con la esperanza de obtener un beneficio superior al medio que se obtiene normalmente en una operación comercial o financiera.

Estacionaria. Es la serie de datos cuyas propiedades estadísticas básicas como la media y la varianza permanecen constantes en el tiempo, es decir cuando la serie no presenta crecimiento o decrecimiento es estacionaria.

Fecha de vencimiento. El último día en el que se puede ejercer una opción. Si bien las opciones vencen en una fecha determinada durante el mes calendario anterior al mes de vencimiento del contrato, una opción sobre un contrato de futuros de noviembre se denomina una opción de noviembre, dado que su ejercicio conduciría a la creación de una posición en futuros de noviembre.

Filtración. Conjunto de información disponible, compuesta por las σ -álgebras que son útiles para la investigación.

Índice bursátil. Un índice que refleja el valor de una cartera de acciones.

Investigación empírica. Investigación basada en datos históricos del mercado.

Larga: Una posición establecida mediante la compra de opciones (ya sea una opción call o una opción put).

Métodos numéricos. Conjunto de reglas y métodos para la resolución de ecuaciones y problemas a través de procesos iterativos. Estos métodos generalmente se realizan a través de la programación. Método para valorar una opción cuando no se disponen de fórmulas cerradas.

Modelo de Black-Scholes. Un modelo para valorar opciones europeas sobre acciones desarrollado por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton.

Mundo neutral al riesgo. Un mundo donde se supone que los inversores no requieren rendimiento medio extra por asumir riesgos.

Opción. El derecho a comprar o vender un activo.

Opción en el dinero (at the money). Una opción cuyo precio de ejercicio es igual o aproximadamente igual al precio del activo subyacente.

Opción americana. Una opción que puede ejercerse en cualquier momento hasta su fecha de vencimiento.

Opción asiática. Una opción cuyo pago depende del precio medio del activo subyacente durante un periodo especificado.

Opción bermuda. Una opción que puede ser ejercida en fechas específicas a lo largo de su vida.

Opción compuesta. Opción sobre una opción.

Opción de compra (call). Una opción que otorga al comprador de la opción el derecho de comprar (tomar una posición “larga”) el activo subyacente al precio de ejercicio en la fecha de vencimiento o antes.

Opción dentro del dinero (*in the money*): Una opción que tiene valor intrínseco, es decir, cuando el precio de ejercicio de una opción call está por debajo del precio del activo subyacente o cuando el precio de ejercicio de una opción put está por encima del precio del activo subyacente.

Opción europea. Una opción que puede ejercerse únicamente en su fecha de vencimiento.

Opción fuera del dinero (*out the money*): Una opción put o de compra cuyo valor intrínseco actualmente es cero. Es decir, una opción call cuyo precio de ejercicio está por encima del precio del activo subyacente o una opción put cuyo precio de ejercicio está por debajo del precio del activo subyacente.

Opción de venta (*put*). Una opción que otorga al comprador de la opción el derecho de vender (tomar una posición “corta”) el activo subyacente al precio de ejercicio en la fecha de vencimiento o antes.

Paridad put-call. La relación entre el precio de una opción de compra europea y el precio de una opción de venta europea cuando tienen el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento.

Plain vanilla. Un término usado para describir una compra estándar.

Precio de ejercicio. El precio al cual debe comprarse o venderse el activo subyacente en un contrato de una opción.

Prima. El precio de una opción en particular determinado por la negociación entre compradores y vendedores. La prima es la cantidad máxima de pérdida posible para el comprador de una opción y la cantidad máxima de ganancia posible para el vendedor de una opción.

Reversión a la media. Tendencia de una variable de mercado (como un índice) a acercarse a un nivel medio de largo plazo.

Simulación histórica. Una simulación basada en datos históricos.

Simulación Monte Carlo. Un procedimiento para simular aleatoriamente cambios en variables de mercado para valorar un derivado.

Tasa de interés libre de riesgo. Tasa de interés que se puede ganar sin asumir riesgos.

Tendencia. Es un componente del análisis clásico de series temporales. Refleja el movimiento de la serie en el largo plazo (crecimiento, decrecimiento o estancamiento). Es necesario un número suficientemente grande de observaciones para determinar una tendencia.

Valor esperado. El valor medio de la variable obtenido ponderando los posibles valores según sus probabilidades.

Valor por tiempo. La cantidad por la cual la prima de una opción supera el valor intrínseco de la opción. Si el valor intrínseco de una opción es cero, su prima es enteramente el valor por tiempo.

Valor extrínseco. Valor por tiempo.

Valor intrínseco. La cantidad de dinero que se obtendría si la opción fuera ejercida de inmediato. Para una opción de compra, es el valor mayor entre cero y la diferencia entre el precio del activo y el precio de ejercicio. Para una opción de venta, es el valor mayor entre cero y la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del activo.

Valuación neutral al riesgo. La valuación de una opción y otros derivados suponiendo que el mundo es un mundo neutral al riesgo. La valuación neutral al riesgo da el precio correcto para un derivado en todos los entornos, no sólo en el mundo neutral al riesgo.

Variable. Es una característica de la población o de la muestra cuya medida puede cambiar de valor. Se representa simbólicamente mediante las letras del alfabeto. Según su naturaleza puede ser cualitativa y cuantitativa.

Variable aleatoria. Conocida también como variable estocástica o probabilística. Es la característica considerada en un experimento aleatorio cuyo valor futuro es incierto.

Variable continua. Es una variable cuantitativa. Es la característica de la población, cuyos valores están representados mediante el conjunto de los números reales. Puede tomar cualquier valor real dentro de un intervalo.

Varianza. Es una medida de dispersión de la información. Se obtiene como el promedio de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable respecto de su media aritmética. La varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional.

Venta en corto. Vender en el mercado acciones que han sido prestadas por otro inversor.

Vendedor de opción. El vendedor de una opción call o una opción put; también conocido como el lanzador u otorgante de la opción. Un vendedor de opciones recibe la prima y está sujeto a una posible obligación de mercado si el comprador de la opción elige ejercer los derechos de la opción.

Volatilidad. Una medida de la incertidumbre en el rendimiento obtenido de con un activo.

Volatilidad histórica. Volatilidad estimada a partir de datos históricos.

Volatilidad implícita. Volatilidad obtenida a partir del precio de una opción usando Black-Scholes o un modelo similar.

ANEXOS

Cuadro A1. Modelos de volatilidad alternativos y relación de parámetros

Autor (es)	Modelos	α	ϕ	ρ
Wiggins (1987) Scott (1987) Chesney y Scott (1989) Taylor (1994) Jacquier, Polson y Rosi (1994) Harvey, Ruiz y Shephard (1994) Kim, Shephard y Chib (1998)	$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \phi (\ln \sigma_{t-1}^2 - \alpha) + \sigma \varepsilon_t$			0
Scott (1987) Stein y Stein (1991) Andersen (1994)	$\sigma_t = \alpha + \phi (\sigma_{t-1} - \alpha) + \sigma \varepsilon_t$			0.5
Heston	$\sigma_t = \phi \sigma_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	0		0.5
Hull y White (1987) Johnson y Shanno (1987)	$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma \varepsilon_t$		1	0
Andersen (1994)	$\sigma_t^2 = \varepsilon + \phi (\sigma_{t-1}^2 - \varepsilon) + \sigma \varepsilon_t$			1
Clark (1973)	$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \sigma \varepsilon_t$		0	0
SV no lineales	$\frac{(\sigma_t^2)^\rho - 1}{\rho} = \alpha + \phi \left[\frac{(\sigma_{t-1}^2)^\rho - 1}{\rho} - \alpha \right] + \sigma \varepsilon_t$			

Fuente: Yu, Yang, Zhang, pág. 29.

Cuadro A2. Especificaciones de la familia ARCH

Modelo	Autor (es)	Especificación de σ^2	Aportación principal
ARCH	Robert Engle ¹²²	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$	Planteamiento inicial
Modelos ARCH multivariados	1983: Kraft y Engle	$H_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 H_{t-1}$ $\varepsilon_t = y_t - xb$	Incorporación de más variables explicativas y desarrollo de los modelos aplicando la matriz de varianzas-covarianzas H_t .
ARCH-M	1986: Engle, Lilien y Robins	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$	Modelos ARCH incorporando la desviación típica heteroscedástica modelada como explicativa de la media.
GARCH y GARCH en media	1986: Bollerslev	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 h_{t-1}$	Método generalizado sin restricciones para la estimación de los parámetros ARCH con infinitos retardos.
LGARCH	1986: Bollerslev y Taylor	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$	Linealización del modelo GARCH-M.
MGARCH	1986: Geweke y Pantula	$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_2 \ln(h_{t-1})$	Especificación de la varianza multiplicativa (linealizada con logaritmos).
IGARCH	1986: Engle y Bollerslev	$h_t = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) h_{t-1}$	Persistencia en varianza condicional heteroscedástica. Modelos integrados en varianza.
EGARCH	1989: Nelson	$\log(h_t) = \alpha_0 + \beta_1 \log(h_{t-1})$ $+ \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha \left[\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{2\pi} \right]$	Modelos ARCH para procesos no normales (funciones de densidad exponenciales). Carácter asimétrico de la respuesta a shocks positivos o negativos.

¹²² El modelo ARCH fue inventado durante su estancia sabática en la *London School of Economics* en 1979, David Hendry inventó el nombre. En 1982 plantea la primera especificación y desarrollo.

Modelo	Autor (es)	Especificación de σ^2	Aportación principal
TS-GARCH	1989: Schwert	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{h_{t-1}} + \alpha_2 \sqrt{h_{t-1}} \varepsilon_{t-1}^2 $	Corrección de efectos asimétricos en las variaciones al alza o a la baja.
AGARCH NGARCH	1990: Engle y Ng	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} (\varepsilon_{t-1} - c)^2$	Contraste y solución de autocorrelación entre la perturbación aleatoria y su varianza.
Factor ARCH	1990: Engle, Ng y Rothschild	$H_t = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k \lambda_{kt} + \Omega$	Empleo de la covarianza entre varias series temporales como explicativa de la varianza condicional heteroscedástica
T-GARCH	1992: Gourieroux 1994: Zakonian	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{h_{t-1}} + \alpha_2 \sqrt{h_{t-1}} \varepsilon_{t-1}^2 + \sqrt{h_{t-1}} \max(0, \varepsilon_{t-1})^2$	Modelos dinámicos donde la media y varianza condicionales son funciones <i>stepwise</i> endógenas.
GJR-GARCH	1993: Glosten y otros	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha h_{t-1} \max(0, \varepsilon_{t-1})^2$	Diferenciación del parámetro en subida y en bajada.
V-GARCH	1993: Engle y Ng	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + c \right)^2$	Similar al NGARCH, con una variación mayor en los parámetros asimétricos.
A-PARCH	1993: Ding y otros	$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\varepsilon_{t-1} - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^\delta$	Se propone modelar un valor potencial de la desviación típica que atiende al máximo de la función de autocorrelación del valor absoluto del proceso.
ARCH de régimen cambiante	1994: Hamilton y Susmel	$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{g_{st}}}$ $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2 + \xi d_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2$ si $\tilde{\varepsilon} \leq 0$, $d_{t-1} = 1$ y el resto $d_{t-1} = 0$	Introducción de funciones de densidad que cambian de normal a t-student a partir de cadenas de Markov. Parámetros ARCH cambiantes a partir de una matriz de “estado” o “régimen” de la variable en el periodo previo.

Modelo	Autor (es)	Especificación de σ^2	Aportación principal
GARCH cuadrático y Q-GARCH	1995: Sentana	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 (\varepsilon_{t-1} + \gamma \sqrt{h_{t-1}})^2$	Ligera variante sobre el modelo AGARCH y NGARCH de 1990.
ARCH con componentes o Modelos de memoria larga	1996: Ding y Granger	$h_t = w h_{1t} + (1 - w) h_{2t}$ $h_{1t} = \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{1t-1}$ $h_{2t} = h_t (1 - \alpha_2 - \beta_2) + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 h_{1t-1}$	La varianza se especifica en dos partes: una con efectos importantes de muy corta duración en el tiempo y otra con efectos más discretos, pero persistentes en el tiempo.
LST-ARCH	1996: González-Rivera	$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q [\alpha_{1j} + \alpha_{2j} F(\varepsilon_{t-j})] \varepsilon_{t-j}^2$ $F(\varepsilon_{t-j}) = \frac{1}{[1 - \exp(-\theta_{t-j}^2) \varepsilon_{t-j}]} - \frac{1}{2}$	Caso generalizado del modelo GJR. El empleo de una ecuación de estado logística genera diferentes resultados en función del signo de la innovación en el periodo precedente.
VAR-GARCH	1997:	$h_{(t,i)} = x' b + \alpha_i \varepsilon_{t-1,i}^2 + \beta_i h_{t-1,i}$ <p>donde $i = 1, 2, \dots$ núm. de variables del VAR.</p>	Empleo de un VAR con residuos con heteroscedasticidad condicional.
ACD-GARCH	1997: Ghysels, Eric, Jasiak y Joanna	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 h_{t-1}$ $v_{i+1} = \alpha_0^d + \alpha_1^i (t_{i+1} - t_i) + \beta v_i$	Modelo ARCH para muestras de datos con distintos intervalos de tiempo en cada observación.

Cuadro A3. Modelos de heterocedasticidad condicional

Modelo	Autor (es)	Característica
ARCH	Engle (1982)	Simetría
GARCH	Bollerslev (1986)	Simetría
IGARCH	Engle y Bollerslev (1986)	Integrado
Log GARCH	Geweke (1986) y Pantula(1986)	Simetría
GARCH-M	Engle, Lilien y Robins (1987)	Simetría
AVGARCH y TSGARCH	Taylor (1986) y Schwert (1989)	Simetría
EGARCH	Nelson (1991)	Asimetría
NGARCH	Higgins y Bera (1992)	Simetría
TGARCH	Gourieroux y Monfort (1992) y Zakoian (1994)	Asimetría
GJR-GARCH	Glosten, Jagannaathan y Runkle (1993)	Asimetría
VGARCH	Engle y Ng (1993)	Asimetría
NAGARCH	Engle y Ng (1993)	Asimetría
ACGARCH	Engle y Lee (1993)	Asimetría
APARCH	Ding, Engle y Granger (1993)	Asimetría
ZARCH	Zakoian (1994)	Asimetría
SWARCH	Hamilton y Susmel (1994)	Asimetría
MS-GARCH	Cai (1994) y Hamilton y Susmel (1994)	Simetría
QGARCH	Sentana (1995)	Asimetría
VSARCH	Fornario y Mele (1995)	Asimetría
DTARCH	Li y Li (1996)	Asimetría
FIGARCH	Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996)	Integrado
FIEGARCH	Bollerslev y Makkelsen (1996)	Integrado Asimetría
RSGARCH	Gray (1996)	Simetría
CGARCH	Ding y Granger (1996)	Simetría
ESTGARCH	Hagerud (1997)	Simetría
H-GARCH	Müller et al (1997)	Simetría
STGARCH	Hagerud (1997)	Asimetría
LSTGARCH	González-Rivera (1998)	
FIAPARCH	Tse (1998)	Integrado Asimetría
Tree-Structured GARCH	Audrino y Bühlmann (2001)	Asimetría
ASYMM FIFGARCH	Hwang (2001)	Integrado
SQGARCH	Ishida y Engle (2002)	Simetría
CEVGARCH	Ishida y Engle (2002)	Simetría
ASYMM FIEGARCH	Ruiz y Pérez (2003)	Integrado Asimetría
HYGARCH	Davidson (2004)	Integrado
TV-GARCH	Mikosh y Stáricá (2004)	Asimetría

**Cuadro A4. Número de acciones y pesos relativos de las series
accionarias en la muestra del IPC¹²³**

Emisora	Acciones	%
AMX	28,889,267,337	24.88
WALMEX	6,521,044,137	11.58
FEMSA	1,588,271,013	9.17
GMEXICO	3,575,796,151	6.91
TLEVISA	2,364,475,267	6.61
GFNORTE	1,861,086,226	6.11
CEMEX	9,538,321,864	3.92
ALFA	413,831,491	3.81
PEÑOLES	119,242,724	3.35
GMODELO	570,933,932	2.91
BIMBO	1,410,960,000	2.25
ELEKTRA	72,344,446	1.89
KIMBER	1,476,108,185	1.89
MEXCHEM	736,000,000	1.88
AC	483,379,072	1.76
MFRISCO	509,076,573	1.46
GAP	381,480,000	0.99
LAB	736,924,598	0.95

Emisora	Acciones	%
LIVERPOL	177,701,490	0.94
COMPARC	997,429,622	0.76
ASUR	138,525,000	0.73
ICA	604,679,197	0.66
COMERCI	389,688,227	0.48
SORIANA	248,696,455	0.48
AZTECA	1,031,798,707	0.46
BOLSA	355,793,402	0.46
HOMEX	268,512,040	0.43
URBI	585,867,172	0.37
OHLMEX	447,836,431	0.36
GEO	494,828,267	0.35
CHEDRAUI	192,783,442	0.34
ALSEA	317,135,367	0.27
GRUMA	169,095,213	0.27
ARA	780,377,610	0.16
AXTEL	991,167,588	0.16
		100.00

¹²³ Las empresas emisoras iniciaron operaciones el 1° de junio de 2012.

Resultados de las especificaciones con modelos tipo ARCH para el IPC

Cuadro A5.1. ARCH(1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 14 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000983	0.000265	3.707606	0.0002
AR(1)	0.054576	0.018201	2.998527	0.0027
Variance Equation				
C	0.000168	3.20E-06	52.39348	0.0000
ARCH(1)	0.227234	0.019614	11.58539	0.0000
R-squared	0.006440	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.006116	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014594	Akaike info criterion		-5.662673
Sum squared resid	0.653212	Schwarz criterion		-5.654815
Log likelihood	8693.372	Hannan-Quinn criter.		-5.659850
Durbin-Watson stat	1.912880			
Inverted AR Roots	.05			

Cuadro A5.2. GARCH(1,1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 14 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001024	0.000230	4.449093	0.0000
AR(1)	0.073682	0.019820	3.717531	0.0002
Variance Equation				
C	2.59E-06	4.43E-07	5.836302	0.0000
ARCH(1)	0.082633	0.006951	11.88708	0.0000
GARCH(1)	0.905570	0.006941	130.4602	0.0000
R-squared	0.007406	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007082	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.887874
Sum squared resid	0.652577	Schwarz criterion		-5.878051
Log likelihood	9039.942	Hannan-Quinn criter.		-5.884345
Durbin-Watson stat	1.948559			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.3. GARCH(1,2)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 16 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001027	0.000231	4.450992	0.0000
AR(1)	0.073210	0.020073	3.647218	0.0003
Variance Equation				
C	2.73E-06	5.58E-07	4.891544	0.0000
ARCH(1)	0.087733	0.014883	5.894979	0.0000
GARCH(1)	0.835418	0.166851	5.006984	0.0000
GARCH(2)	0.064447	0.152334	0.423067	0.6722
R-squared	0.007380	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007056	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.887277
Sum squared resid	0.652594	Schwarz criterion		-5.875490
Log likelihood	9040.027	Hannan-Quinn criter.		-5.883043
Durbin-Watson stat	1.947656			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.4. GARCH(1,1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 23 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*GARCH(-2) +

C(7)*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001052	0.000230	4.566774	0.0000
AR(1)	0.072841	0.020500	3.553135	0.0004
Variance Equation				
C	2.85E-06	5.40E-07	5.276949	0.0000
ARCH(1)	0.097806	0.011555	8.464499	0.0000
GARCH(1)	1.078834	0.133969	8.052871	0.0000
GARCH(2)	-0.621944	0.206152	-3.016913	0.0026
GARCH(3)	0.432468	0.101575	4.257634	0.0000
R-squared	0.007270	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.006947	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014588	Akaike info criterion		-5.888395
Sum squared resid	0.652666	Schwarz criterion		-5.874644
Log likelihood	9042.743	Hannan-Quinn criter.		-5.883455
Durbin-Watson stat	1.946776			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.5. GARCH(2,1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 14 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001030	0.000231	4.467625	0.0000
AR(1)	0.072610	0.020265	3.583017	0.0003
Variance Equation				
C	2.48E-06	4.52E-07	5.498106	0.0000
ARCH(1)	0.094326	0.015168	6.218855	0.0000
ARCH(2)	-0.013570	0.014389	-0.943051	0.3457
GARCH(1)	0.907984	0.007010	129.5212	0.0000
R-squared	0.007343	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007019	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.887348
Sum squared resid	0.652619	Schwarz criterion		-5.875561
Log likelihood	9040.136	Hannan-Quinn criter.		-5.883113
Durbin-Watson stat	1.946502			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.6. GARCH(2,2)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 21 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*GARCH(-1)

+ C(7)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001025	0.000232	4.420656	0.0000
AR(1)	0.074138	0.019626	3.777484	0.0002
Variance Equation				
C	5.07E-06	8.91E-07	5.693941	0.0000
ARCH(1)	0.075193	0.008037	9.355726	0.0000
ARCH(2)	0.085441	0.007604	11.23696	0.0000
GARCH(1)	-0.065754	0.015058	-4.366810	0.0000
GARCH(2)	0.881615	0.014678	60.06231	0.0000
R-squared	0.007423	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007100	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.888039
Sum squared resid	0.652566	Schwarz criterion		-5.874288
Log likelihood	9042.197	Hannan-Quinn criter.		-5.883099
Durbin-Watson stat	1.949416			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.7. GARCH(2,3)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 19 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*GARCH(-1)

+ C(7)*GARCH(-2) + C(8)*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001046	0.000230	4.541897	0.0000
AR(1)	0.073556	0.019985	3.680598	0.0002
Variance Equation				
C	3.81E-06	8.16E-07	4.666940	0.0000
ARCH(1)	0.082603	0.012320	6.704619	0.0000
ARCH(2)	0.046941	0.018465	2.542188	0.0110
GARCH(1)	0.888311	0.108266	8.204914	0.0000
GARCH(2)	-0.673718	0.115792	-5.818335	0.0000
GARCH(3)	0.638785	0.063576	10.04764	0.0000
R-squared	0.007321	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.006997	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.888461
Sum squared resid	0.652633	Schwarz criterion		-5.872744
Log likelihood	9043.843	Hannan-Quinn criter.		-5.882814
Durbin-Watson stat	1.948164			

Cuadro A5.8. GARCH(3,1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 15 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2

+ C(7)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001054	0.000231	4.571861	0.0000
AR(1)	0.073129	0.020005	3.655459	0.0003
Variance Equation				
C	1.91E-06	3.81E-07	5.003105	0.0000
ARCH(1)	0.087542	0.014857	5.892230	0.0000
ARCH(2)	0.042270	0.022929	1.843497	0.0653
ARCH(3)	-0.062178	0.017925	-3.468863	0.0005
GARCH(1)	0.923663	0.006959	132.7207	0.0000
R-squared	0.007275	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.006952	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014588	Akaike info criterion		-5.888870
Sum squared resid	0.652663	Schwarz criterion		-5.875119
Log likelihood	9043.472	Hannan-Quinn criter.		-5.883930
Durbin-Watson stat	1.947305			
Inverted AR Roots	.07			

Cuadro A5.9. GARCH(3,2)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 25 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2

+ C(7)*GARCH(-1) + C(8)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001066	0.000230	4.634074	0.0000
AR(1)	0.076064	0.019896	3.823082	0.0001
Variance Equation				
C	4.27E-08	2.06E-08	2.070790	0.0384
ARCH(1)	0.087378	0.014823	5.894930	0.0000
ARCH(2)	-0.058578	0.029392	-1.992979	0.0463
ARCH(3)	-0.026687	0.017153	-1.555824	0.1197
GARCH(1)	1.808336	0.028233	64.04935	0.0000
GARCH(2)	-0.810712	0.027563	-29.41351	0.0000
R-squared	0.007338	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007014	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.892058
Sum squared resid	0.652622	Schwarz criterion		-5.876342
Log likelihood	9049.363	Hannan-Quinn criter.		-5.886411
Durbin-Watson stat	1.952733			
Inverted AR Roots	.08			

Cuadro A5.10. GARCH(3,3)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 36 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)*RESID(-3)^2

+ C(7)*GARCH(-1) + C(8)*GARCH(-2) + C(9)*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001064	0.000230	4.628194	0.0000
AR(1)	0.075482	0.019696	3.832295	0.0001
Variance Equation				
C	6.36E-08	3.01E-08	2.113321	0.0346
ARCH(1)	0.085455	0.013579	6.292953	0.0000
ARCH(2)	0.023782	0.019066	1.247352	0.2123
ARCH(3)	-0.106063	0.015749	-6.734705	0.0000
GARCH(1)	1.031861	0.142083	7.262389	0.0000
GARCH(2)	0.618929	0.267259	2.315836	0.0206
GARCH(3)	-0.654361	0.127944	-5.114445	0.0000
R-squared	0.007327	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.007004	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014587	Akaike info criterion		-5.892143
Sum squared resid	0.652629	Schwarz criterion		-5.874463
Log likelihood	9050.494	Hannan-Quinn criter.		-5.885791
Durbin-Watson stat	1.951659			
Inverted AR Roots	.08			

Cuadro A5.11. EGARCH(1,1)

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 15 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5)

*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000527	0.000217	2.423653	0.0154
AR(1)	0.082637	0.018820	4.390921	0.0000
Variance Equation				
C(3)	-0.307968	0.027501	-11.19859	0.0000
C(4)	0.145327	0.014796	9.821994	0.0000
C(5)	-0.112184	0.009096	-12.33396	0.0000
C(6)	0.977662	0.002597	376.5085	0.0000
R-squared	0.008448	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.008125	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014579	Akaike info criterion		-5.924208
Sum squared resid	0.651892	Schwarz criterion		-5.912421
Log likelihood	9096.697	Hannan-Quinn criter.		-5.919973
Durbin-Watson stat	1.966935			
Inverted AR Roots	.08			

Cuadro A5.12. *TARCH(1,1)*

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Date: 05/02/12 Time: 19:31

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 14 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{GARCH} = C(3) + C(4)*\text{RESID}(-1)^2 + C(5)*\text{RESID}(-1)^2*(\text{RESID}(-1)<0) + C(6)*\text{GARCH}(-1)$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000607	0.000221	2.744499	0.0061
AR(1)	0.080481	0.019507	4.125720	0.0000
Variance Equation				
C	3.18E-06	4.31E-07	7.369399	0.0000
RESID(-1)^2	0.008857	0.007521	1.177605	0.2390
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.135801	0.012322	11.02139	0.0000
GARCH(-1)	0.906483	0.007876	115.1009	0.0000
R-squared	0.008409	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.008086	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014579	Akaike info criterion		-5.920331
Sum squared resid	0.651918	Schwarz criterion		-5.908544
Log likelihood	9090.748	Hannan-Quinn criter.		-5.916096
Durbin-Watson stat	1.962898			
Inverted AR Roots	.08			

Cuadro A5.13. *TARCH(1,1)*

Dependent Variable: RENDIMIENTO_IPC

Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution

Sample (adjusted): 3/03/2000 12/07/2011

Included observations: 3069 after adjustments

Convergence achieved after 14 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000594	0.000222	2.680918	0.0073
AR(1)	0.082886	0.019143	4.329735	0.0000
Variance Equation				
C	3.11E-06	4.01E-07	7.750320	0.0000
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.140758	0.011217	12.54848	0.0000
GARCH(-1)	0.912929	0.005798	157.4662	0.0000
R-squared	0.008462	Mean dependent var		0.000576
Adjusted R-squared	0.008139	S.D. dependent var		0.014639
S.E. of regression	0.014579	Akaike info criterion		-5.920461
Sum squared resid	0.651883	Schwarz criterion		-5.910639
Log likelihood	9089.948	Hannan-Quinn criter.		-5.916932
Durbin-Watson stat	1.967421			
Inverted AR Roots	.08			