



UNIVERSIDAD
PANAMERICANA

Programa de Doctorado en Ingeniería de la Universidad Panamericana Campus Aguascalientes

**Ecuaciones fraccionarias y sus
aplicaciones.
Aportes a una ecología integral.**

TESIS
que para optar por el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA

presenta:

EDUARDO DE LA VEGA SEGURA

bajo la dirección del

Dr. FERNANDO BRAMBILA PAZ
y codirección del
Dr. CLAUDIO CÉSAR CALABRESE

AGUASCALIENTES Noviembre 2021

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACION

En mi calidad de ASESOR y después de haber analizado el trabajo de titulación de:

De la Vega	Segura	Eduardo
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)

Quien cursó el Doctorado en Ingeniería con reconocimiento de validez oficial de estudios de la Secretaría de Educación Pública según acuerdo número 20171659 de fecha 12 de mayo 2017 y presenta el trabajo titulado

“Ecuaciones fraccionarias y sus aplicaciones. Aportes a una ecología integral.”

de conformidad a la modalidad de titulación: Tesis

Manifiesto que reúne los requisitos que obligan los reglamentos en vigor, para ser presentado ante el Honorable jurado del Examen Profesional

Aguascalientes, Ags., 10 de noviembre de 2021.

Vo.Bo.



Dr. Fernando Brambila Paz

No. Cédula profesional Doctorado en Ciencias (Matemáticas) 1387209

Índice general

Agradecimientos	5
Resumen	6
<i>Summary</i>	7
Lista de terminología y acrónimos	8
Contexto	9
Objetivos	10
Objetivo general	10
Objetivos específicos	10
Estructura	10
1 Aportes a una ecología integral	12
1.1 Introducción	12
1.2 La cuestión ecológica en el Magisterio de los Papas	13
1.2.1 Juan XXIII y la encíclica <i>Mater et Magistra</i> (1963)	14
1.2.2 Pablo VI y el discurso por el vigésimo quinto aniversario de la FAO (16 de noviembre de 1970)	15
1.2.3 Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente (Vaticano, 1972)	16
1.2.4 Pablo VI, Carta Octogesima Adveniens (1972)	17
1.2.5 Juan Pablo II y la cuestión ecológica	18
1.2.6 La peculiaridad de Benedicto XVI en el tratamiento de la cuestión ecológica	22
1.2.7 El Papa Francisco y encíclica <i>Laudato Si'</i> ; el caso de las energías renovables.	23
1.3 La cuestión de la energía fósil	26
1.3.1 La interpretación de los procesos de extracción de energía fósil en clave cultural	28
2 Ecuaciones fraccionarias	31
2.1 Antecedentes históricos	31
2.1.1 Antecedentes matemáticos	34
2.2 Derivadas fraccionarias, definiciones y aplicaciones (Riemann-Louville, Caputo, derivada conforme)	41
2.2.1 Propiedades de las distintas derivadas fraccionarias	50
2.3 Nueva definición de la derivada fraccionaria conforme	50
3 Newton-Raphson fraccionario	52
3.1 Método del punto fijo	52
3.1.1 Breve introducción	52
3.1.2 Desarrollo formal	53
3.2 Orden de convergencia	54

3.3	Historia de Newton-Raphson	58
3.4	Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable	60
3.4.1	Definición del operador diferencial fraccionario Vega-Brambila	60
3.4.2	Desarrollo del método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable	68
4	Aplicaciones del método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable en paneles solares híbridos y finanzas	71
4.1	Paneles solares híbridos	71
4.1.1	Datos atmosféricos	72
4.1.2	Descripción de paneles solares híbridos	73
4.1.3	Descripción del efecto-fotoeléctrico y termo-eléctrico	76
4.1.4	Propuesta de problema y ecuaciones	76
4.1.5	Modelado matemático del panel solar	77
4.1.6	Solución del sistema por derivada fraccionaria conforme	77
4.2	Solución del modelo de Tauer de análisis de opciones reales mediante el enfoque FNRCM	84
4.2.1	Modelo económico-financiero en tiempos de incertidumbre	84
4.2.2	Solución del sistema por derivada fraccionaria conforme	89
5	Ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias	92
5.1	Un ejemplo de la aplicación de las derivadas fraccionarias en la solución de una masa en caída libre con fricción	93
5.2	Función Vega-Brambila	99
5.3	Ecuación de flujo de Fourier	100
5.3.1	Solución de la ecuación de flujo por el método de Fourier	101
5.3.2	Solución de la ecuación de flujo por el método de diferencias finitas	103
5.4	Solución de la ecuación de flujo de Fourier fraccionaria con diferencias finitas	105
5.4.1	Método clásico de diferencias finitas	105
5.4.2	Aportación para la solución de la ecuación de flujo fraccionaria de Fourier con los conceptos de derivada fraccionaria de a) Riemann-Liouville y b) Vega-Brambila por el método de diferencias finitas	106
5.5	Aplicación en industria petrolera	112
	Notas Finales	116
	Conclusiones	116
	Futuras líneas de investigación	117
	Bibliografía	121
	Publicaciones en el marco de esta tesis	124

Agradecimientos

- A Dios:
Gracias por haberme creado, redimido, por dirigirme, enseñarme, corregirme y siempre ayudarme.

- A Dulce María:
Mi querida esposa, compañera, sin ti nada sería posible. Somos uno.

- A mis hijos Ascan, Aldo, Dulce María, Armida, José María, Olaf, y Pedro:
Por su paciencia, porque son ese gran encargo que Dios nos ha puesto a su mamá y a mí, por el tiempo que era para ustedes y he tomado.

- A Fernando Brambila Paz, Claudio Calabrese y Pedro Manuel Rodrigo:
Por su guía, por compartir conmigo sus conocimientos y por su ejemplo de vida. Mi reconocimiento y gratitud.

- A Gabriel Domínguez y Antonio Esquivias:
Por impulsarme para poder cursar mis estudios doctorales dentro de la Universidad Panamericana.

- A Alfredo Pedroza, Anthony Torres, Mariana de la Vega y Carmen de la Vega:
Por su apoyo y paciencia.

Resumen

Muchos de los modelos usados en ingeniería para describir fenómenos físicos se encuentran en términos de ecuaciones fraccionarias algebraicas y diferenciales tanto ordinarias como parciales. Actualmente no tener métodos adecuados para resolver este tipo de ecuaciones obstaculiza el análisis en la investigación.

El estudio de las derivadas fraccionarias aplicadas a este tipo de ecuaciones fraccionarias abre un horizonte interesante, ya que el poder resolver estos sistemas de una manera cómoda, permitirá profundizar en el análisis de los modelos con la capacidad incluso de variar parámetros y ver la sensibilidad de la respuesta a estos cambios, facilitando el diseño de prototipos, la predicción del comportamiento de variables críticas, y la construcción de mejores dispositivos.

Una variable que no se considera en el desarrollo tecnológico es el impacto negativo que éste puede presentar en la naturaleza. Consideramos que esa variable debe de estar siempre presente en el avance tecnológico.

Se presenta una nueva definición de derivada fraccionaria conforme y su aplicación en funciones clásicas, un nuevo método iterativo que permite la solución de sistemas fraccionarios de n ecuaciones con n variables, el cual fue aplicado en el diseño de un módulo termogenerador-foto-concentrador híbrido del Dr. Pedro Rodrigo y en un modelo financiero de incertidumbre modelado a partir del proceso de Wiener. Posteriormente, se muestra una nueva solución de la ecuación de calor de Fourier por el método de diferencias finitas fraccionarias con el operador de Riemann-Liouville y la nueva definición de derivada conforme, finalizando con el trabajo de Brambila y Martínez en el modelado de la presión de salida del petróleo con derivadas fraccionarias, dando mejores resultados que el análisis previo usado por la compañía British Petroleum que provocó el desastre en el Golfo de México en el año 2010.

Summary

A lot of models used in engineering to describe physical phenomena are modeled using fractional algebraic and ordinal or partial differential equations. A lack of adequate methods for solving this kind of equations is blocking further analysis in research. The study of fractional derivatives applied in such fractional equations opens a new and interesting horizon by enabling us to find the solutions for these systems in more comfortable ways, allowing deeper model analysis, and even allowing for sensitiveness response analysis due to parameter variation, thus easing prototype design, critical variable behavior predictions and better device construction.

Negative impact in nature due to technological improvement is a variable that has been overlooked, and that we believe must be always considered when doing new developments. A new definition for fractional conformable derivative is introduced and applied to classical functions, a new iterative method which allows finding the solution for n equations with n variable systems was applied in the design of PhD. Pedro Rodrigo's hybrid thermoelectric-concentrator photovoltaic module, and a financial put and call model developed from a Winner process. Afterwards a new solution for Fourier heat equation is presented using the finite difference method applying the Riemann-Liouville fractional derivative definition and the new fractional conformable derivative definition proposed in this work. Finally the work of Brambila and Martínez is presented in a differential pressure model using fractional derivatives with better results than those used by British Petroleum that caused the 2010 disaster in Golfo de México.

Lista de terminología y acrónimos

- 1D Una dimensión
- 3D Tres dimensiones
- BP British Petroleum
- CEACTEMA Centro de Estudios Avanzados en Energía y Medio Ambiente
- CFC Clorofluorocarbonos
- CP Cogeneration Plant
- CPV Sistema Fotovoltaico Concentrador (Concentrator Photovoltaic)
- DDT Dicloro-difenil-tricloroetano
- DNI Irradiancia Normal Directa (Direct Normal Irradiance)
- EEOR Electrical Enhanced Oil Recovery
- EOR Enhanced Oil Recovery
- ET Electromagnetic Treatment
- FAO Food and Agricultural Organization of the United Nations
- FNRCM Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable
- FPN Pseudo Newton Fraccionario
- LCOE Costo de Energía Nivelado (Levelized Cost Of Energy)
- MJ Unión Múltiple (Multiple Junction)
- NF Newton Fraccionario
- NR Newton-Raphson
- PD Proporcional-derivativo
- PV Sistema Fotovoltaico (Photo Voltaic)
- RL Riemann-Liouville
- SF Factor Espectral (Spectral Factor)
- SR Respuesta Espectral (Spectral Response)
- TEG Generador Termoeléctrico (Thermo Electric Generator)
- VB Vega Brambila

Contexto

La mayoría de los problemas en ingeniería son modelados en términos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, las cuales es necesario resolver para poder analizar distintas respuestas ante distintas entradas del sistema. Algunos de estos modelos utilizan derivadas enteras dejando espacio para preguntarse, ¿qué pasaría si los exponentes de estas derivadas no fueran enteros sino fraccionarios? ¿Qué pasa con las soluciones de estas ecuaciones?

Los métodos numéricos tradicionales usados para encontrar las raíces en sistemas de ecuaciones utilizan el concepto de derivada entera. Se plantea la interrogante sobre su aplicación con derivadas de índice diferente al entero.

El cálculo fraccionario tiene siglos de conocerse en sus conceptos y complejidad, desde Leibniz en el año 1695, el cual visualiza en la famosa carta que contesta a L'Hopital haciendo notar la gran importancia en el futuro. Euler (1730), Legendre (1809), Laplace (1812), Lacroix (1819), Abel (1823), Fourier (1822), Liouville (1832), Riemann (1892), Gerasimov (1948), Caputo (1969), Karci (2013), y Mohhammad (2019) comentan sobre el tema. Se puede notar que este tema ha sido estudiado por grandes mentes siendo la época de Caputo a la actualidad la de la aplicación de esta herramienta en varias áreas del conocimiento. Los conceptos de derivada entera son de una comprensión intuitiva y lógica en el mundo físico, pensar que entre la posición $y^{(0)}$ y la velocidad $y^{(1)}$ existe un espacio de soluciones aparentemente inexplicable que puede definir una derivada fraccionaria entre la posición y la velocidad que abren la puerta a la solución de diversos problemas en ingeniería. El incremento del uso de la derivada fraccionaria en diversas áreas del conocimiento ha sido exponencial en los últimos años con el mayor número de publicaciones en matemáticas, ingeniería, física, astronomía y química.

El impacto ecológico suele ser una variable despreciada en el desarrollo tecnológico. Desde la revolución industrial, la ciencia ha suplido las bestias por máquinas, generando beneficios invaluable desde el punto de vista económico y de calidad de vida para la humanidad. Hasta hace unos años hemos podido percatarnos del costo ecológico real del progreso. Es importante crear conciencia de las posibles consecuencias, frecuentemente ocultas, en la comunidad científica que desarrolla tecnología. Paradójicamente, el cambio climático está haciendo retroceder la calidad de vida lograda. Hay desastres naturales que son consecuencia del calentamiento global, otros por la contaminación del entorno natural, y, como en repetidas ocasiones en la historia de la humanidad, hubo llamadas anunciando el desastre que no fueron tomadas en cuenta.

Hace más de 10 años, la Universidad Panamericana inauguró un programa de doctorado en ingeniería diseñado por las tres sedes. El campus Aguascalientes propuso un nuevo programa aprobado en el 2017 con REconocimiento de Validez Oficial de Estudios (RVOE) 20171659, teniendo entre sus principales objetivos pertenecer al programa de excelencia de Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), en un periodo de cinco años. Una cuestión innovadora del programa es el enfoque interdisciplinario de la investigación, donde las tesis pueden ser codirigidas, añadiendo líneas de investigación de otras áreas del conocimiento a la central de la tesis, ampliando la visión. Cuenta con líneas de investigación muy bien definidas y acotadas, pertinentes, relevantes y de impacto tecnológico en la sociedad, bajo la dirección de profesores investigadores que pertenecen al Sistema Nacional de Investigadores (SNI). El programa cuenta con parámetros de excelencia académica como el requisito de al menos una publicación en revista indexada por la base de datos bibliográfica Scopus. Con este programa, se busca que los egresados del Doctorado en Ingeniería desarrollen su capacidad de investigación, aporten creando nueva tecnología y enriquezcan el conocimiento que se hereda a la sociedad.

Algunos de los trabajos destacados que anteceden y están relacionados a esta investigación son las tesis doctorales de: Carlos Alberto Torres Martínez, "Aplicación de esquemas numéricos con

funciones de base radial para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias” publicada en agosto de 2020; Anthony Torres Hernández “Solución de sistemas algebraicos y diferenciales mediante el desarrollo de métodos iterativos que involucran operadores de cálculo fraccionario” que se encuentra en proceso de revisión.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar nuevos métodos de cálculo matemático basados en derivadas fraccionarias y aplicarlos para la solución de problemas de ingeniería, con al menos una aplicación en mejora medioambiental.

Objetivos específicos

- Revisar las aportaciones del Magisterio de los Papas a una ecología integral.
- Recapitular el desastre petrolero del Golfo de México en el año 2010 de la British Petroleum junto con su impacto ecológico y cultural, así como la tecnología usada.
- Aplicar los métodos de cálculo matemático desarrollados, basados en derivadas fraccionarias, con un enfoque a una aplicación en la mejora medioambiental.
- Aplicar los métodos de cálculo matemático desarrollados, basados en derivadas fraccionarias con enfoque en una aplicación con incertidumbre, ya que esta tesis se desarrolló en parte en el contexto de la pandemia de COVID-19.
- Aplicar los métodos de cálculo matemático desarrollados, basados en derivadas fraccionarias en la ecuación diferencial de caída libre con fricción con exponente fraccionario variable en el tiempo.
- Aplicar los métodos de cálculo matemático desarrollados, basados en derivadas fraccionarias a la solución de la ecuación de flujo de calor de Fourier.

Estructura

El presente trabajo, *Ecuaciones fraccionarias y sus aplicaciones. Aportes a una ecología integral*, está compuesto por cinco capítulos. La visión de la Universidad Panamericana de considerar dentro de las tesis de ingeniería aportes importantes de otras áreas del conocimiento nos parece una idea innovadora y que completa la madurez de un investigador.

El primer capítulo, *Aportes a una ecología integral*¹, reclama la necesidad, a las personas que nos dedicamos al desarrollo tecnológico, de una evaluación que va más allá de lo económico y del bienestar humano, hacia la importante consideración de los impactos ecológicos que las tecnologías pueden causar a nuestro planeta. Aquí se repasa la cuestión ecológica en el Magisterio de los Papas Juan XXIII, Pablo VI, Juan Pablo II, Benedicto XVI y Francisco, con un énfasis especial en la encíclica de este último ‘Laudato Sí’ y el caso de las energías renovables. Por último la cuestión de la energía fósil interpretando los procesos de extracción de esta industria en clave cultural.

¹Las referencias bibliográficas de este capítulo están hechas respetando el formato de citación Chicago utilizado ampliamente en las publicaciones de humanidades. La bibliografía de los capítulos segundo y posteriores tiene formato APA.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes históricos de las ecuaciones fraccionarias enfocadas en el concepto de derivada fraccionaria. Se repasan las ideas de Euler, Lagrange, Laplace, Lacroux, Riemann, Liouville, Heaviside y Caputo. Se analizan las propiedades de estas derivadas y al final se propone una nueva definición para la derivada fraccionaria conforme, la cual es una de las aportaciones que se presentan en este trabajo.

Esta nueva definición de derivada fraccionaria conforme, la cual hemos llamado operador diferencial fraccionario Vega-Brambila, se presenta en el tercer capítulo, el cual acompañamos con las gráficas de las funciones clásicas derivadas variando el parámetro α . Creemos que estos conceptos podrán ser aplicados en futuras investigaciones. Este operador diferencial propuesto se aplica en el método del punto fijo, en el caso particular de Newton-Raphson, y se propone como segunda aportación, extendiendo su alcance a la solución de sistemas de ecuaciones no lineales multivariantes.

En el cuarto capítulo se presentan aplicaciones de ingeniería en paneles solares como ejemplo de desarrollos tecnológicos congruentes con el desarrollo de una ecología integral. Este modelo, desarrollado por el Dr. Pedro Rodrigo y su equipo de investigadores, lo vemos como el inicio de un progreso tecnológico importante para el futuro. Por otra parte, se señala la descripción general del modelo de Pedro Rodrigo, el modelo matemático no lineal multivariable, la solución por el método propuesto de Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM) y dada la solución del modelo un análisis sobre el desempeño de la tecnología con base en las eficiencias.

Parte de esta tesis fue escrita durante la pandemia de COVID-19. En este tiempo los conceptos de futuro y riesgo fueron rebasados por la 'incertidumbre' de los escenarios futuros. Dentro del cuarto capítulo, se presenta además un modelo financiero en tiempos de incertidumbre basado en la teoría de movimiento Browniano y modelado por el Dr. José de Jesús Brambila [Brambila Paz, 2011] con los criterios de Tauer [Tauer, 2004] que termina por ser un modelo matemático fraccionario multivariable. En su investigación, Brambila propone un problema de inversión tecnológica en el sector agro-industrial donde se necesita decidir si luego de un tiempo t de la inversión inicial se reinvierte o se deja el proyecto.

En el quinto capítulo se presenta como aportación la solución a la ecuación fraccionaria de flujo de Fourier de dos formas. La primera, con los conceptos de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la segunda, con el operador fraccionario Vega-Brambila propuesto en el tercer capítulo. Ambas definiciones son aplicadas en el método de diferencias finitas que se resume en la tabla 5.1. Adicionalmente, se expone la solución de un problema clásico de flujo de calor en una dimensión, donde se aprecia que para $\alpha < 1$ la transferencia de calor se alenta en el tiempo de manera exponencial y el dominio en donde α tiene sentido para este problema.

Como segunda parte del quinto capítulo de este trabajo se presenta la investigación de F. Brambila y B. Martínez en la aplicación de las derivadas fraccionarias en la industria petrolera. Con los resultados obtenidos, se puede estimar la presión de salida en los pozos petroleros de mucho mejor manera permitiendo analizar la presión de salida que pudo haber evitado el desastre ecológico causado en el Golfo de México en 2010.

Por último, se exponen las conclusiones, futuras líneas de investigación y publicaciones en el marco de esta tesis.

[Ir al Índice](#)

Capítulo 1

Aportes a una ecología integral

1.1. Introducción

En los últimos siglos, el hombre ha podido mejorar su calidad de vida de una manera acelerada que no conoce comparación. El progreso se pensaba como algo sin límites gracias a los avances en la tecnología y la ciencia. El tiempo parecía darles la razón e incluso hoy día la afirmación anterior parece cierta a un primer vistazo del mundo. Sin embargo, mirando más detalladamente la situación actual, nos podemos dar cuenta que donde se pose la mirada se encuentran contradicciones a la tesis del progreso ilimitado. La pobreza y los desastres naturales son consecuencias tangibles de un progreso deshumanizado y egoísta, que cuida muchas veces intereses personales.

Existen países desarrollados que utilizan su avanzada posición económica sobre otros, que para mantenerla, trasladan industrias tecnológicamente dañinas a otros territorios que, por su situación de pobreza y/o corrupción, no pueden negarse y aceptan el daño.

Para este capítulo hemos escogido estudiar el pensamiento de personas que buscan el bienestar de los pueblos y el bien común sin intereses personales económicos o políticos. Dado lo anterior, presentamos la doctrina del Magisterio de los Papas, desde Juan XXIII, que predicaba un mensaje adelantado a su tiempo (1958 - 1963), cuando no se dimensionaba el daño medioambiental futuro y sus consecuencias.

Un capítulo que hable sobre estos temas enriquece una tesis de ingeniería porque los problemas causados por el deterioro ambiental son provocados por hombres, que en muchos casos desarrollan tecnología sin tomar en cuenta la variable ecológica. Se estima que cerca de 81 mil millones de toneladas de hielo de los polos se han derretido en los últimos noventa años, la selva del Amazonas está siendo talada con un ritmo acelerado, olas de calor, como por ejemplo la ocurrida en junio de 2021 con temperaturas de más de 47 °C en algunas ciudades incluso en Canadá, desastres petroleros en el mar. Los efectos del cambio climático ya no pueden ser ignorados sino por el contrario, sean tomados en cuenta para desarrollar tecnología que contribuya a revertir el daño a la naturaleza o que por lo menos no afecte.

1.2. La cuestión ecológica en el Magisterio de los Papas

Se considera que uno de los puntos de partida de la ecología moderna es el bello libro de Rachel Carson ¹; trece años más tarde se publicaba el primer Informe al Club de Roma ², cuyo contenido fue solicitado al MIT, el cual agitaba todos los fantasmas malthusianos (lo que hoy conocemos como Neomalthusianismo): superpoblación, hambre, epidemias y la mayoría de la humanidad sumida en la miseria. Es importante conocer el contenido de estos textos para comprender la naturaleza, el sentido y la dirección del Magisterio de los Papas, a partir de los cuales se profundizaron los propios enfoques, respecto de las primeras referencias a esta problemática, en la Carta encíclica *Mater et Magistra* de Juan XXIII, publicada en 1961.

Empecemos por el libro de Rachel Carson. Su obra tiene el inmenso valor de denunciar el efecto de los plaguicidas sobre la vida en el campo y sobre la vida en la ciudad: los hidrocarburos clorados como el DDT (dicloro-difenil-tricloroetano), causan un daño profundo y permanente por su capacidad de persistir en la tierra y en el agua, aniquilando insectos, vegetales y mamíferos, comprometiendo también seriamente la salud de los seres humanos. En los años en que parecía que la radiación atómica podía acabar más o menos súbitamente con la humanidad, Carson señaló a los pesticidas como más peligrosos que la radiación: “We spray our elms and the following springs are silent of robin song, not because we sprayed the robins directly but because the poison traveled, step by step, through the now familiar elm leaf-earthworm-robin cycle” ³. El rociado de los pesticidas no mata al petirrojo directamente, sino que el veneno asciende desde las raíces hasta las hojas completando el ciclo hoja de olmo-gusano-petirrojo. Casi sesenta años después, la visión completa y certera de la autora no debe parecer simplemente obvia, pues puso en evidencia una de las tantas contradicciones de nuestra cultura: la desconexión entre la naturaleza y el ser humano, es decir, un paisaje y una vida para nadie. Especialmente aleccionador se presenta el capítulo introductorio “A Fable for Tomorrow”; se trata de un texto de buena literatura pastoril, que relata cómo una tierra de ensueño ha sido arrasada, por propia decisión de gobierno, mediante el uso de pesticidas. En Primavera silenciosa sostiene de manera convincente el papel destructivo del hombre mediante el uso de pesticidas, equiparándolo a la letalidad de una lluvia radioactiva; sus críticas no solo fueron dirigidas a la industria química, sino también al gobierno por querer mantener un verde escuálido, sin vida, pero apto para desarrollos inmobiliarios que requerían alfombras de pasto sin maleza; no quedaron fuera de sus críticas los habitantes de los suburbios que luchaban por mantener un jardín ajeno a los cambios climáticos⁴. Rachel Carson ocupa, sin lugar a duda, un papel importante en la denuncia del uso indiscriminado de agroquímicos y también por introducir, gracias a su creatividad literaria, la ecología en la cultura popular norteamericana.

Así como Rachel Carson expresó una lucha desinteresada por la supervivencia de una naturaleza “en estado natural”, es decir, sujeta a cambios y variaciones, pero sostenida todavía en el trasfondo cultural del romanticismo, que conlleva la convicción de la auto-regeneración de la naturaleza; el enfoque naturalista propicia un impulso a la ecología que busca armonizar una relación compleja entre civilización y naturaleza, por lo menos en los últimos doscientos cincuenta años. Diez años más tarde de Primavera Silenciosa, es decir, 1972, la ecología ha pasado de la denuncia valiente de Carson a constituirse en una herramienta en la construcción de poder a escala global. ¿Qué sucedió

¹Carson, R.L. (1962) *Silent spring*. Boston: Houghton Mifflin Company.

²Meadows, D. et al. (1972), *The Limits to a Growth. A Report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind*. New York: Universe Books. La traducción española es poco posterior: *Los límites del crecimiento. Informe al Club de Roma sobre el predicamento de la humanidad*. México: Fondo de Cultura Económica, 1975.

³Carson, R. L. (1962). *Silent spring*, p. 186.

⁴Hecht, R. (2019). “Rachel Carson y su ataque a la verdolatría”. *ARQ* n° 103 (Online), pp. 50-63. <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-69962019000300050>. Pimentel, D. (2012). “Silent Spring, the 50th anniversary of Rachel Carson's Book”, *BMC Ecology* 12.1: 20. WEB. DOI: 10.1186/1472-6785-12-20 Demarco, P. M. (2017). “Rachel Carson's environmental ethic – a guide for global systems decision making”, *Journal of Cleaner Production*, Vol. 140, pp. 127-133.

entre 1962 y 1972? En principio, un fuerte arraigo académico de las posturas Neo-malthusianas; en 1798, Thomas Robert Malthus, ministro anglicano, publicó, de manera anónima, el célebre Ensayo sobre el principio de la población y sus efectos futuros sobre el progreso de la sociedad; en este texto sostiene la teoría que lo hizo famoso: mientras la población crece en progresión geométrica, los recursos para sostener ese crecimiento aumentan aritméticamente. Tuvo una fuerte influencia sobre Darwin y su concepto de “selección natural”, lo que derivó en planteos eugenésicos ⁵; esta lectura que Darwin hizo de Malthus dio lugar a lo que conocemos como Neo-malthusianismo (argumentos en favor de la explotación de los trabajadores, de los países desarrollados sobre los que están en vías de desarrollo y, de manera más encubierta, las guerras colonialistas). El Neo-malthusianismo centra todos los males en la sobrepoblación y propone, para su solución, el control de la natalidad (anticoncepción, aborto y esterilización); al mismo tiempo, esta súper abundancia de población lleva a la necesidad de concentrar los esfuerzos en optimizar el aprovechamiento de los recursos naturales ⁶. El Magisterio papal polemiza específicamente con esta postura; en ella, el tema del control de la natalidad es el primer punto de una larga disputa sobre la relación entre población, bienes, derechos humanos y justicia en el usufructo de los bienes comunes. Por esta razón, la disputa sobre el control de la natalidad no será tratada en este capítulo, pero estará sobreentendida en el parecer de la Doctrina sobre ecología y los abusos de los países industrializados.

1.2.1. Juan XXIII y la encíclica *Mater et Magistra* (1963)⁷

La primera mención propiamente ecológica gira sobre el gozne de la cuestión del crecimiento demográfico y la hallamos en la presente encíclica; el propósito de la encíclica es claro: al mismo tiempo que la Iglesia asume la misión de santificar las almas y hacerlas partícipes de los bienes sobrenaturales, en consonancia con esto, también se preocupa por las necesidades diarias de los hombres, las que afectan al decoro del sustento, sin exceptuar bien alguno. La Iglesia sigue así el mandato de Cristo, quien si bien se preocupó por la salvación eterna del hombre (“Yo soy el camino, la verdad y vida”, Jn. 14, 6), también se conmovió ante la multitud hambrienta: “Siento compasión de esta muchedumbre” (Mc. 8, 2), dejando claro que no era insensible a las necesidades materiales de la gente. “El Redentor manifestó este cuidado no solo con palabras, sino con hechos, y así, para calmar el hambre de las multitudes, multiplicó más de una vez el pan milagrosamente” (3-4). Desde esta perspectiva, la encíclica dedica los párrafos 185-199 a la cuestión demográfica y ecológica. Bajo el título “Incremento demográfico y desarrollo económico”, se despliega la siguiente argumentación: ante el problema de cómo coordinar los sistemas económicos y los medios de subsistencia con el incremento de la población humana, a nivel planetario, se han desarrollado cálculos estadísticos que predicen un crecimiento exponencial de la población, en tanto que la economía no crecerá lo suficiente como para cubrir sus necesidades y luego la solución neomalthusiana: reducir los nacimientos entre los más desfavorecidos económicamente ⁸. Es decir que, desde la perspectiva de la encíclica, las previsiones catastróficas para fines del siglo XX no eran sustentables por dos razones: a) el don de

⁵Rouco Yáñez, A. – Martínez Teruel, A. Economía agraria. Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, 2002, pp. 213-214.

⁶Cavieres Figueroa, E. - Chávez Zúñiga, P. (2014) “¿Neomalthusianismo o falta de desarrollo social? A propósito de población y oportunidades en Arica en las últimas décadas”. *Diálogo Andino*, N° 45, pp. 119-129. En este artículo, se hace un depurado análisis del caso puntual de la región de Arica (norte de Chile) y demuestra que, en la actualidad, el problema no consiste en una superpoblación que pueda terminar con los recursos alimenticios, sino más bien en los daños que podrían llegar a provocar la aplicación de una óptica antinatalista en dicha región. Sin duda, los índices de natalidad se encuentran en un descenso continuo, sobre todo en aquellas regiones que se encuentran en una transición demográfica avanzada y en una disminución de la natalidad que no permite el recambio generacional. El estado juega un papel importante en el proceso, pues está enfocando en “educar” a la opinión pública en el sentido que el crecimiento de la población es una amenaza para mantener el equilibrio medioambiental.

⁷Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*. Sobre el creciente desarrollo de la cuestión social a la luz de la doctrina cristiana; available in http://www.vatican.va/content/john-xxiii/es/encyclicals/documents/hf_j-xxiii_enc_15051961_mater.html

⁸Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, nn° 185-187.

que la naturaleza sea prácticamente inagotable y b) el don de la inteligencia que Dios ha dado al hombre permite vislumbrar nuevos instrumentos para obtener más y mejores recursos naturales. Los progresos alcanzados a principios de los sesenta alimentan la esperanza en el porvenir:

“... la solución clara de este problema no ha de buscarse fuera del orden moral establecido por Dios, violando la procreación de la propia vida humana, sino que, por el contrario, debe procurar el hombre, con toda clase de procedimientos técnicos y científicos, el conocimiento profundo y el dominio creciente de las energías de la naturaleza”⁹.

En consonancia, la solución al problema no puede ser otro que un desarrollo económico sostenido que aumente la disposición de bienes para los individuos y su disponibilidad equitativa; se insiste en estos párrafos en la idea fuerza de “colaboración mutua” de la comunidad internacional, en términos de conocimientos, capitales y personas, especialmente respecto de los países más pobres en recursos¹⁰. En este punto amonesta con vigor sobre los entonces incipientes (en cuanto a los resultados prácticos) estudios de genética humana¹¹. Ignorar la dignidad humana conlleva un doble empobrecimiento: uno que podemos considerar en clave teológica, pues el desconocimiento de la acción de Dios concluye en menoscabo del propio hombre y otro, que podemos considerar en clave socioeconómica, pues las deficiencias educativas y la reducción de la población debilitan las energías del país que lleva adelante tales políticas¹². A raíz de la reflexión general sobre políticas de población, la encíclica ingresa directamente en temas medioambientales, dado que están íntimamente ligados entre sí; a manera introductoria recuerda los dos mandatos del Creador en el Génesis: a) propagar la vida (1, 28) y b) dominar la naturaleza (1, 28). Las especificaciones al punto b) atañen directamente a nuestro tema: dominio no significa destruir los bienes naturales, sino satisfacer las necesidades de la vida humana. Sin embargo, la lógica de la técnica va por un camino contrario, pues la miseria en la que están sumidos algunos lugares hace pensar en la extinción de la raza humana; al mismo tiempo, la ciencia y la tecnología han abierto caminos impensados hasta hace poco tiempo, pero son estos mismos instrumentos, devenidos propiamente en dominio, los que exacerban las debilidades de aquella parte de la humanidad más empobrecida. Hay suficientes bienes para toda la humanidad, a condición de que los bienes sean usufructuados con justicia¹³.

1.2.2. Pablo VI y el discurso por el vigésimo quinto aniversario de la FAO (16 de noviembre de 1970)¹⁴

Se trata de la primera advertencia tajante sobre los perjuicios de un ritmo de crecimiento ordenado al consumismo y no a las necesidades del decoro de la persona y habla de la “muerte biológica” en un futuro cercano si no se revierte la tendencia. A partir de una cita bíblica, “el desierto volverá a florecer”¹⁵, el Papa celebra los logros de los años de la segunda posguerra, en buena parte atribuibles a la FAO: mejora en la fertilidad de los suelos, regulación de los sistemas de riego, la parcelación de los terrenos o parcelas que se siembran alternativamente, la mejora genética de vegetales y la introducción sistemática de cereales de alto rendimiento. Inmediatamente sigue la voz de una alarma

⁹Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, n° 189.

¹⁰Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, nn° 190-191.

¹¹Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, n° 193: “Nadie, pues, puede lícitamente usar en esta materia los medios o procedimientos que es lícito emplear en la genética de las plantas o de los animales”.

¹²Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, n° 194.

¹³Juan XXIII (1963), *Mater et Magistra*, n° 199.

¹⁴Pablo VI, Discurso en el 25° aniversario de la FAO available in http://w2.vatican.va/content/paul-vi/es/speeches/1970/documents/hf_p-vi_spe_19701116_xxv-istituzione-fao.html El documento no se encuentra paginado, razón por la cual haremos las referencias que siguen del siguiente modo: Pablo VI, Discurso en el 25° aniversario de la FAO.

¹⁵Is. 35, 1.

profunda: las transformaciones técnicas que se han considerado de manera positiva, sin embargo han sido implementadas en un lapso de tiempo muy breve, lo cual repercute de manera negativa sobre el equilibrio medioambiental, hasta el punto de que la civilización industrial nos ha conducido al riesgo de una catástrofe ecológica, que conducirá a la ya mencionada “muerte biológica”: la polución ambiental, es decir, la degradación del agua potable, contaminación del agua dulce y de los mares, alcanzaba hace ya cincuenta años niveles alarmantes, que requerían medidas urgentes. En este texto y en este estado de alarma, encontramos la primera referencia, en clave ecológica, de la interconexión del conjunto de la naturaleza, en tanto que del cambio de comportamiento depende la supervivencia de la humanidad. El mundo dividido entre los intentos de hegemonía de la entonces URSS y EEUU, la Guerra Fría, había puesto al mundo al borde de una guerra nuclear (recordemos que aún estaba fresca la llamada “Crisis de los misiles” o instalación de misiles rusos en Cuba, en octubre del 1962) y, por ello, el llamado de Pablo VI a la sensatez: “El prodigioso dominio progresivo de la vida vegetal, animal, humana, el descubrimiento de los secretos mismos de la materia, ¿terminarán en la antimateria y en la explosión de la muerte?”¹⁶.

La prospectiva del siglo XXI es la de un mundo interdependiente y, por ello, su supervivencia dependerá de su capacidad de obrar de manera solidaria: “obrar juntos para edificar el futuro común de la humanidad”¹⁷. Y con una visión realista de lo que será el siglo XXI, el Papa advierte que el poder deberá usarse para repartir pan a todos y no para disminuir el número de comensales, mediante la reducción de la natalidad en los países menos favorecidos o “en vías de desarrollo”, según la terminología de la época. La actitud permanente del Magisterio puede quedar expresada con esta cita:

“La Iglesia por su parte invita al progreso científico y técnico en todo el campo de la actividad humana, pero reivindicando siempre el respeto de los derechos inviolables de la persona humana, cuyos garantes son en primer término los poderes públicos. Firmemente opuesta a un control de los nacimientos que, según la justa expresión de nuestro venerado predecesor, el Papa Juan XXIII, se llevaría a cabo por métodos y medios indignos del hombre, la Iglesia hace un llamamiento a todos los responsables para que obren con audacia y generosidad por un desarrollo integral y solidario, el cual entre otros efectos favorecerá, sin ninguna duda, una dominación razonable de la natalidad por parte de las parejas humanas que habrán sido capaces de asumir libremente su destino”¹⁸.

1.2.3. Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente (Vaticano, 1972)¹⁹

Dos años más tarde, Pablo VI vuelve sobre el tema de la ecología en un foro internacional. El medio ambiente es calificado como “un bien necesario para todos”, en cuanto conciencia creciente de la unidad persona y medio ambiente, y de la perfección que el primero debería ejercer sobre lo segundo. Como este movimiento de perfección, en cuanto tal, está ausente, o peor sustituido por una brutal búsqueda de progreso material, que se encuentra librado a sus mecanismos intrínsecos de poder, con total ausencia de respeto por la biósfera. Ya en aquel momento (1972), la interdependencia política y económica de todos los países entre sí ponía en riesgo el planeta, desde el momento que unos pocos, y de manera irresponsable, producían un grave deterioro ambiental. “El hombre, además, sabe con certeza que el progreso científico y técnico, pese a sus aspectos prometedores con miras a la

¹⁶Pablo VI, Discurso en el 25° aniversario de la FAO.

¹⁷Populorum Progressio n. 43 (1967) en Pablo VI, Discurso en el 25° aniversario de la FAO.

¹⁸Pablo VI, Discurso en el 25° aniversario de la FAO.

¹⁹Mensaje de su Santidad Pablo VI a la conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente, 1 de junio de 1972; available in http://www.vatican.va/content/paul-vi/es/messages/pont-messages/documents/hf_p-vi_mess_19720605_-conferenza-ambiente.html El documento no se encuentra paginado, razón por la cual haremos las referencias que siguen del siguiente modo: Pablo VI, Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente.

promoción de todos los pueblos, lleva en sí, como toda obra humana, su fuerte carga de ambivalencia para el bien y para el mal”²⁰. Aquí están implícitas las tensiones producidas por la guerra fría, en referencia a armamentos atómicos, químicos y bacteriológicos, ante los cuales la conciencia moral no puede sentir más que horror: la carrera armamentística de aquellos años afectaba de manera actual y potencial el medio ambiente, fundamentalmente por el derroche de las reservas naturales no renovables. En este documento se hace una afirmación que será un hilo conductor hasta los documentos del actual Pontífice: “. . . no se afronta el problema del medio ambiente con las solas medidas de orden técnico”²¹. Para la doctrina social ha sido evidente, casi desde el principio del tratamiento del tema ecológico, que una parte del problema es técnico (perfeccionar los métodos de producción sin perjudicar a la industria), lo fundamental, por el contrario, recae en una toma de conciencia, en un cambio radical de mentalidad. Un segundo elemento que se va a mantener en la prédica de los Papas es la siguiente: la enorme cantidad de riquezas que producen estas industrias quedan concentradas en pocas manos, con el marcado empobrecimiento de las masas y pauperización del suelo. En este sentido, la figura de San Francisco de Asís es evocado como ejemplo: “¿Cómo no evocar aquí el ejemplo imborrable de san Francisco de Asís, y cómo no mencionar las grandes Órdenes contemplativas cristianas que ofrecen el testimonio de una armonía interior conseguida en el cuadro de una comunión con los ritmos y con las leyes de la naturaleza”²². El problema enraíza en el corazón humano que quiere apropiarse de un patrimonio de la humanidad, haciendo de este patrimonio tierra de nadie. Revertir este problema significa acceder a la participación equitativa de los recursos actuales o potenciales del planeta; la realización integral del hombre se presenta como el tema por excelencia para llegar al encuentro de un equilibrio ecológico: un justo equilibrio de prosperidad entre los centros del mundo industrializado y su inmensa periferia.

1.2.4. Pablo VI, Carta Octogesima Adveniens (1972)

En la primera parte de la Carta Octogesima Adveniens²³, Pablo VI plantea una serie de interrogantes sociales, como corresponde a un recordatorio y celebración de la encíclica *Rerum Novarum* (1891), que implican una puesta a punto y actualización de la “cuestión social”, dándole al giro la máxima extensión. En primer término, la reflexión sobre una realidad que no es nueva, pero que se ha consolidado definitivamente: la ciudad o conglomerado urbano, cuya población ha alcanzado o superado los diez millones de habitantes²⁴, que por esta razón debe afrontar complejas situaciones en materia de medio ambiente en general (agua potable, en especial), seguridad y transporte. Estas ciudades desproporcionadas en todo sentido han visto surgir un nuevo proletariado, que, en realidad, es población marginal sumida en la miseria absoluta; esta realidad comparte geografía con clases sociales ostentosas que despilfarran la riqueza que no producen:

“Se instalan (los nuevos desfavorecidos) en el centro de las ciudades que los ricos a veces abandonan; acampan en los suburbios, cinturón de miseria que lleva a asediar, mediante una protesta silenciosa aún, el lujo demasiado estridente de las ciudades de consumo y del despilfarro. En lugar de favorecer el encuentro fraternal y la ayuda mutua, la ciudad desarrolla las discriminaciones y también las indiferencias; se presta a nuevas formas de explotación y de dominio, de las que algunos, especulando sobre las necesidades de los demás, sacan provechos inadmisibles. Detrás de las fachadas, se esconden muchas miserias, ignoradas incluso por los vecinos más cercanos; otras aparecen

²⁰Pablo VI, Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente.

²¹Pablo VI, Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente.

²²Pablo VI, Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente.

²³Pablo VI, Carta apostólica octogesima Adveniens (Vaticano, 14 de mayo de 1971) available in http://w2.vatican.va/content/paul-vi/es/apost_letters/documents/hf_p-vi_apl_19710514_octogesima-adveniens.html

²⁴Pablo VI, Carta apostólica octogesima adveniens, n° 8.

allí donde la dignidad del hombre zozobra: la delincuencia, criminalidad, droga, erotismo”²⁵.

En este contexto, la Carta llama la atención sobre la situación de la mujer tantas veces postergada y discriminada por su propia condición: debe ser protegida “en el corazón del hogar y en el seno de la sociedad, al mismo tiempo que reconocer su independencia en cuanto persona y la igualdad de sus derechos a participar en la vida económica, social, cultural y política”²⁶. Llama la atención también sobre la discriminación racial, a la que tacha de “injustificable” e “inadmisibles”²⁷, y sobre la situación precaria de los extranjeros, “cuya condición hace tanto más difícil, por su parte, toda reivindicación social, no obstante, su real participación en el esfuerzo económico del país que les recibe”²⁸. En este contexto de la megalópolis y todas las crisis que favorece y sobre las cuales se constituye, hay una breve y contundente referencia al medio ambiente: la consecuencia de la actividad humana descontrolada, hace sentir una transformación que afecta negativamente el presente y compromete gravemente el futuro, pues la degradación de hoy (contaminación y desechos tóxicos), genera nuevas enfermedades de un poder destructor difícil de calcular; en definitiva: “es el propio consorcio humano el que la persona no domina ya, creando de esta manera para el mañana un ambiente que podría resultarle intolerable. Problema social de envergadura que incumbe a la familia humana toda entera”²⁹.

1.2.5. Juan Pablo II y la cuestión ecológica

En Juan Pablo II, la preocupación ecológica está presente desde el inicio de su pontificado y va creciendo en importancia y ganando en precisión conceptual, a medida que éste se desarrolla. En su primera encíclica, *Redemptor hominis* (4 de marzo de 1979)³⁰, presenta uno de los temas centrales de su pontificado y en el que Karol Wojtyła llevaba trabajando muchos años, desde la época de su docencia universitaria: un estudio detenido de la condición humana, cuya redención estaba íntimamente ligada al reconocimiento de su dignidad intrínseca. En este contexto general, la encíclica pone de manifiesto la importancia de transitar, la Iglesia y el mundo, un “nuevo Adviento”, pues se acercaba el cambio de milenio: “También nosotros estamos, en cierto modo, en el tiempo de un nuevo Adviento, que es tiempo de espera...”³¹. En tanto se trata de una renovación en la Encarnación, el Papa dedica el núcleo del mensaje a establecer, lo que aquella nos dice sobre Dios y sobre nosotros mismos, es decir, la Paternidad de Dios (la profundidad insondable del amor de Dios) y la grandeza y dignidad de la naturaleza humana. Si Dios es Amor (1 Jn 1, 48), significa que ese amor es mayor que la debilidad, el pecado y la alienación del hombre; no se trata, entonces, de cualquier amor, sino de aquel que engendró y mantiene al mundo en su existencia y nos conduce a la esencia del humanismo cristiano: el amor vivido en libertad y la libertad ordenada por la verdad³². El Papa plantea que son los propios logros de la humanidad los que la han puesto en riesgo.

“En esto parece consistir el capítulo principal del drama de la existencia humana contemporánea en su dimensión más amplia y universal. El hombre por tanto vive cada vez más en el miedo. Teme que sus productos, naturalmente no todos y no la mayor parte sino algunos y precisamente

²⁵ Pablo VI, Carta apostólica octogésima adveniensi, n° 10 (ver referencias también en 11 - 12).

²⁶ Pablo VI, Carta apostólica octogésima adveniensi, n° 13.

²⁷ Pablo VI, Carta apostólica octogésima adveniensi, n° 16.

²⁸ Pablo VI, Carta apostólica octogésima adveniensi, n° 17.

²⁹ Pablo VI, Carta apostólica octogésima adveniensi, n° 21.

³⁰ Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, http://www.vatican.va/content/john-paul-ii/es/encyclicals/documents/hf_jp-ii_enc_04031979_redemptor-hominis.html

³¹ Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, n° 1.

³² Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, n° 10. La denominación, en este pasaje, es “humanismo auténtico”.

los que contienen una parte especial de su genialidad y de su iniciativa, puedan ser dirigidos de manera radical contra él mismo; teme que puedan convertirse en medios e instrumentos de una autodestrucción inimaginable, frente a la cual todos los cataclismos y las catástrofes de la historia que conocemos parecen palidecer”³³.

En este sentido, pone en evidencia la gran cuestión de la modernidad: el quiebre entre las capacidades materiales y el carácter moral que considere su finalidad. Este desajuste, que se ha hecho brutalmente presente durante el siglo XX, conlleva un cierto agotamiento y desesperanza acerca del valor de la vida actual y porvenir. Sin embargo, Juan Pablo II da una segunda lectura a esta reacción al descalabro del siglo XX: la promoción y defensa de los derechos humanos es la defensa contra los totalitarismos de toda índole.

“El inmenso progreso, jamás conocido, que se ha verificado particularmente durante este nuestro siglo, en el campo de dominación del mundo por parte del hombre, ¿no revela quizá el mismo, y por lo demás en un grado jamás antes alcanzado, esa multiforme sumisión ‘a la vanidad’? Baste recordar aquí algunos fenómenos como la amenaza de contaminación del ambiente natural en los lugares de rápida industrialización, o también los conflictos armados que explotan y se repiten continuamente, o las perspectivas de autodestrucción a través del uso de las armas atómicas: al hidrógeno, al neutrón y similares, la falta de respeto a la vida de los no-nacidos”³⁴.

Se trata, en definitiva, de la discontinuidad entre el hacer de la técnica y la ponderación del actuar humano; ello genera una inquietud que no permite comprender los significados de la acción: el dueño y custodio se transforma en explotador y destructor³⁵.

El 30 de diciembre de 1987, Juan Pablo II autorizó la publicación de la Carta encíclica *Sollicitudo Rei Socialis*³⁶. Se trata de un texto de gran profundidad y complejidad: se cumplían 20 años de la encíclica *Populorum progressio* de Pablo VI, por lo que lógicamente renueva y profundiza aquellos temas: los problemas del desarrollo. Se presenta el análisis de las dificultades de armamentismo, terrorismo y el problema demográfico actual, como una de las oposiciones entre norte y sur. En este contexto, el Papa destaca también los aspectos positivos de esta realidad: la interdependencia de los países y de las personas, la preocupación por la paz y la preocupación por la salud ecológica del planeta. Para la comprensión del contexto, la encíclica pone el acento en que el siempre deseable desarrollo no resulta sinónimo de progreso ilimitado, que suele delimitarse a lo económico, es decir, no puede consistir en el mero consumismo o experiencia llena de insatisfacción que es propio de los grupos más privilegiados. En definitiva, el desarrollo auténtico ha de medirse por un parámetro interior, de naturaleza ético-religiosa, a la luz del Génesis y de los Evangelios. Por ello, alerta acerca de lo que denomina “las estructuras de pecado”, poniendo el énfasis en dos: el deseo desmedido de lucro y el hambre insaciable de poder en todo orden. El remedio que plantea para curar estos males, y que retomará ampliando los significados el Papa Francisco, está en la conversión de los corazones, con el consiguiente florecimiento de la solidaridad entre los individuos y entre las naciones. El llamado de la encíclica es acuciante y su vigencia dramática: el empresario no puede ser indiferente y, menos aún, rapaz ante los dramas de la marginación y de la pobreza, porque es necesario entender cristianamente los nexos entre desarrollo, solidaridad y liberación, es decir, que se impone la necesidad de una dirección empresarial más humana.

Desde el punto de vista ecológico, la encíclica denuncia tres errores que considera graves: a) supeditar los seres (animados e inanimados), a los intereses económicos, que no duda en su des-

³³Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, n° 15.

³⁴Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, n° 8.

³⁵Juan Pablo II, Carta encíclica *Redemptor hominis*, n° 15.

³⁶Juan Pablo II, Carta encíclica *Sollicitudo Rei Socialis*, http://www.vatican.va/content/john-paul-ii/es/encyclicals/documents/hf_jp-ii_enc_30121987_sollicitudo-rei-socialis.html

trucción por una noción de progreso completamente espurio ³⁷; b) servirse de la naturaleza como si sus recursos fueran inagotables, pues implica no tener en cuenta a las próximas generaciones ³⁸; c) resulta inaceptable el modo que la contaminación altera dramáticamente las condiciones de vida de los llamados cinturones industriales ³⁹.

Debemos esperar a 1990 para recibir el texto más importante de Juan Pablo II sobre ecología; se trata del Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz. Paz con Dios Creador, paz con toda la creación ⁴⁰. En este mensaje, el Papa plantea los aspectos bíblicos, que desarrolla lo que podemos llamar el evangelio de la creación, tal como lo va a retomar el Papa Francisco en la Laudato. La mirada teológica sobre la creación significa la relación del ser humano con el mundo en términos de compromiso y de custodia del medio ambiente. “Los cristianos, en particular, descubren que su cometido dentro de la creación, así como sus deberes con la naturaleza y el Creador forman parte de su fe. Ellos, por tanto, son conscientes del amplio campo de cooperación ecuménica e interreligiosa que se abre a sus ojos” ⁴¹. “Es necesario, entonces, tomar con decisión los compromisos que echan raíces en nuestra convicción religiosa” ⁴².

“En la Biblia, la fe en Dios creador interviene después de un progreso largo y espiritual del pueblo elegido. Antes del reconocimiento de su Dios como el creador de toda cosa, Israel primero experimentó con un Dios vivo que lo protege y lo mantiene salvo a través de acciones salvíficas. La reflexión sobre su fe en este Dios salvador, cuya potencia se despliega en los elementos de la naturaleza, progresivamente lo condujo a darse cuenta de que su Dios es el solo creador y ordenador del ambiente, y que crea cada vez que salva. En el relato patriarcal de la creación, para mostrar que la casa común verdaderamente es una obra divina, Dios es presentado allí como el gran alfarero, el que moldea el ser humano y el planeta (Gn 2,7-19). Y las imágenes que allí son empleadas nos sitúan en el espacio y el tiempo, porque Dios crea a partir de una materia ya existente, la tierra.” ⁴³.

Desde el punto de vista político-económico, la solución a los problemas ecológicos supera la capacidad individual de los países, por lo que debe plantearse mundialmente, sin que nadie escatime responsabilidad:

“No solo deben aplicar las normas aprobadas junto con las autoridades de otros Estados, sino favorecer también internamente un adecuado orden socioeconómico, atendiendo particularmente a los sectores más vulnerables de la sociedad. Corresponde a cada Estado, en el ámbito del propio territorio, la función de prevenir el deterioro de la atmósfera y de la biosfera, controlando atentamente, entre otras cosas, los efectos de los nuevos descubrimientos tecnológicos o científicos, y ofreciendo a los propios ciudadanos la garantía de no verse expuestos a agentes contaminantes o a residuos tóxicos” ⁴⁴.

³⁷ Juan Pablo II, Carta encíclica Sollicitudo Rei Socialis, n° 34. “Al contrario, conviene tener en cuenta la naturaleza de cada ser y su mutua conexión en un sistema ordenado, que es precisamente el cosmos”

³⁸ Juan Pablo II, Carta encíclica Sollicitudo Rei Socialis, n° 34. “Usarlos como si fueran inagotables, con dominio absoluto, pone seriamente en peligro su futura disponibilidad, no sólo para la generación presente, sino sobre todo para las futuras”.

³⁹ Juan Pablo II, Carta encíclica Sollicitudo Rei Socialis, n° 34. “Todos sabemos que el resultado directo o indirecto de la industrialización es, cada vez más, la contaminación del ambiente, con graves consecuencias para la salud de la población”.

⁴⁰ Juan Pablo II, Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz. Paz con Dios Creador, paz con toda la creación, http://www.vatican.va/content/john-paul-ii/es/messages/peace/documents/hf_jp-ii_mes_19891208_xxiii-world-day-for-peace.html

⁴¹ Juan Pablo II, Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz... n° 15.

⁴² MASIA, Juan; Hacia un eco evangelio. El llamado ecológico de los papas Benedicto y Francisco. Madrid: Herder, 2015, p. 295.

⁴³ LOUIS, Jean Gaby, El acto de la creación de Dios como don y compromiso, Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, 2017 disponible en [https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/40300/Trabajo %20de %20Grado.pdf?sequence=3&isAllowed](https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/40300/Trabajo%20de%20Grado.pdf?sequence=3&isAllowed)

⁴⁴ Juan Pablo II, Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz... n° 9.

La voluntad de dar un tratamiento en profundidad de la cuestión ecológica lleva a Juan Pablo II a presentar dos ideas, que serán la piedra angular de las futuras reflexiones de los siguientes Papas, Benedicto XVI y Francisco: a) educar en la responsabilidad ecológica y b) la conversión ecológica (esta idea fuerza será el núcleo de *Laudato si'*); el fragmento es breve y significativo:

“Hay pues una urgente necesidad de educar en la responsabilidad ecológica: responsabilidad con nosotros mismos y con los demás, responsabilidad con el ambiente. Es una educación que no puede basarse simplemente en el sentimiento o en una veleidad indefinida. Su fin no debe ser ideológico ni político, y su planteamiento no puede fundamentarse en el rechazo del mundo moderno o en el deseo vago de un retorno al «paraíso perdido». La verdadera educación de la responsabilidad conlleva una conversión auténtica en la manera de pensar y en el comportamiento. A este respecto, las Iglesias y las demás Instituciones religiosas, los Organismos gubernamentales, más aún, todos los miembros de la sociedad tienen un cometido preciso a desarrollar. La primera educadora, de todos modos, es la familia, en la que el niño aprende a respetar al prójimo y amar la naturaleza”⁴⁵.

En efecto, si la raíz del problema ecológico es moral, su solución radica en que cada uno revise a fondo su estilo de vida: el consumismo es completamente indiferente a los daños que causa, pues la situación ecológica mide la crisis moral de la sociedad contemporánea; en ambos casos se trata de ausencia de sentido.

““La austeridad, la templanza, la autodisciplina y el espíritu de sacrificio deben conformar la vida de cada día a fin de que la mayoría no tenga que sufrir las consecuencias negativas de la negligencia de unos pocos””⁴⁶.

Como es inherente a la Doctrina Social de la Iglesia, esta no es el espacio de propuestas técnicas para solucionar el problema medioambiental ni de proponer un modelo social, pues expone una reflexión crítica sobre las raíces del problema y sobre sus consecuencias, es decir, interpela la conciencia para hallar una nueva actitud frente al ambiente en el que vivimos y del que, consecuentemente, formamos parte⁴⁷.

“El llamado a la conversión implica un cambio personal; sin duda, los problemas ambientales son de tal calado que una decisión personal parece que no resuelve nada, pero a la vez se evidencia que los cambios sociales vienen precedidos de dichas decisiones, de la suma de los cambios de quienes formamos parte de ella, cada uno con su nivel de responsabilidad”⁴⁸.

En la encíclica *Centesimus annus* (1991)⁴⁹ no hay novedades doctrinales respecto de este tema, aunque se insiste en su gravedad acuciante.

“Es asimismo preocupante, junto con el problema del consumismo y estrictamente vinculado con él, la cuestión ecológica. El hombre, impulsado por el deseo de tener y gozar, más que de ser y de crecer, consume de manera excesiva y desordenada los recursos de la tierra y su misma vida. En la raíz de la insensata destrucción del ambiente natural hay un error antropológico, por

⁴⁵ Juan Pablo II, Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz... n° 13. GONZÁLEZ-CARVAJAL SANTABÁRBARA, Luis. “*Laudato si'* en el marco de la doctrina social de la iglesia”, Vol. 272 Núm. 1404, 2015, pp. 261-262.

⁴⁶ Juan Pablo II, Mensaje para la XXIII Jornada Mundial de la Paz... n° 13. GURIDI, Román. *Ecoteología: hacia un nuevo estilo de vida*, Santiago de Chile: Ediciones Universidad Santiago Hurtado, 2018.

⁴⁷ CHUVIECO SALINERO, Emilio. “La ‘conversión ecológica’ en la *Laudato si'* y en la tradición cristiana”, *La Albolafia: Revista de Humanidades y Cultura*, N° 10/1, 2017, pp. 29-30. BOFF, Leonardo; *El cuidado esencial. Ética de lo humano compasión por la tierra*. Madrid: Trotta, 2002, p. 107.

⁴⁸ CHUVIECO SALINERO, Emilio. “La ‘conversión ecológica’ en la *Laudato si'* y en la tradición cristiana”, p. 30.

⁴⁹ Juan Pablo II, Carta encíclica *Centesimus Annus*, disponible en http://www.vatican.va/content/john-paul-ii/es/encyclicals/documents/hf_jp-ii_enc_01051991_centesimus-annus.html

desgracia muy difundido en nuestro tiempo. El hombre, que descubre su capacidad de transformar y, en cierto sentido, de «crear» el mundo con el propio trabajo, olvida que éste se desarrolla siempre sobre la base de la primera y originaria donación de las cosas por parte de Dios. Cree que puede disponer arbitrariamente de la tierra, sometiéndola sin reservas a su voluntad como si ella no tuviese una fisonomía propia y un destino anterior dados por Dios, y que el hombre puede desarrollar ciertamente, pero que no debe traicionar. En vez de desempeñar su papel de colaborador de Dios en la obra de la creación, el hombre suplanta a Dios y con ello provoca la rebelión de la naturaleza, más bien tiranizada que gobernada por él”⁵⁰.

1.2.6. La peculiaridad de Benedicto XVI en el tratamiento de la cuestión ecológica

Las ideas fundamentales de Juan Pablo II son recibidas y ampliadas, sin que encontremos en este contexto nuevas expresiones doctrinales. Sin embargo, adquiere especial relevancia la fineza y profundidad de su respuesta a la tesis del profesor de la Universidad de Los Ángeles, Lynn Townsend White, Jr., quien, en una conferencia en Washington, el 26 de diciembre de 1966, titulada *Historical Roots of Our Ecologic Crisis*⁵¹, sostiene una tesis que se repitió desde entonces, pero sin agregar nuevos elementos. Esta dice lo siguiente:

“la forma occidental de cristianismo es la religión más antropocéntrica (en Oriente, el zoroastrismo habrá cumplido un papel semejante, aunque menos marcado), pues Dios le ha legado al hombre su superioridad sobre el conjunto de la naturaleza; a diferencias del paganismo, el cristianismo estableció una distancia entre hombre y naturaleza, insistiendo que el esfuerzo de dominio del hombre expresaba la voluntad de Dios; una vez que fue desarraigado el animismo pagano de la cultura, se hizo posible la explotación de la naturaleza con total indiferencia hacia los sentimientos de los objetos naturales, quienes en un principio habían protegido a la naturaleza de la acción del hombre, y luego se esfumaron. El monopolio efectivo del hombre sobre el espíritu en este mundo fue confirmado y las antiguas inhibiciones para explotar la naturaleza desaparecieron. En consecuencia, en el cristianismo radicaría el origen del conflicto entre hombre y naturaleza o ambiente, con sus efectos actuales de contaminación y depredación de los recursos”⁵². White, en suma, propuso un retorno a los ideales culturales del panteísmo, porque permitía una defensa de la naturaleza.

El Papa Benedicto XVI trata el tema ecológico en la encíclica *Caritas in veritate* (29 de junio de 2009), entre los párrafos 48 y 52⁵³, y responde a esta pregunta en estos términos: “la naturaleza no es Dios y por lo tanto no es un problema o “un tabú intocable””⁵⁴ “ni debemos esperar la respuesta de actitudes neopaganas o panteístas”⁵⁵. “Sin embargo, el cristiano nunca debe olvidar que, aunque la naturaleza no es divina, es “el maravilloso resultado de la intervención creadora de Dios” y, por lo tanto, no tenemos derecho a “abusar de ella””⁵⁶. El tema del dominio no es un tema propiamente cristiano, sino que surge de la poderosa transformación histórica que llamamos Modernidad; la nota

⁵⁰Juan Pablo II, Carta encíclica *Centesimus Annus*, N° 37. Este pasaje debe leerse a partir de *Sollicitudo rei socialis*, 34 y *Mensaje para la Jornada Mundial de la Paz 1990*, 147-156. VELA, Roberto; “Juan Pablo II y la cuestión ecológica”, *Theologica Xaveriana*, N° 145, 2003, pp. 81-96. RINCÓN ANDRADE, Mauricio. “Hacia una comprensión de la conversión ecológica”. *Franciscanum* 169, Vol. LX, 2018, pp. 311-337.

⁵¹Fue publicada, poco más tarde, en forma de artículo en *Science* Vol. 155, Issue 3767, pp. 1203-1207. DOI: 10.1126/science.155.3767.1203. El mismo texto se reimprimió en diversas oportunidades, por ejemplo: BARR, John (ed.), *The Environmental Handbook*. London: Ballantine, 1971, pp. 3-16. WHITE, Jr., Lynn, *Dynamo and Virgin Reconsidered: Essays in the Dynamism of Western Culture*, Cambridge, Mass.- London: MIT Press, 1968, pp. 75-94. Traducción castellana: “Las raíces históricas de nuestra crisis ecológica”, *Revista de Occidente* N° 143-144, 1975, 150-164.

⁵²Ídem

⁵³Disponible en http://www.vatican.va/content/benedict-xvi/es/encyclicals/documents/hf_ben-xvi_enc_20090629_caritas-in-veritate.html

⁵⁴Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 48.

⁵⁵Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 48.

⁵⁶Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 48.

más relevante es la pérdida o trastocamiento de sus bases religiosas que fundamentan la sociedad. Ello implicó el reconocimiento de la autonomía del hombre y la mera función decorativa de Dios en el deísmo.

“Insiste, en segundo lugar, sobre los límites que la finitud de nuestro planeta supone para el consumo de la humanidad. La naturaleza es “un don de Dios para todos”, y el acaparamiento de sus recursos por algunos Estados y grupos de poder entraña “una responsabilidad para con los pobres, las generaciones futuras y toda la humanidad”⁵⁷.

“La justicia no sólo exige a los acaparadores frenar su consumo siempre creciente de energía y otros recursos, sino hacerlo decrecer”⁵⁸. Desarrolla, por último, la relación existente entre la ecología medioambiental y la ecología humana: “El libro de la naturaleza es uno e indivisible”⁵⁹ y, por tanto, “el modo en que el hombre trata el ambiente influye en la manera en que se trata a sí mismo, y viceversa. Esto exige que la sociedad actual revise seriamente su estilo de vida que, en muchas partes del mundo, tiende al hedonismo y al consumismo, despreocupándose de los daños que de ello se derivan”⁶⁰.

1.2.7. El Papa Francisco y encíclica *Laudato Si'*; el caso de las energías renovables.

Desde el momento en que se hizo pública (24 de mayo de 2015), la Carta encíclica *Laudato Si'* generó un intenso debate en el conjunto de la sociedad, pues volvía a tratar la cuestión ecológica o “Sobre el cuidado de la casa común”, como señala su subtítulo. Si bien su tratamiento incardina formalmente en la teología moral, nosotros proponemos interpretar la situación ecológica presente, en especial referida al petróleo, y leer la encíclica, desde el punto de vista de una filosofía de la cultura; la situación ambiental ha tenido un seguimiento sostenido en la Doctrina Social, desde las referencias del beato Papa Pablo VI, en la Carta Apostólica *Octogesima adveniens* (14 de mayo de 1971), donde ya alertaba sobre los riesgos concretos que produciría a corto plazo la explotación inconsiderada de la naturaleza por parte del ser humano (n. 21). Recogiendo la preocupación, pero confrontándola con nuestro dramático presente, el texto del Papa Francisco avanza en la fundamentación de lo que significa “la casa común”, el análisis pormenorizado de nuestra realidad y una serie de propuestas para superar el relativismo cultural que nos ha conducido a la “cultura del descarte”.

La encíclica *Laudato Si'*, desde sus primeros párrafos, recorre las reflexiones de sus predecesores (Pablo VI, Juan Pablo II y Benedicto XVI), y la preocupación cada vez más enfática por la cuestión ecológica; este recorrido pone de manifiesto las consecuencias por el obrar descontrolado del ser humano (n. 4), es decir, el reclamo de una transformación radical de su conducta: conversión ecológica y reconocimiento de que la naturaleza (en ella, el ser humano) es donación de Dios⁶¹. Juan Pablo II retoma estas directrices de *Octogesima Adveniens* y las profundiza en las encíclicas *Sollicitudo rei socialis* y en *Centesimus annus*; en la primera, la cuestión ecológica está articulada en tres goznes: a) rechazo al uso desconsiderado de las distintas escalas de los seres vivos; b) limitación de los recursos naturales; c) la caída de la calidad de vida como consecuencia de un determinado concepto

⁵⁷Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 48.

⁵⁸Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 49.

⁵⁹Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 51. GONZÁLEZ-CARVAJAL SANTABÁRBARA, Luis. “*Laudato Si'* en el marco de la doctrina social de la iglesia”, pp. 261-265.

⁶⁰Benedicto XVI, *Caritas in veritate*, n° 51.

⁶¹Además de la recién mencionada Carta del beato Pablo VI, debemos tener en cuenta su Discurso a la FAO en su 25 aniversario (16 de noviembre de 1970); San Juan Pablo II se ocupó de este tema en las Cartas encíclicas *Sollicitudo rei socialis* (30 de diciembre de 1987), *Redemptor Hominis* (4 de marzo de 1979), en la Carta encíclica *Centesimus annus* (1 de mayo de 1991) y la Catequesis del 17 de enero de 2001, en *L'Osservatore Romano*, edición en lengua española, 19 de enero de 2001, p. 12, donde queda acuñada la expresión “conversión ecológica”. SS. Benedicto XVI amplió el acervo con las significativas reflexiones que encontramos en Discurso al Cuerpo Diplomático acreditado ante la Santa Sede (8 de enero de 2007); Discurso al clero de la Diócesis de Bolzano-Bressanone (6 de agosto de 2008); Carta encíclica *Caritas in veritate* (29 de junio de 2009) y Discurso al Deutscher Bundestag, Berlín (22 de septiembre 2011). Todos ellos se encuentran ampliamente citados en la Carta encíclica *Laudato Si'*, especialmente pp. 7-12.

de desarrollo (n. 34). En la segunda, San Juan Pablo II reflexiona, por un lado, sobre el hombre que, prisionero del deseo de tener y de gozar, banaliza la realidad de su propio ser, consumiendo de manera desordenada; por otro, el abandono de su colaboración en la obra de la creación, lo que lo lleva a colocarse en lugar de Dios y a desatar la rebelión de la naturaleza contra la impostura del hombre (n. 37). No menos significativas resultan las reflexiones sobre el medio ambiente que hallamos en Compendio de la doctrina social de la Iglesia, en el marco de “La responsabilidad de todos por el bien común”; allí concretamente se dice (n. 166):

“Tales exigencias (emanadas del bien común) atañen, ante todo, al compromiso por la paz, a la correcta organización de los poderes del Estado, a un sólido ordenamiento jurídico, a la salvaguardia del ambiente, a la prestación de los servicios esenciales para las personas, algunos de los cuales son, al mismo tiempo, derechos del hombre: alimentación, habitación, trabajo, educación y acceso a la cultura, transporte, salud, libre circulación de las informaciones y tutela de la libertad religiosa. Sin olvidar la contribución que cada Nación tiene el deber de dar para establecer una verdadera cooperación internacional, en vistas del bien común de la humanidad entera, teniendo en mente también las futuras generaciones”.

Colocar la cuestión ambiental en el marco de las exigencias del bien común significa que la promoción integral de la persona no puede desligarse de la responsabilidad ecológica. En *Caritas in veritate* (1-69), Benedicto XVI reflexiona sobre la responsabilidad del hombre, de los gobiernos y de la Iglesia por la creación, un don de Dios para todos, y la necesidad de profundizar una alianza entre el ser humano y la naturaleza, que permita legar a las futuras generaciones un estado general de cosas que les dé la posibilidad de habitarlas dignamente (esp. 48-51). El Papa Francisco expone primero estas ideas en *Evangelii gaudium* (n.56), pero sólo en la encíclica que nos ocupa profundiza la línea de pensamiento heredada (De Gregorio, 2016).

El llamado a una “ecología integral” tiene un punto de referencia central: la crisis ambiental y la crisis social son cara y ceca de la misma moneda, pues las personas que carecen gravemente de recursos (aproximadamente un 10% de la población, es decir, setecientos treinta y seis millones de personas), resultan las principales víctimas de un modelo productivo que ha precipitado cambios en el comportamiento climático. La pobreza extrema refiere a personas que viven con menos de 1, 90 USA por día, que habitan mayormente en zonas rurales (trabajan en agricultura), que poseen escasa o nula educación formal y que, en su mayoría, son menores de dieciocho años (Banco Mundial 2018). Como el Papa reflexiona en la encíclica, los problemas actuales requieren siempre una mirada de conjunto, es decir, que tenga una perspectiva global de la crisis, pues todo está íntimamente relacionado (n. 95). No se trata, por lo tanto, de llevar adelante únicamente soluciones puntuales, sino de desplegar una política cultural o, con palabras de la encíclica, una ecología cultural. Esta noción se encuentra en íntima relación con la visión consumista de la persona, que es el engranaje de la economía globalizada; esta forma de economía busca ampliar infinitamente el mercado, por lo que se propone homogeneizar las culturas, debilitando lo que es, en sentido propio, diversidad, mediante técnicas de intervención que necesariamente desatienden las problemáticas locales: así como la vida y el mundo son dinámicos, el cuidado del mundo debe ser flexible (n. 145); por ello, la encíclica insiste en incorporar la perspectiva de los derechos de las culturas en lo que llamamos “desarrollo”, pues estos suponen un proceso histórico que se expresa en un ámbito determinado. La sobreexplotación del medio ambiente y consecuentemente su degradación puede acabar obviamente con los recursos y con las capacidades de la sociedad que se nutrió de ese medio ambiente y que les dio, durante un prolongado período, identidad, es decir, existencia y convivencia. “La desaparición de una cultura puede ser tanto o más grave que la desaparición de una especie animal o vegetal. La imposición de un estilo hegemónico de vida ligado a un modo de producción puede ser tan dañina como la alteración de los ecosistemas”. (n 145)

No se trata, entonces, de destruir y de volver a construir, pues hay un patrimonio cultural que desaparece para siempre: la ecología sería insuficiente si únicamente se ocupara de preservar el medio ambiente, desatendiendo la diversidad cultural. En este sentido, lo que llamamos pasado es solo una parte de la cuestión, pues lo central de una cultura es el modo dinámico en que convive una sociedad en un determinado ambiente: la modificación de uno de los componentes afecta al conjunto (n. 146). No tener en cuenta estos espacios bio-espirituales es lo que la encíclica denomina “deuda ecológica”, que es producto de los desequilibrios comerciales; tales desequilibrios implican que los países pobres sobreexplotan sus recursos naturales para resultar más rentables en favor de los países industrializados, produciendo una forma de contaminación de alcances catastróficos: mercurio en la minería del oro o dióxido de azufre en la del cobre (n. 51), deforestación y excesiva explotación de cardúmenes en aguas soberanas e internacionales. Este abismo entre países ricos y pobres ha llevado a los más necesitados a reducir los estándares de seguridad industrial, para que las empresas multinacionales puedan establecerse en estos países que además ofrecen mano de obra no calificada y mucho más barata; estas empresas salen del estricto ámbito jurídico de sus países de origen, con la reducción de costos que ello significa. ¿Cuáles son las consecuencias medioambientales? Reducción de la capa de ozono por emisión de clorofluorocarbonos (CFC), aumento de temperatura planetaria mediante la emisión fundamentalmente de dióxido de carbono, metano y óxido nitroso.

La explotación de los recursos naturales a niveles insostenibles, debido al consumo actual (nn. 40-41), se pone de manifiesto en los cambios ponderables desde 1970 a la fecha: pérdida de ecosistemas de agua dulce (ríos, lagos y manglares particularmente), y de agua salada, reducción de la superficie de bosques; en el mismo lapso, el consumo de energía ha aumentado un 70%. Como escribe Magdalena Czarnecka (2013, 186), se trata de sistemas complejos e impredecibles y la incapacidad de incluir todos los procesos ecológicos en el marco de la teoría newtoniana ha abierto nuevas expectativas teóricas de comprensión que no excluyen la perspectiva creacionista. Esta situación, sin embargo, tiene una geografía bastante específica, pues la padecen de manera desproporcionada regiones específicas; resultan muy significativas las tres referencias que hallamos en la encíclica *Laudato Si'* sobre el continente africano: a) por la alarmante carencia de agua potable y limpia, que sobrelleva la mayoría de la población (n. 29); por ser la geografía más castigada por el calentamiento global en forma de sequías (n. 51) y c) por la actividad contaminante de los países más desarrollados que exportan a países africanos residuos sólidos y líquidos de alta toxicidad (n. 51); en cuanto a lo anterior, la encíclica suma su consideración acerca de cómo afectan estas situaciones las soberanías nacionales (n. 38 y especialmente n. 137; Zampetti 1993, 142), pues la normativa sobre economía y empleo y la legislación sobre el cuidado del ambiente se ven como barreras a las posibilidades comerciales.

Una manera de desviar la mirada del centro del problema es considerar que la causa de todo es la superpoblación (n. 50); en realidad se pretende legitimar un modelo de distribución de la riqueza, “donde una minoría se cree con el derecho de consumir en una proporción que sería imposible generalizar, porque el planeta no podría ni siquiera contener los residuos de semejante consumo” (n. 50).

Es importante señalar una afirmación de la encíclica, según la cual “la existencia humana se basa en tres relaciones estrechamente ligadas: con Dios, con el prójimo y con la tierra” (n. 66); desde esta perspectiva, se pone bajo análisis la “crisis ambiental”, en tres sentidos que confluyen: el equilibrio se debe recuperar interiormente (cada uno consigo mismo), en términos de solidaridad con la humanidad y la naturaleza y, por último, espiritualmente con Dios (n. 210). Este es el núcleo de la visión ecológica de cuño cristiano: el misterio de la creación, que Dios ha revelado progresivamente a Israel como el primer paso de la concreción de la Alianza, expresa su amor todopoderoso. De aquí surge la verdad fundamental que la Biblia enseña: Dios crea únicamente debido a su amor y a su bondad (Auer 1984; Portoghesi 2014; Scheid 2016). La fe en la creación está presente en el texto

de la encíclica en dos niveles: a) el ser humano recibe el don de la creación en herencia; b) creación significa “creación de un orden” (Chirico 2014, 244- 248). La conjunción de ambos puntos lleva a una idea central de la ecología en clave cristiana: si el concepto de naturaleza pertenece al ámbito inmanente de la cosa en sí, creación supone considerar el amor de Dios en su conjunto (orden) y en cada cosa, en cada elemento (recordemos la cita en L.S., n° 77, del Libro de la Sabiduría 11. 24, en que pone de manifiesto del amor de Dios por cada creatura). Desde esta perspectiva se resignifica la naturaleza: no solo manifiesta a Dios, sino que también es ámbito de su presencia. Que el ser humano sea el destinatario principal del don de la creación implica responsabilidades: agradecer mediante la plegaria y la contemplación y compartir con el resto del género humano lo que se ha recibido gratuitamente (n. 72-73; *Gaudium et Spes* n. 59; Revol 2018, 412).

La encíclica *Laudato Si'* presenta todos los puntos anteriores y los concentra en la cuestión social: Dios ha establecido, por mediación del hombre, una ordenación general de los bienes (n. 93); partiendo de la encíclica *Pacem in Terris* de Juan XXIII, especialmente de su introducción “El orden del universo”, el Papa Francisco afirma la magnificencia del universo, en el cual nada es superfluo, es decir, cada cosa tiene un valor en sí (n. 33 y nn. 84-85); hace propia esta lectura y la enriquece en un punto sustancial: la necesidad de valorar cada cosa en sí se interpreta desde la variedad, es decir, de cómo son las cosas en sus verdades relacionales. En las huellas de Santo Tomás, la encíclica que nos ocupa considera que la multiplicidad es el modo en que la bondad de Dios suple lo que pueda faltar a una cosa (n.86). La creación, entonces, es el modo en que Dios da a la relación todo su alcance (Scola 2015; Foglizzo 2015). Este es el sustento teológico de los ecosistemas: si cada cosa es buena en sí misma por ser obra de Dios, esto naturalmente se traslada al conjunto armónico que se da en un espacio determinado, al que llamamos “ecosistema”, y del que depende nuestra existencia (n. 140).

1.3. La cuestión de la energía fósil

El consumo de combustibles fósiles trae a la sociedad una serie de problemas graves: calentamiento global, crisis ambientales generalizadas, aunque, al mismo tiempo, posibilita un crecimiento inusitadamente sostenido. El control de los suministros de petróleo o su distribución o producción crea y sostiene conflictos armados, tensiones étnicas y terrorismo. Por otro lado, si se diera una imposibilidad más o menos prolongada de mantener la producción de petróleo, ello significaría la destrucción de los sistemas económicos y políticos que hoy conocemos (tema recurrente de la ficción literaria y cinematográfica del llamado “género post-apocalíptico”, pero que hoy ocupa nuestro día a día con el nombre inquietante de “pandemia”). Las crisis vividas desde 1973 en adelante han llevado a una conciencia generalizada de cuán esencial se ha vuelto el petróleo para todos los aspectos de la vida humana, desde la agricultura hasta la industria farmacéutica, transporte y bienes de consumo en general; la vida cotidiana está determinada por el petróleo y, por ello, las amenazas a mantener su flujo constante hacen de la economía global un castillo de naipes que tambalea (Buell 2014, 273-274). Si bien está clara la determinación de los combustibles fósiles en el sustento de la energía que requiere el desarrollo material de la cultura, en que se sostienen sus aspectos simbólicos, debemos volver sobre un aspecto básico: la relación entre contaminación del planeta y cultura.

Aunque no resulta posible atribuir una causa específica a cada evento climático, como señala la encíclica en n. 23 (actividad volcánica, variaciones de la órbita y del eje de la Tierra o el ciclo solar), es cierto también que las variaciones han alcanzado niveles dramáticos en los últimos cuarenta años, con sucesos meteorológicos cada vez más extremos. Es indudable, por ello, que el uso intensivo de combustibles fósiles acelera el fenómeno del calentamiento global, mediante la gran concentración de gases de efecto invernadero (n. 21). Sin duda, desde el momento en que se echó mano al recurso de los combustibles fósiles, comenzó, primero lentamente (las sociedades comenzaron a crecer y a

organizarse a partir de la industrialización creciente), hasta alcanzar los niveles de impacto ambiental que hoy vivimos (Hallett – Wright 2011, 7). Sin embargo, cuando repasamos algunos de los últimos accidentes relacionados con la extracción petrolera sentimos la acuciante degradación de nuestro entorno (Bierlivet 2011, 154-158); a partir de la crisis petrolera de 1973, la prospección y extracción de petróleo se intensificó proporcionalmente a aquella crisis, lo que trajo aparejado una serie de accidentes gravísimos. Así, por ejemplo, el 24 de marzo de 1989, el superpetrolero Exxon Valdez encalló en Bligh Reef, Alaska, y derramó 240.000 barriles de petróleo en esas aguas marinas. El gasto de más de dos mil millones de dólares en la limpieza no fue efectivo y no pudo borrar el derrame del Valdez del escenario ambiental y político (Guo-Boufadel 2014).

“En 1956, en Nigeria, empezó una asociación entre la compañía Shell y la *British Petroleum* con el fin de explotar el petróleo en el pantanoso delta del Níger. Actualmente Nigeria tiene más de 600 campos petroleros que producen el 40 % de las importaciones totales de petróleo de los Estados Unidos. El 30 de mayo de 2010, se anunciaba que había un derrame de petróleo en el delta del Níger por parte de la Shell y esta tragedia afectaba la vida cotidiana de los pescadores. No obstante, hasta hoy la bonanza petrolera no ha generado un bienestar social y económico en la población de Nigeria, sino una complejidad de fuerzas internas como son las luchas entre los grupos étnicos, los conflictos religiosos, la corrupción dentro de las instituciones estatales, la emergencia de la piratería marina y la creciente pobreza. El 20 de abril de 2010, se inició un derrame de petróleo en el Golfo de México causado por una explosión de la plataforma Deepwater Horizon y su posterior hundimiento, que estaba operada por la Compañía British Petroleum (BP); el 15 de junio de 2010, el presidente Barack Obama comparaba el derrame en el Golfo de México con el ataque terrorista de 11 de septiembre de 2001” (Bierlviet, 2012).

No menos grave fue lo que ocurrió poco después en China; el 16 de julio de 2010, hubo una explosión en dos oleoductos en las aguas de la bahía de Dalian, en el Mar Amarillo, propiedad de la empresa paraestatal china *National Petroleum Corporation*; según BBC News, los esfuerzos por contener la dispersión del crudo (equivalente a unas 1.500 toneladas⁶²), no evitaron los daños en la ciudad portuaria de Dalian: el uso de barreras flotantes y la utilización de numerosos barcos pesqueros para esta tarea se vio minimizada por los fuertes vientos que azotaron la región; ante esta situación, se vertieron veintitrés toneladas de bacterias para que procesaran el petróleo (Bonell Rosabal 2009; Dedov-Ivanova- Sanszhieva 2017, 617-630)⁶³.

Los esfuerzos por aminorar el impacto ecológico de la industria del petróleo no han dado los resultados esperados. El futuro de la industria, relacionada de una forma u otra con el petróleo, se encuentra indefectiblemente vinculada con la eficiencia energética y con la seguridad ecológica. Si bien esta premisa fue válida siempre, hoy adquiere mayor importancia, debido a las necesidades surgidas de la recuperación del llamado petróleo pesado, de la reducción de las reservas de petróleo liviano y el comportamiento geológico de los campos en que éstos se encuentran. Zyrin – Ilinova (2016, 35-40), fundamentan la efectividad de los métodos eléctricos mejorados y se indican también los índices de contaminantes en referencia a las tecnologías tradicionales de tratamiento térmico. Es importante señalar el progresivo agotamiento de las reservas de petróleo liviano; por el contrario, las reservas de alta viscosidad son siete veces más grandes y se ubican en Venezuela, Canadá y Rusia. En este tipo de petróleo, las tecnologías tradicionales tienen una tasa de recuperación muy baja, por lo que se emplean las llamadas “tecnologías mejoradas”, EOR por sus siglas en inglés (“Enhanced Oil Recovery”; Zyrin – Ilinova 2016).

⁶²https://www.bbc.com/mundo/ciencia_tecnologia/2010/07/100719_china_derrame_petroleo_rio_amarillo

⁶³Bonell Rosabal plantea la remoción biológica de azufre por bacterias, de metales por enzimas y la transformación de asfaltos en compuestos más livianos.

La investigación científica ha demostrado que las tecnologías térmicas son las más efectivas para los depósitos de petróleo pesado, principalmente debido a su combinación de impacto hidrodinámico y termodinámico. La temperatura en el interior del pozo cambia los enlaces y las condiciones de filtración, de lo que procede una reducción de la viscosidad que mejora la movilidad del material. En estas circunstancias, el desafío consiste en la creación de tecnologías de recuperación actualizadas, efectivas y seguras, en un sentido ecológico. La tecnología tradicional utiliza los generadores de vapor, que trabajan con combustible fósil; el vapor, producido en el generador de tierra, se inyecta en el pozo para calefacción, a través de un tubo aislado: por cada tonelada de vapor se requieren 1500 m³ de gas; la quema que esto implica produce contaminación del aire por dióxido de nitrógeno y óxido de carbono. Desde el punto de vista ecológico, la “Electrical Enhanced Oil Recovery” (EEOR) es una tecnología más limpia y según otros estudios, más eficaz (Rehman 2012).

El tratamiento electromagnético (ET) incluye una fuente de calor en el fondo de pozo, que se produce como resultado de la acción del campo electromagnético de alta frecuencia. El frente de calentamiento depende del voltaje, la frecuencia del campo electromagnético y la formación de propiedades eléctricas; esto conduce a la descomposición de la emulsión oleosa y al aumento de la presión debido al impacto del campo electromagnético de potencia (Zyrin – Ilinova 2016). Las tecnologías mencionadas anteriormente se prueban y operan en varios campos petroleros, de acuerdo con la tendencia actual de proporcionar procesos efectivos de calefacción dentro del pozo. Por esta razón, la pregunta más importante es sobre la fuente de generación de energía, que se requieren para los métodos de recuperación eléctrica mejorada de petróleo. La central eléctrica de calor es una fuente de gran cantidad de gases de efecto invernadero, lo que colabora con el calentamiento global. Las estadísticas muestran que las empresas productoras de petróleo, que incluyen la estimulación tradicional con vapor / agua caliente, producen contaminación severa en la atmósfera. Sin embargo, el gas usado como combustible de una planta de cogeneración (CP) constituye una de las formas efectivas del uso del combustible, porque produce tanto calor como energía eléctrica. El factor de eficiencia de CP varía entre el 90 y el 92 %, porque la planta recolecta energía residual en la caldera de utilización y la deriva para la generación de energía. Este modelo de explotación dota al campo petrolero de un alto grado de autonomía en el abastecimiento de energía y de protección ante eventuales fallos de esta, además de un ahorro significativo de costos energéticos, que varía entre el 2.5 y el 2.8 (Zyrin – Ilinova 2016, 37).

1.3.1. La interpretación de los procesos de extracción de energía fósil en clave cultural

La interpretación de los procesos de extracción de energía fósil en clave cultural. Éstas consideraciones nos conducen a ponderar los límites de los recursos del actual modelo tecnológico. En efecto, la cuestión ecológica pone de manifiesto uno de los modos en que es posible abusar de la tecnología, pero no es menos cierto que el hombre es “un solucionador de problemas” (Kuhn 2004, 70; Polo 1991, 19-41); el ser humano ha resuelto, a lo largo de su historia, una innumerable serie de problemas, aunque con una característica peculiar: al resolver un problema provoca otros.

Si la inteligencia humana, en cuanto capacidad abstractiva, se reconoce en la capacidad de idear, es decir, “de considerar los recursos de los que puede echar mano de una manera no particular” (Polo 1991, 21). El hombre, en cuanto creador de cultura, es el ser que puede llevar a una cierta perfección a la naturaleza: descubre, por ejemplo, propiedades curativas en una planta y la aplica para evitar infecciones o aliviar el dolor; se trata, en definitiva, de un acto de la inteligencia; en este sentido, abstraer significa que la inteligencia puede aplicar la misma solución, aunque las circunstancias hayan cambiado. En este contexto, se presenta la urgencia de la virtud de la prudencia: como enseña Aristóteles, el hombre requiere de prudencia porque se encuentra en medio de dificultades, pues únicamente quien la vive puede tener conciencia de la perfección que implica: “Es, por lo tan-

to, la virtud un modo de ser selectivo, un término medio relativo a nosotros, determinado por la razón y por aquello por lo que decidiría el hombre prudente” (Aristóteles, 1985: 1106 b35). Santo Tomás perfecciona esta valiosa tesis, pues advierte que la clarificación acerca de qué es la prudencia sobrepasa las posibilidades de esta virtud: “Para tener el saber prudencial se requiere ser prudente, pero para notar la naturaleza de la prudencia se requiere, además, disponer de un conocer superior al prudencial” (Santo Tomás, II-II c. 55 a 1, ad-1; Sellés 1999, 17-20).

Aunque el ser humano dispone de esta capacidad, el contexto de época puede ser fuente de limitaciones; en efecto, la idea de progreso sigue pesando con fuerza en nuestra cultura. Esto significa, en lo que a nosotros atañe, un cierto agotamiento del modelo de racionalidad de una determinada época, es decir, un desfase concreto entre el estado en que se encuentra una cultura y cuestiones nuevas la constitución estructural de aquella cultura: se verifica una grave contradicción entre los efectos no deseados que produjo (y produce), una determinada dinámica histórica y la esperanza que generó. El núcleo de nuestra situación radica, entonces, en que debemos reaccionar rápidamente ante el ideal ilustrado de progreso, que se ha potenciado mediante la insistencia neoliberal en el consumo. La idea de progreso, que comienza en occidente a partir de fines del s. XVII, se fundamenta en la tesis de que el saber aplicado, que irá tomando el significado más preciso de “tecnología”, mejorará indefinidamente nuestras circunstancias vitales: nuevas técnicas aplicadas a la producción de bienes; la ciencia moderna tiene como fundamento el dominio de la naturaleza; con esta claridad lo expresó Descartes (Gil Fernández 1985, 78-79): todo queda sometido absolutamente al ejercicio de la racionalidad humana en cuanto tiene la condición de amo del universo o proceso indefinido de liberación de los males que históricamente han aquejado a la humanidad; por ello, la naturaleza -a excepción del ser humano- puede ser explotado sin límites al servicio de fines humanos. ¿Por qué este modelo de ciencia -tal como la concebimos, es decir, radicalizada respecto de sus orígenes cartesianos - no puede sostener nuestras esperanzas en ella? (Megías Quirós, 2014: 167-168) La variedad de los datos hasta aquí reunidos y su interpretación no debe alejar nuestra atención del punto de interés, es decir, la lectura de la situación ecológica actual. En efecto, si la ética es la decisión de llevar al ser humano al cumplimiento de su fin propio, entonces, la responsabilidad específica de la mirada ecológica reside en reconducir al ser humano a su perfección posible, en el orden individual y social; al instrumentalizar la naturaleza lingüística y operativamente, hemos quitado a la tierra su capacidad de asombrarnos y, sin asombro, se hace siempre más difícil comprender el valor de lo existente (Puig 2019, 76). Ello implica que el deber moral se encauce mediante las decisiones que se deben tomar, en el marco de las posibilidades de la cultura, cuya característica esencial es la variabilidad. Por esta razón, también se modifica nuestra responsabilidad ante nuevas realidades, aunque los principios morales -en cuanto tales- permanezcan invariables. Si aceptamos, por lo tanto, que el hombre no crea el entramado de la ética, como por el contrario sí ocurre con la cultura, entonces, el primer dato que se nos presenta dice que el ser humano no es capaz de conocer a fondo las consecuencias de sus actos.

Por ello, el concepto “crisis”, que expresa el estado actual del vínculo de la humanidad con su obra (la cultura), expone un cierto estado de agotamiento en el modo en que se tratan los problemas de la vida, en sentido individual y social. La crisis afecta la confianza con que se afrontan las fuerzas de la dinámica histórica, es decir, las promesas de la ciencia moderna acerca de un progreso indefinido resultan insostenibles. Así queda identificado el núcleo de nuestro problema presente y su consecuencia inmediata: no existe algo que podamos llamar “porvenir”. Estos planteos deben ser comprendidos en el marco de la historia de la cultura, en cuanto en ella se vinculan la posibilidad y la necesidad del obrar. Desde un punto de vista teológico, esta perspectiva se encuentra puesta en jaque por la posibilidad humana de desconocer el orden moral; a esta posibilidad, que se da en la acepción absoluta del término “origen”, recibe consecuentemente la denominación del “pecado original”, es decir, que en la historia de la cultura se manifiesta un vacío del sentido moral y del

obrar histórico, que este mismo obrar pone de manifiesto. El progreso en la historia de la cultura y el reordenamiento moral que aquel progreso podría implicar nunca coinciden, pues la ética, en cuanto brota de principios, puede ser descrita en términos históricos, pero no propiamente comprendida. Conscientes de la aporía que aquí se presenta, es necesario volver sobre la relación antes mentada de “pecado original”. En el Libro II del Comentario a las Sentencias de Pedro Lombardo (II, d. 3. q. 9), Santo Tomás anota que se trata de un pecado de ciencia, que, en este contexto, significa los modos en que el ser humano se relaciona con la naturaleza, es decir, no solo saber teórico sino también un cierto modo de proceder. La ciencia “del bien y del mal” o la ciencia del pecado que se abre en la disyuntiva bien-mal es de naturaleza operativa, en tanto se presenta en términos de dominio (Gn. 3. 16), es decir, de desplazar a Dios (“seréis como dioses” Gn. 3. 1-13), siendo, por ello, la forma arquetípica de todo pecado. Como señala Leonardo Polo (2008, 84), la ciencia del bien y del mal entrañó un proyecto de corrección del plan de Dios; esta actividad de corrección de la obra divina es absolutamente ociosa y aberrante, pues hace de la disyunción una distorsión y, por ello, instala el error en el mundo. De esa actividad resulta, entonces, una negación, un maltrato de la creación; este escándalo cósmico es la raíz del quebrantamiento ontológico del pecado original, que nosotros leemos en términos ecológicos (Revol 2015).

[Ir al Índice](#)

Capítulo 2

Ecuaciones fraccionarias

El cálculo fraccionario tiene siglos de conocerse en sus conceptos y complejidad pero sigue existiendo una brecha de conocimiento sobre el significado real, es decir, su concepto en la física y en la vida diaria. En este documento se dará un antecedente histórico empezando por Leibniz en el año 1695, el cual visualiza en una carta que contesta a L'Hopital su gran importancia en el futuro. Se comentará brevemente los estudios de Euler, Lagrange, Laplace y Lacroix, este último quien es el primero que registra un documento sobre el cálculo fraccionario.

A manera de comentario, se observa que Abel fue el primero en resolver un problema utilizando el cálculo fraccionario. También se presenta a Fourier, ya que es el segundo en mencionar las derivadas fraccionarias pero no se registran comentarios de la solución de su famosa ecuación de flujo usando esta teoría. Se presenta la función Gamma como una herramienta de suma importancia para el desarrollo del cálculo fraccionario ya que hizo posible la solución del cálculo de factoriales fraccionarios. Se incluyen sus distintas formas de expresarse y la gráfica de esta función.

Otra herramienta de suma importancia para el cálculo fraccionario fue el concepto de la integral iterada, en el cual se presentan los cálculos para la obtención de la integral n -ésima y se extiende de manera natural a la integral α -ésima.

Como complemento, se habla sobre las aportaciones de Riemann y Liouville, las cuales basan sus definiciones en el uso de las integrales iteradas. Se destaca otra etapa histórica desde Heaviside hasta Caputo, quienes al igual que Riemann y Liouville, basan sus definiciones del cálculo fraccionario en las integrales iteradas.

2.1. Antecedentes históricos

Leibniz en el año de 1695 introdujo la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$. Esta notación diferencial, al ser expresada en términos de n , inclinó a pensar en las derivadas de orden entero, principalmente en los conceptos de posición, velocidad y aceleración $(y(x), y'(x), y''(x))$, los cuales no limitaban que se extendieran los conceptos para cualquier n entero. La $y(x), y'(x), y''(x)$, desde la física, se entendían con mucha claridad, pero iniciaron algunos cuestionamientos, preguntas que muy pocos se hacen hasta nuestros días pero que impactaron a los grandes pensadores. Algunas de estas preguntas son: ¿es posible usar un n fraccionario?, ¿un n con valor entre 0 y 1 qué significado tendría?, ¿qué hay entre la posición y

la velocidad, qué es?, ¿entre la velocidad y la aceleración qué existe?, ¿ n puede ser cualquier número: irracional, racional o complejo?

Una de estas personas fue L'Hopital, quien alrededor del año 1700, preguntó de manera muy concreta, en una carta a Leibniz después de introducir su novedosa notación, ¿*Qué pasa si $n = \frac{1}{2}$?* La respuesta de Leibniz fue profunda y profética, *Usted puede ver con eso, señor, que puede expresar por una serie infinita una cantidad como $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$, aunque la serie infinita y la geométrica son distantes, la infinita solamente admite exponentes enteros positivos y negativos, y aún no conoce el uso de exponentes fraccionarios* [Miller and Ross,], concluye en esta carta, *por tanto la $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$ será igual a $\sqrt{\frac{dy}{d\sqrt{(x)}}}$. Ésta es una aparente paradoja de la cual, un día, útiles consecuencias serán extraídas* [Miller and Ross,]. Estas palabras cobran fuerza en la actualidad ya que sus aplicaciones son una realidad.

Euler en el año de 1730 dio algunos comentarios sobre las derivadas fraccionarias, pero su pregunta es similar a la de L'Hopital, *Cuando n es un entero positivo y p es una función de x , la razón $\frac{d^n p(x)}{dx^n}$ siempre se puede expresar algebraicamente. Ahora me pregunto qué tipo de relación se puede hacer si n es una fracción* [Miller and Ross,]. Se pudo expresar de modo algebraico las derivadas de orden entero pero revela la inquietud de las derivadas fraccionarias, comenta que no eran evidentes los resultados y le brotaban de manera natural la dificultad de los cálculos; sin embargo, con la ayuda de la interpolación se puede dar luz a este tema.

Lagrange de manera indirecta contribuye al cálculo fraccionario con la ley de exponentes para operadores diferenciales de orden entero.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^n g(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} g(x) \quad (2.1)$$

Laplace en 1812 definió una derivada fraccionaria por medio de una de orden entero. Parece ser que el primer comentario de una derivada fraccionaria aparece en uno de los textos de Lacroix (1819, pp. 409-410) [Lacroix, 1819], con un único ejercicio de la derivada n -ésima de $f(x) = x^m$.

Si se tiene $y = x^m$, se puede calcular su enésima derivada:

$$\begin{aligned}
 y^{(0)} &= x^m \\
 y^1 &= m \cdot x^{m-1} \\
 y^{(2)} &= m(m-1)x^{m-2} \\
 y^{(3)} &= m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\
 &\vdots \\
 y^{(m)} &= m(m-1)(m-2)\dots(m-(m-1))x^{m-m} = m! \\
 y^{(m+1)} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))x^{m-n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Nota: Estos cálculos no son exactamente los que hizo Lacroix, se han reconstruido según los comentarios de su solución.

Por lo tanto, se utiliza la función gamma: $\Gamma(z) = (z-1)!$ que se desarrollará más adelante con detalle, se sabe que:

$$y^{(n)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \tag{2.3}$$

Y generalizando la fórmula para derivadas fraccionarias se dice que:

$$y^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha} \tag{2.4}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ y $m = 1$ se obtiene:

$$y^{(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Este resultado se presenta expresado por medio de la función Gamma (esta función define factoriales fraccionarios y aparece con Legendre en 1810) [Piedra, 2011], el cual lo obtuvo primero generalizando la derivada n-ésima de $f(x) = x^m$ y luego sustituyendo $n = \frac{1}{2}$. Es importante resaltar que es idéntico al de Riemann–Liouville, quienes aportaron la definición actual de una derivada fraccionaria.

Fourier en 1822 es el segundo en hacer mención a las derivadas fraccionarias. Su definición de un operador fraccionario se obtiene de su representación de orden entero para $f(x)$ [Torres Hernández, 2020]. Más adelante se comentará sobre su ecuación de flujo, la cual nunca fue resuelta por él con cálculo fraccionario.

Abel, matemático noruego que vivió solamente 27 años y fue pionero en la solución de integrales [Neils Henrik,], en 1823, fue el primero en aplicar el cálculo fraccionario para obtener la solución de la formulación del problema de la tautócrona [Hilfer, 2000].

2.1.1. Antecedentes matemáticos

Función Gamma

Es de hacer notar que L'Hopital, Leibniz y Euler podían conseguir la complejidad de los cálculos del mundo de las derivadas fraccionarias. Lo que brincaba era ¿cómo calcular un factorial fraccionario?. Se entendía con claridad que $4! = 24$, $10! = 3628800$ y no tenía ningún problema para un valor entero. Pero $\frac{1}{2}!$, $0.75!$, $\frac{3}{2}!$, no se sabía cómo calcularlo. En 1809, Legendre, un físico matemático francés destacado por sus integrales elípticas [Legendre, 2018], definió la función Gamma como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.6)$$

la cual se puede resolver por partes. Se presentan los cálculos por lo importante que fue para el desarrollo del cálculo fraccionario.

En el apartado anterior se comentó que Lacroix, diez años después de esta publicación, pudo resolver su único problema de derivada fraccionaria.

Primero se lleva a cabo un cambio de variable $z - 1 = \alpha \rightarrow z = \alpha + 1$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt, \quad (2.7)$$

ahora resolviendo por partes se tiene,

$$\begin{array}{ll} t^{\alpha} & e^{-t} \\ \alpha t^{\alpha-1} & -e^{-t} \\ \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} & e^{-t}, \\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)t^{\alpha-3} & -e^{-t} \\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-(\alpha-1)) = \alpha! & e^{-t} \end{array} \quad (2.8)$$

y haciendo la suma telescópica

$$-t^{\alpha}e^{-t} - \alpha t^{\alpha-1}e^{-t} - \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t} - \alpha!e^{-t} \Big|_0^{\infty}. \quad (2.9)$$

Haciendo la evaluación en los límites de integración y resolvemos el límite resultante cuando $t \rightarrow \infty$ obtenemos que:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\left[\frac{t^{\alpha} + \alpha t^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \dots \alpha!}{e^t} \right] + \alpha! = 0 + \alpha! = \alpha! \quad (2.10)$$

Al regresar nuestras variables, queda que $(z - 1)! = \alpha!$

$$\Gamma(z) = (z - 1)! \quad (2.11)$$

Un valor clásico de la función Gamma es $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. A continuación se mostrará cómo obtener dicho valor utilizando la integral desarrollada anteriormente, ya que nuevamente este resultado es de uso común en el cálculo fraccionario.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt, \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt, \\
&= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt,
\end{aligned}$$

y utilizando el cambio de variable

$$\begin{cases} z^2 = t, \\ 2z dz = dt \end{cases}$$

Si $t \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0$ y $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z} z dz, \\
&= 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Esta integral (2.12) fue posible de resolver hasta que llegó Gauss en 1809 y mostró la siguiente solución, la cual a continuación repasamos brevemente:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz, \\
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2-y^2} dz dy.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Gauss dijo que el plano que se genera de $(-\infty, \infty)$ en x, y es el mismo generado por un radio ρ infinito con un ángulo θ $[0, 2\pi]$ multiplicado por el Jacobiano de la transformación que es ρ . Este cálculo es importante en el cálculo fraccionario, ya que de él se desprenden muchas de las soluciones de la función Gamma.

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta, \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \int_0^\infty -2\rho e^{-\rho^2} d\rho \right] d\theta, \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty \right] d\theta, \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\rho \rightarrow \infty} -\frac{1}{2e\rho^2} + \frac{1}{2}e^0 \right] d\theta, \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta, \\
&= \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi - 0, \\
I^2 &= \pi \quad \therefore I = \sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

De aquí

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \tag{2.15}$$

La función Gamma

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)(z+3)\dots(z+n)}; \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.16}$$

Esta definición de la función Gamma es proporcionada por el límite infinito de Euler [Arfken and Weber, 2005], la cual ayuda mucho a visualizar la gráfica de esta función que se muestra a continuación.

Se puede observar que tiene asíntotas en $Z = -k$ tal que $k \in \mathbb{N} \cup 0$

Otra manera de expresar esta función es mediante otro límite [Arfken and Weber, 2005]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(z-1)!}{(z+n)!} \tag{2.17}$$

Función Mittag Leffler

Se define con la función de Mittag Leffler

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(\square) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \frac{\square^0}{\Gamma(\beta)} + \frac{\square^1}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{\square^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{\square^3}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots + \frac{\square^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

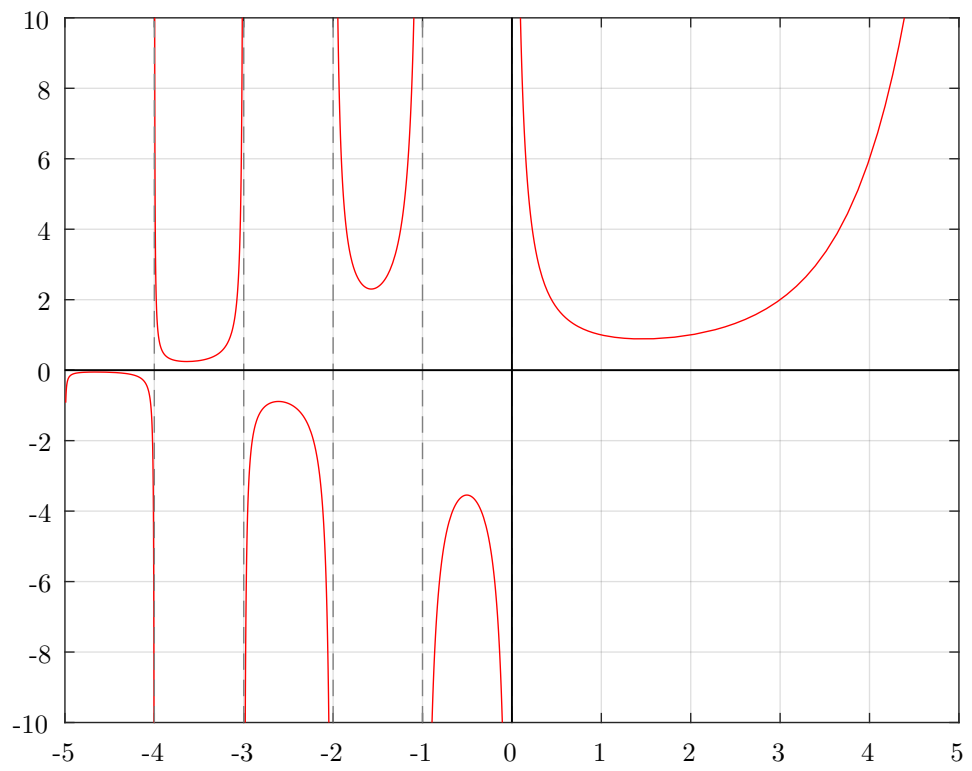


Figura 2.1: Gráfica de la función gamma en el eje real

Si $\square = ax^\alpha$, entonces

$$E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.19)$$

Esta función es de suma importancia, por lo que calcularemos su primera derivada.

$$\begin{aligned} {}_0D_x^1 E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \alpha k x^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pero αk en términos de la función Gamma se puede expresar como

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha k + 1) &= \alpha k!, \\ \Gamma(\alpha k + 1) &= \alpha k(\alpha k - 1)!, \\ \Gamma(\alpha k + 1) &= \alpha k \Gamma(\alpha k), \\ \alpha k &= \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entonces

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \Gamma(\alpha k + 1) x^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha k)}. \quad (2.22)$$

Si $\beta = 1$, entonces

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,1}(ax^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k)}. \quad (2.23)$$

Haciendo $k - 1 = p$, queda que $k = p + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} &= \frac{a^{p+1} x^{\alpha(p+1)-1}}{\Gamma(\alpha(p+1))} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p a x^{\alpha p} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha p + \alpha)}, \\ &= a x^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha p} a^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)} = a x^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ax^\alpha)^p}{\Gamma(\alpha p + \alpha)}, \\ &= a x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\alpha,1}(ax^\alpha)}{dx} &= E_{\alpha,1}^1(ax^\alpha), \\ &= {}_0D_x^1 E_{\alpha,1}(ax^\alpha) = ax^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha), \end{aligned} \quad (2.25)$$

y en términos de t,

$$= at^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha). \quad (2.26)$$

Para la segunda derivada tenemos que

$$\frac{d[ax^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha)]}{dx} = ax^{\alpha-1}D^1E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha) + E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha)a(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad (2.27)$$

Resolvemos

$$D^1E_{\alpha,\alpha} = D^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\alpha a^k x^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}. \quad (2.28)$$

Sabiendo que $\alpha k = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k)}$ entonces:

$$D^1E_{\alpha,\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)a^k x^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k)\Gamma(\alpha k + \alpha)}. \quad (2.29)$$

Si $\alpha = 1$

$$D^1E_{1,1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^{k-1}}{\alpha(k)} \quad (2.30)$$

Si $k - 1 = p$

$$\begin{aligned} D^1E_{1,1} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^{p+1}x^p}{\Gamma(p+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p x^p a}{\Gamma(p+1)} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ax)^p a}{\Gamma(p+1)} = a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ax)^p}{\Gamma(p+1)} \\ &= aE_{1,1}(ax). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{(2)}E_{\alpha,1}(ax^\alpha) &= ax^{\alpha-1}aE_{1,1}(ax) + E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha)a(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ &= a^2x^{\alpha-1}E_{1,1}(ax) + E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha)a(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Entonces,

$${}_0D_x^{(2)}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) = a^2x^{\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(k+1)} \right] + a(\alpha-1)x^{\alpha-2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right]. \quad (2.33)$$

Transformada de Laplace de la función Mittag Leffler

Se sabe que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, por lo tanto

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \int_0^\infty \left[e^{-st} \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right] dt, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^\infty \frac{(a^k t^{\alpha k})}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right\} = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}\left(\frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right).$$

Tomando que la $\mathcal{L}\{t^\square\} = \frac{\square!}{s^{\square+1}}$ obtendremos:

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k (\alpha k)!}{s^{\alpha k + 1} \Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.35)$$

Por otro lado,

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\alpha)^k t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.36)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Si sacamos la transformación de esto, tenemos

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}\left\{ \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k (\alpha k + \beta - 1)!}{\Gamma(\alpha k + \beta) s^{\alpha k + \beta}},$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k \Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta) s^{\alpha k + \beta}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\alpha k + \beta}}, \quad (2.37)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\alpha k} s^\beta} = s^{-\beta} \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{a}{s^\alpha} \right]^k$$

Si $\frac{a}{s^\alpha} = w$ entonces

$$s^{-\beta} \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{a}{s^\alpha} \right]^k = s^{-\beta} [1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^k], \quad (2.38)$$

y si de lo anterior tomamos que

$$\sum_{k=0}^\infty \left[\frac{a}{s^\alpha} \right]^k = S_k \quad (2.39)$$

entonces tenemos

$$S_k = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^k \quad (2.40)$$

y multiplicando todos los términos por w ,

$$wS_k = w + w^2 + w^3 + \dots + w^{k+1}. \quad (2.41)$$

Si ahora restamos las ecuaciones (2.40) y (2.41) tendremos,

$$(1-w)S_k = 1 - w^{k+1}, \quad (2.42)$$

$$S_k = \frac{1-w^{k+1}}{1-w}.$$

tomando el límite obtenemos que

$$\lim_{k \rightarrow 0} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-w^{k+1}}{1-w} = \frac{1}{1-w} \quad (2.43)$$

Si $w < 1$

$$\begin{aligned} s^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a}{s^\alpha} \right]^k &= s^{-\beta} \frac{1}{1 - \left[\frac{a}{s^\alpha} \right]}, \\ &= \frac{s^{-\beta} s^\alpha}{s^\alpha - a}, \\ &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a} \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2. Derivadas fraccionarias, definiciones y aplicaciones (Riemann-Louville, Caputo, derivada conforme)

Las derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Louville hacen uso de las integrales iteradas. En el cálculo fraccionario, después de responder la pregunta de las derivadas fraccionarias, se cuestiona si existen las integrales fraccionarias. Y la respuesta es sí. Y se denota como [Torres Hernández, 2020]

$${}_a I_x^\alpha f(x) \quad (2.45)$$

¿Se cumplirá que ${}_a I_x^\alpha D^\alpha f(t) = f(x)$? Así como:

$$\int \frac{df'(t)}{dt} dt = \int df(t) = f(t) \quad (2.46)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dx \quad (2.47)$$

Generalizando con nuestra notación de cálculo fraccionario, se obtiene la fórmula de la n-ésima integral para una función.

$${}_a I_x^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (2.48)$$

$${}_a I_x^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Aportación de Caputo

La fórmula (2.48) merece ser demostrada, pues su aplicación en el cálculo fraccionario es de vital importancia. A continuación se presenta su desarrollo, el cual se puede demostrar por inducción. El siguiente cálculo lo haremos considerando $a = 0$.

Sea

$$\begin{aligned}F_0(x) &= f(x) \\F_1(x) &= \int_0^x F_0(t)dt = \int_0^x f(t)dt \\F_2(x) &= \int_0^x F_1(t)dt\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}u &= F_1(t) & dv &= dt \\du &= f(t)dt & v &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2(x) &= tF_1(t)\Big|_0^x - \int_0^x tf(t)dt \\&= xF_1(x) - \int_0^x tf(t)dt \\&= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \\F_2(x) &= \int_0^x (x-t)f(t)dt \\F_3(x) &= \int_0^x F_2(t)dt\end{aligned}$$

Otra vez por partes

$$\begin{aligned}u &= F_2(t) & dv &= dt \\du &= F_1(t)dt & v &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3(x) &= tF_2(t)\Big|_0^x - \int_0^x tF_1(t)dt \\&= xF_2(x) - \int_0^x tF_1(t)dt\end{aligned}$$

$$x \int_0^x F_1(t) dt - \int_0^x t F_1(t) dt$$

$$F_3(x) = \int_0^x (x-t) F_1(t) dt$$

Más por partes

$$u = F_1(t) \qquad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

$$du = f(t) dt \qquad dv = (x-t) dt$$

$$F_3(x) = -F_1(t) \frac{(x-t)^2}{2} \Big|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

$$F_3(x) = -F_1(x) \frac{0^2}{2} + F_1(0) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

$$F_4(x) = \int_0^x F_3(t) dt$$

Una vez más por partes

$$u = F_3(t) \qquad v = t$$

$$du = F_2(t) dt \qquad dv = dt$$

$$F_4(x) = t F_3(t) \Big|_0^x - \int_0^x t F_2(t) dt$$

$$= x F_3(x) - \int_0^x t F_2(t) dt$$

$$F_4(x) = x \int_0^x F_2(t) dt - \int_0^x t F_2(t) dt$$

$$F_4(x) = \int_0^x (x-t) F_2(t) dt$$

$$u = F_2(t) \qquad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

$$du = F_1(t) dt \qquad dv = (x-t) dt$$

$$F_4(x) = \frac{-F_2(t)(x-t)^2}{2} \Big|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 F_1(t) dt$$

$$F_4(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 F_1(t) dt$$

$$\begin{aligned}
u &= F_1(t) & v &= -\frac{(x-t)^3}{3} \\
du &= f(t)dt & dv &= (x-t)^2 dt \\
F_4(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{-F_1(t)(x-t)^3}{3} \Big|_0^x + \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)^3 f(t) dt \right] \\
F_4(x) &= \frac{1}{3 \cdot 2} \int_0^x (x-t)^3 f(t) dt
\end{aligned}$$

Se puede ver que:

$$F_5(x) = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \int_0^x (x-t)^4 f(t) dt, \quad (2.49)$$

$$F_6(x) = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \int_0^x (x-t)^5 f(t) dt, \quad (2.50)$$

de donde se obtiene que:

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.51)$$

Para demostrar por inducción, de la fórmula anterior en $n+1$ tenemos que:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t) dt, \quad (2.52)$$

deberá ser

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t) dt \quad (2.53)$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
u &= F_n(t) & dv &= dt \\
du &= F_{n-1}(t) dt & v &= t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= tF_n(t) \Big|_0^x - \int_0^x tF_{n-1}(t) dt \\
&= xF_n(x) - \int_0^x tF_{n-1}(t) dt \\
&= x \int_0^x F_{n-1}(t) dt - \int_0^x tF_{n-1}(t) dt \\
F_{n+1}(x) &= \int_0^x (x-t)F_{n-1}(t) dt
\end{aligned}$$

Otra vez por partes

$$\begin{aligned}
u &= F_{n-1}(t) & dv &= (x-t)dt \\
du &= F_{n-2}(t)dt & v &= -\frac{(x-t)^2}{2} \\
F_{n+1}(x) &= -\frac{1}{2}(x-t)^2 F_{n-1}(t) \Big|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 F_{n-2}(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x x-t^2 F_{n-2}(t) dt
\end{aligned}$$

volviendo a integrar

$$\begin{aligned}
u &= F_{n-2}(t) & v &= -\frac{(x-t)^3}{3} \\
du &= F_{n-3}(t)dt & dv &= (x-t)^2 dt \\
F_{n+1}(x) &= -\frac{1}{2} \frac{(x-t)^3}{3} F_{n-2}(t) \Big|_0^x + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^x (x-t)^3 F_{n-3}(t) dt \\
F_{n+1}(x) &= \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^x (x-t)^3 F_{n-3}(t) dt.
\end{aligned}$$

Se puede ver que en la siguiente iteración obtenemos:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int_0^x (x-t)^4 F_{n-4}(t) dt,$$

y para una iteración más:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^x (x-t)^5 F_{n-5}(t) dt.$$

Iterando n veces obtenemos:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \int_0^x (x-t)^n F_{n-n}(t) dt,$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n F_0(t) dt,$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t) dt. \tag{2.54}$$

Por lo tanto se ve que (2.52) es igual a (2.54) y qed.

Aportación de Riemann

Riemann desarrolló su teoría sobre la integración fraccionaria. Se comenta que rechazó que estos trabajos fueran publicados y hasta después de su muerte se publican en 1892. Él buscó una generalización de la serie de Taylor y sus derivadas, la cual expresó como

$$D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \Psi(x) \quad (2.55)$$

La función $\Psi(x)$ recibió en esta época muchos comentarios ya que el agregarla era la mayor dificultad de esta teoría de Riemann. [Torres Hernández, 2020]

A continuación se presenta la definición de Riemann-Liouville que tiene mucho uso en la actualidad para derivadas fraccionarias. Se presenta un breve cálculo con operadores para concluir con su definición de derivada fraccionaria. [Torres Hernández, 2020]

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} I_x^\alpha &= {}_a^{RL} D_x^{-\alpha}, \\ &= D^n I^n I^\alpha, \\ &= D^n I^{n+\alpha}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f(t) dt, \\ {}_a^{RL} D_x^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.56)$$

De Heaviside a Caputo

Heaviside en 1892, mostró cómo algunas ecuaciones diferenciales lineales se pueden resolver con el uso de operadores. El cálculo de operadores de Heaviside aplica a funciones lineales. Obtuvo resultados correctos al expandir la exponencial en una serie de potencias $p^{\frac{1}{2}}$ lo cual era el concepto de la derivada fraccionaria para el valor $\alpha = \frac{1}{2}$.

En el periodo de 1900-1970, se publicó una modesta cantidad de trabajos sobre el cálculo fraccionario. Destacan Al-Bassam, Davis, Hard, Zygmund, Weyl, Samko, entre otros. En 1974, se dio la primera conferencia internacional sobre el cálculo fraccionario en la Universidad de New Haven, Connecticut. Destacó la aplicación del cálculo fraccionario a la teoría de probabilidades. En 1984, sólo diez años después, se da la segunda conferencia internacional sobre el cálculo fraccionario, la cual fue patrocinada por la Universidad Strathclyde, Glasgow, Escocia. En ésta participaron P. Heywood, S. Kalla, W. Lamb, J.S. Lowndes, K. Nishimoto, P.G. Rooney, y H.M. Strivastada.

Japón detectó mucha actividad relacionada con el cálculo fraccionario en los años 80. Los principales autores son S. Owa (1990), M. Saigo (1980) y K. Nishimoto. Este último dedicó cuatro volúmenes a aplicaciones del cálculo fraccionario en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Los rusos también destacaron representados por O. Marichev, A. Kilbas, y S. Samko (1987).

La tercera conferencia internacional se celebró en la Universidad de Nihon en Tokyo en 1989. El cálculo fraccionario se utiliza actualmente en muchos campos de la ciencia e ingeniería, incluyendo redes eléctricas, teoría electromagnética, transporte, reología, flujo de fluidos y estadística, entre otros. [Torres Hernández, 2020]

Del texto anterior, destaca de manera importante por su aplicación hasta nuestros días Michele Caputo. En 1969, publicó un libro en el que introdujo una nueva derivada fraccionaria que descubrió Gerasimov en 1948. Esta derivada es de suma importancia ya que permite dar una interpretación física a problemas de condiciones iniciales, además de que permite modelar el tiempo fraccionario.

$$\begin{aligned}
 {}_a^C I_x^\alpha &= {}_a^C D_x^{-\alpha}, \\
 &= I^\alpha I^n D^n f(t), \\
 &= I^{\alpha+n} D^n f(t), \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^n(t) dt, \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

$${}_a^C D_x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^n(t) dt,$$

$${}_a^C D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt$$

La derivada derecha de Caputo-Gerasimov se define como

$${}_a^C D_x^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^n(t) dt \tag{2.58}$$

y la derivada izquierda como

$${}_x^C D_b^\alpha y(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} y^n(t) dt \tag{2.59}$$

Comparativo del uso de las definiciones de Lacroix, Riemann-Louville y Caputo

A continuación se presenta la solución de la derivada fraccionaria $y^{\frac{1}{2}}$ para la función $y = x$, denotada como $D^{\frac{1}{2}}$ para Lacroix, como ${}^RL_0 D_x^{\frac{1}{2}}$ para Riemann-Liouville y como ${}_0^C D_x^{\frac{1}{2}}$ para Caputo.

Cabe hacer notar que Lacroix no toma en cuenta ninguna condición inicial, a distinción de Riemann-Liouville y Caputo que sí lo hacen. Esto representa un gran avance para la solución de problemas con condiciones iniciales o de frontera. En los tres se pueden observar idénticos resultados, los cuales variarían en el caso que en el operador ${}_a D_x^{\frac{1}{2}}$, la $a \neq 0$ (condición inicial).

Lacroix

$$\begin{aligned}
 y &= x^m, \\
 y^{(n)} &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \\
 y^{(\alpha)} &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Si $m = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 y^{\frac{1}{2}} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}}, \\
 &= \frac{1!}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Riemann-Liouville

$${}_a^{RL} D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \tag{2.62}$$

sea $n = 1$, $f(t) = t$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $a = 0$

$${}_0^{RL} D_x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} D^1 \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t dt, \tag{2.63}$$

$${}_0^{RL} D_x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} D \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t dt$$

Integrando $\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t dt$,

$$I = \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt, \tag{2.64}$$

con el cambio de variable

$$\begin{aligned}
z^2 &= (x - t), \\
2zdz &= -dt, \\
dt &= -2zdz
\end{aligned}
\tag{2.65}$$

sustituyendo t

$$\begin{aligned}
I &= - \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{(x-z^2)}{z} 2zdz, \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{x}} (x - z^2) dz, \\
&= 2 \left(xz - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{x}}, \\
&= 2 \left(x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right), \\
&= 2 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \right), \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} D \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right], \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right], \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}, \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Caputo

$${}_a^C D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt,
\tag{2.66}$$

sea $n = 1$, $f(t) = t$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $a = 0$

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t dt, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t' dt, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-2(x-t)^{\frac{1}{2}}) \Big|_0^x, \\
&= 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}, \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

En el siguiente ejercicio se puede comprobar, siendo $y = x$ y su $y^{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$, que si integramos esta función

$${}_0 I_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \right) = x, \tag{2.68}$$

pero, surgen más cuestionamientos: ¿para qué funciones se cumple esto? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplirse? Estas respuestas ya se han encontrado recientemente.

2.2.1. Propiedades de las distintas derivadas fraccionarias

Sales Teodoro-Oliveira-Capelas de Oliveira [Teodoro et al., 2018], en un artículo en 2018, mencionan que Ross [Ross, 1975] propone una serie de cinco condiciones que un operador debe de cumplir para que sea considerado una derivada fraccionaria. Sin embargo, Ortigueira-Tenreiro Machado [Ortigueira and Machado, 2015], en 2015, proponen restringir dichas condiciones para el operador de la derivada fraccionaria que Sales Teodoro-Oliveira-Capelas de Oliveira enuncian en su artículo:

1. Que la derivada fraccionaria sea un operador lineal.
2. Que la derivada de orden cero de una función sea la propia función $D^0 f(x) = f(x)$.
3. Que cuando α de la derivada fraccionaria sea entero, el resultado sea el mismo que el de la derivada ordinaria.
4. Que el operador cumpla que: $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$.
5. Que cumpla con la regla de Leibniz generalizada:

$$D^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha-k+1)k!} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x).$$

2.3. Nueva definición de la derivada fraccionaria conforme

Seghi Rahmat en 2019 [Rahmat, 2019] publicó un artículo, “*A new definition of conformable fractional derivative or arbitrary time scales*”, donde propone una nueva definición de la derivada

fraccionaria conforme. El principio básico de esta definición consiste en usar un control proporcional-derivativo (PD) dónde u y el tiempo t son ajustados por la ecuación:

$$u(t) = k_p E(t) + k_d \frac{dE(t)}{dt}, \quad (2.69)$$

donde k_p y k_d son ganancias proporcionales a la ganancia derivativa y E es el error entre las variables de estado y proceso.

La definición que da Seghi Rahmat de la derivada conforme, D^α , el cual es un operador diferencial está dado por:

$$D^\alpha f(t) = k_1(\alpha, t)f(t) + k_0(\alpha, t)f'(t), \quad (2.70)$$

donde la función $k_0(\alpha, t) = 0$ y la función $k_1(\alpha, t) = 1$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ y el operador estaría escrito como:

$$D^{0^+} f(t) = f(t), \quad (2.71)$$

y cuando $\alpha \rightarrow 1^-$ las funciones $k_0(\alpha, t) = 1$ y $k_1(\alpha, t) = 0$ quedando así:

$$D^1 f(t) = f'(t). \quad (2.72)$$

A manera de ejemplo propone el siguiente operador donde sendas constantes cumplen con las condiciones de frontera para α :

$$D^\alpha f(t) = (1 - \alpha)|t|^\alpha f(t) + \alpha|t|^{1-\alpha} f'(t). \quad (2.73)$$

Esta teoría la aplicaremos en la sección 3.4 del capítulo 3, a la derivada fraccionaria de Karci [Karci, 2013] para proponer un nuevo operador diferencial fraccionario que cumple las condiciones de Mohamad [Rahmat, 2019].

[Ir al Índice](#)

Capítulo 3

Newton-Raphson fraccionario

3.1. Método del punto fijo

3.1.1. Breve introducción

El método del punto fijo es un método iterativo el cual trata de resolver un problema matemático, sea llamado ecuación, sistema de ecuaciones, mediante acercamientos (aproximaciones) sucesivos a la solución analítica. Estos métodos parten de una primera aproximación llamada solución inicial normalmente denotada como x_0 o \bar{x}_0 .

Estos métodos iterativos se vuelven muy útiles cuando se tiene un gran número de variables con apoyo del avance computacional. En la actualidad se hacen cálculos con miles de millones de variables simultáneamente. En estas magnitudes los métodos directos (analíticos) serían prácticamente imposibles de manejar incluso utilizando las súper computadoras más potentes. Este método del punto fijo nos permite resolver sistemas de ecuaciones que no necesariamente sean lineales. En lo particular, se pueden utilizar para determinar los ceros de una función, siempre y cuando se cumplan los criterios de convergencia (poder llegar a una solución).

Este método iterativo requiere reescribir la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

en la forma

$$x = g(x). \tag{3.2}$$

Si ξ es una raíz de la $f(x)$ y suponemos que existe y es conocida la función $g(x)$ que cumple que

$$f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in f(x) \tag{3.3}$$

entonces

$$f(\xi) + g(\xi) = \xi \tag{3.4}$$

siendo que $f(\xi) = 0$, $\xi = g(\xi)$ y ξ se le conoce como el punto fijo de $g(x)$.

Describiremos a continuación el algoritmo para las iteraciones del punto fijo.

El proceso, como se comentó de manera inicial, comienza con una estimación primaria de ξ . El objetivo de cada iteración es mejorar esta aproximación inicial para alcanzar la convergencia.

Para que el método converja, la derivada de la $g(x)$ con respecto de x , $\frac{dg}{dx}$, debe ser menor que uno en las iteraciones. La convergencia cumple el requisito de que la magnitud el cambio en x de una iteración a otra sea menor que una pequeña cantidad (ε).

El algoritmo se puede resumir en seis pasos:

1. Se obtiene una solución inicial de la raíz de $f(x)$.
2. Se despeja x de manera que $x = g(x)$.
3. Se obtiene la derivada de la $g(x)$, $\frac{dg}{dx}$.
4. Se resuelve la desigualdad $-1 < \frac{dg}{dx} < 1$ y se obtiene el rango de valores en los cuales está el punto fijo ξ .
5. Con x_i buscamos la raíz en $g(x)$, es decir $g(\xi) = \xi$.
6. Iterar donde $x_{i+1} = g(x_i)$

3.1.2. Desarrollo formal

Como planteamos junto con Brambila, Torres y Rodrigo en [Torres-Hernández et al., 2020]: sea $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, entonces es posible construir una secuencia $x_{i=0}^{\infty}$ con el siguiente método iterativo:

$$x_{i+1} := \Phi(x_i), \quad (3.5)$$

si es cierto que $x_i \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^n$ y la función Φ es continua alrededor de ξ , entonces obtenemos que:

$$\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(x_i) = \Phi(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i) = \Phi(\xi). \quad (3.6)$$

El resultado anterior es la razón para que el método descrito en la ecuación (3.5) sea llamado “método del punto fijo”. Así también la función Φ es llamada “función de iteración”. Para entender la naturaleza de la convergencia de la función de iteración Φ se necesita la siguiente definición:

Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa, el método (3.5) para determinar $\xi \in \mathbb{R}^n$, es convergente si existe un δ tal que para cada valor inicial

$$x_0 \in B(\xi; \delta) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\| < \delta\}, \quad (3.7)$$

entonces también es cierto que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - \xi\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi. \quad (3.8)$$

Si tenemos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para la cual queremos determinar el conjunto (3.17), entonces en general se puede escribir una función de iteración Φ de la siguiente manera:

$$\Phi(x) = x - A(x)f(x), \quad (3.9)$$

con la matriz A definida de la siguiente manera

$$A(x) =: (A_{jk}(x)) = \begin{pmatrix} A_{12}(x) & A_{12}(x) & \dots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \dots & A_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x) & A_{n2}(x) & \dots & A_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde $A_{jk}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vale la pena mencionar que la matriz $A(x)$ está determinada de acuerdo al orden de convergencia deseado.

3.2. Orden de convergencia

Habremos de considerar la siguiente definición:

Sea $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa con un punto fijo $\xi \in \Omega$, luego el método (3.5) es llamado convergente (de manera local), de (al menos) orden p ($p \geq 1$) si existe un $\delta > 0$ y un C , una constante no negativa y menor que uno si p es igual a uno, tal que para cualquier valor inicial $x_0 \in B(\xi; \delta)$ entonces

$$\|x_{k+1} - \xi\| \leq C \|x_k - \xi\|^p, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

donde C se conoce como factor de convergencia.

El orden de convergencia se relaciona normalmente con la velocidad a la cual la secuencia generada por (3.5) converge. Para el caso particular donde $p = 1$ se dice que el método (3.5) tiene un orden de convergencia, al menos, lineal y que para el caso donde $p = 2$ el orden de convergencia es, al menos, cuadrático. Antes de continuar necesitamos tomar en cuenta la siguiente notación.

Sea \mathbb{N}_0 un conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, si $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma! := \prod_{k=1}^n \gamma_k! \\ |\gamma| := \sum_{k=1}^n \gamma_k \\ x^\gamma := \prod_{k=1}^n x_k^{\gamma_k} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_n^{\gamma_n}} \end{array} \right. ,$$

El siguiente teorema permite caracterizar el orden de convergencia de una función de iteración Φ con sus derivadas:

Sea $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa con un punto fijo $\xi \in \Omega$, asumiendo que Φ es p -veces diferenciable en ξ para algún $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \frac{\partial |\Phi|_k(\xi)}{\partial x^\gamma} = 0 & , \forall k \geq 1 \forall |\gamma| < p, \text{ si } p \geq 2, \\ \|\Phi^{(1)}(\xi) < 1\| & , \text{ si } p = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $\Phi^{(1)}$ denota la matriz del Jacobiano de la función Φ , entonces Φ es (localmente) convergente de (al menos) orden p .

Demostración. Sea $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa, y sea $\hat{e}_{k=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n y considerando la siguiente notación (de Einstein):

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n \Phi_k(x) \hat{e}_k := \hat{e}_k \Phi(x), \quad (3.13)$$

y usando la expansión de la serie de Taylor de un vector evaluado en una función en notación de índices múltiples se obtienen dos casos:

1. Caso $p \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= \Phi(\xi) + \sum_{|\gamma|=1}^p \frac{1}{\gamma!} \hat{e}_k \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} (x_i - \xi) + \hat{e}_k [o]_k \binom{\max\{(x_i - \xi)^\gamma\}}{|\gamma|=p} \\ &= \Phi(\xi) + \sum_{m=1}^p \left(\sum_{|\gamma|=m} \frac{1}{\gamma!} \hat{e}_k \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} (x_i - \xi) \right) + \hat{e}_k [o]_k \binom{\max\{(x_i - \xi)^\gamma\}}{|\gamma|=p}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|\Phi(x_i) - \Phi(\xi)\| &\leq \sum_{m=1}^p \left(\sum_{|\gamma|=m} \frac{1}{\gamma!} \left\| \hat{e}_k \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} (x_i - \xi) \right\| \right) + \left\| \hat{e}_k [o]_k \binom{\max\{(x_i - \xi)^\gamma\}}{|\gamma|=p} \right\| \\ &\leq \sum_{m=1}^p \left(\sum_{|\gamma|=m} \frac{1}{\gamma!} \left\| \hat{e}_k \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} \right\| \right) \|x_i - \xi\|^m + o(\|x_i - \xi\|^p) \end{aligned}$$

asumiendo que ξ es un punto fijo de Φ y que $\frac{\partial \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} = 0 \forall k \geq 1$ y $\forall |\gamma| < p$ se satisface, entonces la expresión previa supone que

$$\frac{\|\Phi(x_i) - \Phi(\xi)\|}{\|x_i - \xi\|^p} = \frac{\|x_{i+1} - \xi\|}{\|x_i - \xi\|^p} \leq \sum_{|\gamma|=p} \frac{1}{\gamma!} \left\| \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} \hat{e}_k \right\|,$$

luego entonces

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\|x_{i+1} - \xi\|}{\|x_i - \xi\|^p} \leq \sum_{|\gamma|=p} \frac{1}{\gamma!} \left\| \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} \hat{e}_k \right\|,$$

como consecuencia existe un valor $k > 0$ tal que si la secuencia $\{x_i\}_{i=0^\infty}$ generada por el método (3.5) tal que

$$\frac{\|x_{i+1} - \xi\|}{\|x_i - \xi\|^p} \leq \left(\sum_{|\gamma|=p} \frac{1}{\gamma!} \left\| \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} \hat{e}_k \right\| \right) \|x_i - \xi\|^p, \forall i \geq k,$$

entonces Φ es (por lo menos localmente) convergente de orden p .

2. Caso $p = 1$

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= \Phi(\xi) + \sum_{|\gamma|=1}^p \frac{1}{\gamma!} \hat{e}_k \frac{\partial^\gamma \Phi_k(\xi)}{\partial x^\gamma} (x_i - \xi)^\gamma + \hat{e}_k [o]_k \left(\max_{|\gamma|=p} \{(x_i - \xi)^\gamma\} \right) \\ &= \Phi(\xi) + \Phi^{(1)}(\xi)(x_i - \xi) + \hat{e}_k \left(\max_{|\gamma|=p} \{(x_i - \xi)^\gamma\} \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\|\Phi(x_i) - \Phi(\xi)\| \leq \|\Phi^{(1)}(\xi)\| \|x_i - \xi\| + o(\|x_i - \xi\|),$$

asumiendo que ξ sea un punto fijo de Φ y que la condición $\|\Phi^{(1)}(\xi)\| < 1$ sea satisfecha entonces la expresión pasada implica que

$$\frac{\|\Phi(x_i) - \Phi(\xi)\|}{\|x_i - \xi\|} = \frac{\|x_{i+1} - \xi\|}{\|x_i - \xi\|} < \|\Phi^{(1)}(\xi)\| + \frac{o(\|x_i - \xi\|)}{\|x_i - \xi\|},$$

luego entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|x_{i+1} - \xi\|}{\|x_i - \xi\|} < \|\Phi^{(1)}(\xi)\|,$$

como consecuencia existe un valor $k > 0$, si la secuencia $\{x_i\}_{i=0^\infty}$ generada por el método (3.5) converge a ξ , tal que

$$\|x_{i+1} - \xi\| < \|\Phi^{(1)}(\xi)\| \|x_i - \xi\|, \forall i \geq k,$$

entonces Φ es (al menos localmente) convergente de orden lineal.

La siguiente proposición sigue del teorema previo:

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función con valor $\xi \in \Omega$ tal que $\|f(\xi)\| = 0$, y sea $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de iteración como se muestra a continuación

$$\Phi(x) = x - A(x)f(x), \quad (3.14)$$

con $A(x)$ como una matriz. Si la siguiente condición se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \xi} A(x) = (f^{(1)}(\xi))^{-1}, \quad (3.15)$$

entonces Φ satisface una condición necesaria, aunque no suficiente, para ser (localmente) convergente de orden (al menos) cuadrático en $B(\xi; \delta)$.

Demostración. Del teorema (3.12) tenemos que una función de iteración tiene un orden de convergencia de orden, al menos, cuadrático si se cumple la siguiente condición:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\partial \Phi_k(x)}{\partial x_j} = 0, \forall j, k \leq n,$$

que puede ser escrito de manera equivalente como

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \|\Phi^{(1)}(x)\| = 0. \quad (3.16)$$

Luego entonces se puede asumir que tenemos una función $f(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con un cero $\xi \in \Omega$ tal que para todas sus primeras derivadas parciales están definidas en ξ y teniendo la función de iteración Φ (3.14) tiene un k -ésimo componente de la iteración que se puede escribir de la siguiente manera

$$\Phi_k(x) = x_k - \sum_{j=1}^n A_{kj}(x)f_j(x),$$

entonces

$$\Phi_k(x) = \delta_{lk} - \sum_{j=1}^n (A_{kj}(x)\partial_l f_j(x) + (\partial A_{kj}(x))f_j(x)),$$

donde δ_{lk} es la delta de Kronecker, definida como

$$d_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = k \\ 0, & \text{si } l \neq k \end{cases}$$

Asumiendo que (3.16) se cumple entonces

$$\partial\Phi_k(\xi) = \delta_k - \sum_{j=1}^n A_{kj}(\xi)\partial_l f_j(\xi) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n A_{kj}(\xi)\partial_l d_j(\xi) = \delta_{lk}, \forall l, k \leq n.$$

La expresión pasada puede ser expresada a manera de matriz como

$$A(\xi)d^{(1)}(\xi) = I_n \Rightarrow A(\xi) = (f^{(1)}(\xi))^{-1},$$

donde I_n denota la matriz identidad de $n \times n$. Entonces cualquier matriz $A(x)$ que satisfaga la siguiente condición:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} A(x) = (f^{(1)}(\xi))^{-1}$$

garantiza que exista un $\delta > 0$ tal que la función de iteración Φ dada por (3.14) satisface una condición necesaria, pero no suficiente, para ser (localmente) convergente de orden cuadrático, cuando menos, en $B(\xi; \delta)$.

Finalmente, el siguiente corolario se deriva de la proposición pasada.

Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa, si Φ defina una secuencia $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $x_i \rightarrow \xi$ y que la siguiente condición se cumpla

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \|\Phi^{(1)}(x)\| \neq 0,$$

entonces Φ tiene un orden de convergencia cuando menos lineal en $B(\xi; \delta)$

3.3. Historia de Newton-Raphson

En el artículo [Ypma, 1995] se puede ver el desarrollo del método de Newton-Raphson y las condiciones históricas de manera más detallada. Este método se usa ampliamente para la solución de sistemas no lineales pero está limitado a las soluciones reales. Cabe destacar que nuestra propuesta aporta al método sumándole la capacidad para encontrar las raíces complejas.

Un problema clásico en las matemáticas, de interés común a la física como a la ingeniería, es encontrar el conjunto de ceros de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es,

$$\{\xi \in \Omega : \|f(\xi)\| = 0\} \tag{3.17}$$

donde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota la norma de cualquier vector. Aunque encontrar los ceros de una función parezca un problema simple, en general significa que hay que resolver un sistema algebraico como el siguiente

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

donde $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota el componente k -ésimo de la función $f(x)$. Permitiendo que $\{\hat{e}_i\}_i^n = 1$ sea la base canónica de \mathbb{R}^n , si la naturaleza de la función $f(x)$ lo permite, es posible encontrar a la función $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que permite reescribir el sistema de ecuaciones (3.18)

$$\begin{cases} x_1 - g_{11}(x - \hat{e}_1 x_1) = 0 \\ x_2 - g_{12}(x - \hat{e}_2 x_2) = 0 \\ \vdots \\ x_n - g_{1n}(x - \hat{e}_n x_n) = 0 \end{cases}, \quad (3.19)$$

se debe de tomar en cuenta que el sistema de ecuaciones (3.19) puede representar tanto un sistema lineal como uno no lineal. Sin perder la generalidad, tomando la variable x_1 y reemplazándola en el resto de las ecuaciones entonces se puede reescribir el sistema anterior como

$$\begin{cases} x_2 - g_1(x - \hat{e}_2 x_2 - \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_1 g_{11}(\hat{e}_1 x_1)) = 0 \\ x_3 - g_1(x - \hat{e}_3 x_3 - \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_1 g_{11}(\hat{e}_1 x_1)) = 0 \\ \vdots \\ x_n - g_{1n}(x - \hat{e}_n x_n - \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_1 g_{11}(\hat{e}_1 x_1)) = 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

si la naturaleza de la función g_1 lo permite, entonces es posible hallar una función $g_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $g_{21} = 0$ que permita reescribir el sistema de ecuaciones (3.20) de la siguiente manera

$$\begin{cases} x_2 - g_{22}(x - \hat{e}_2 x_2 - \hat{e}_1 x_1) = 0 \\ x_3 - g_{23}(x - \hat{e}_2 x_2 - \hat{e}_1 x_1) = 0 \\ \vdots \\ x_n - g_{2n}(x - \hat{e}_n x_n - \hat{e}_1 x_1) = 0 \end{cases}, \quad (3.21)$$

que corresponde a un sistema equivalente al del sistema (3.19). Asumiendo que un proceso de construcción tal como el de los sistemas (3.20) y (3.21) se pudiera repetir sucesivamente hasta la variable x_{k-2} , entonces es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_{k-1} - g_{k-1,k-1}(x - \hat{e}_{k-1} x_{k-1} - \sum_{r=1}^{k-2} \hat{e}_r x_r) = 0 \\ x_k - g_{k-1,k}(x - \hat{e}_k x_k - \sum_{r=1}^{k-2} \hat{e}_r x_r) = 0 \\ \vdots \\ x_n - g_{k-1,n}(x - \hat{e}_n x_n - \sum_{r=1}^{k-2} \hat{e}_r x_r) = 0 \end{cases}, \quad (3.22)$$

si tomando la variable x_{k-1} y reemplazándola en el resto de las ecuaciones no es posible obtener un sistema de ecuaciones equivalente al sistema (3.19), es posible encontrar una función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $h_r = 0 \forall r < k$, que permita reescribir el sistema resultante de la siguiente manera

$$\begin{cases} x_k - h_k(x - \sum_{r=1}^{k-1} \hat{e}_r x_r) = 0 \\ x_{k+1} - h_{k+1}(x - \sum_{r=1}^{k-1} \hat{e}_r x_r) = 0 \\ \vdots \\ x_n - h_n(x - \sum_{r=1}^{k-1} \hat{e}_r x_r) = 0 \end{cases}, \quad (3.23)$$

El sistema de ecuaciones (3.23) representa un sistema trascendental, que significa que no hay operaciones algebraicas que permitan reescribir dicho sistema en un sistema equivalente al sistema de ecuaciones (3.19). Debe de tomarse en cuenta que el último sistema presentado tiene la ventaja de necesitar menos variables, a pesar de que su expresión analítica se vuelve más compleja; sin embargo, es posible obtener de él la misma información que la contenida en el sistema (3.18). También es necesario mencionar que el método iterativo tiene un problema intrínseco, ya que si el sistema tiene N ecuaciones se han de encontrar una igual cantidad de condiciones iniciales. Este problema se puede resolver de manera parcial combinando los métodos iterativos con el cálculo fraccionario, resultando en el método conocido como “método fraccionario iterativo” que puede encontrar las N soluciones de un sistema con tan sólo una condición inicial.

3.4. Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable

Hasta antes de este apartado se había hecho una recapitulación histórica sobre el cálculo fraccionario. Lo que presentamos a continuación constituye una de las aportaciones principales de esta tesis, que consiste en un nuevo método que hemos llamado Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (*FNRCM*), donde se le aplica al método de Newton-Raphson una derivada “fraccionaria” distinta a las de Riemann-Louville o Caputo para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de dimensión n . Este nuevo método nos ha permitido resolver problemas (de diseño de paneles híbridos y de finanzas en tiempos de incertidumbre), que no se habían podido resolver de manera satisfactoria con los métodos numéricos clásicos. Las soluciones a estos modelos constituyen dos aportaciones más de esta tesis. Las soluciones anteriores se muestran a manera de ejemplo, pero el método puede aplicarse de manera amplia en problemas de otras áreas. En el siguiente apartado desarrollaremos la demostración de la fórmula para el método de FNRCM, que se resume en la ecuación (3.34).

Vale la pena remarcar que las definiciones de Caputo, Riemann-Louville y Lacrouix, consideramos son aproximaciones, esto fundamentado en que si fueran operadores verdaderos sus resultados convergerían en todas las funciones y valores que se le dieran para α . Sin embargo, en los casos presentados, donde convergen, son particulares.

3.4.1. Definición del operador diferencial fraccionario Vega-Brambila

En 2013, Ali Karci [Karci, 2013] presenta una definición novedosa de derivada fraccionaria que para algunas personas, por carecer del efecto de memoria, no debería considerarse como fraccionaria sino como un operador diferencial. En su artículo *A new approach for fractional derivative and its applications* menciona que el significado de una derivada es la proporción del cambio en una variable dependiente contra el cambio en la variable independiente. Demuestra rápidamente que la derivada de una constante es cero y que la de una recta es uno. Karci propone la definición de derivada fraccionaria como se presenta en la ecuación (3.24), la cual hemos aplicado al método de NR para desarrollar nuestra aportación.

$${}^K D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(x+h) - f^\alpha(x)}{(x+h)^\alpha - x^\alpha}, \quad (3.24)$$

aplicando L'Hopital,

$${}^K D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d[f^\alpha(x+h) - f^\alpha(x)]}{dh}}{\frac{d[(x+h)^\alpha - x^\alpha]}{dh}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f^{\alpha-1}(x+h) f'(x+h)}{\alpha(x+h)^{\alpha-1}} \quad (3.25)$$

y tomando el límite cuando h tiende a cero y simplificando se obtiene que:

$${}^K D^\alpha f(x) = \frac{f^{\alpha-1}(x)f'(x)}{x^{\alpha-1}} \quad (3.26)$$

donde K se usa para denotar que es la derivada fraccionaria de Karci.

De lo anterior, proponemos una aportación: utilizar la definición de Karci en el método de Newton-Raphson generando el método que llamaremos Newton-Raphson Fraccionario Conforme,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{{}^K D^\alpha f(x)|_{x=x_n}}, n = 0, 1, 2.. \quad (3.27)$$

Este método se aplicó en el sistema de ecuaciones no lineales del modelo del dispositivo fotovoltaico termo generador (PV-TEG) del Capítulo 4.

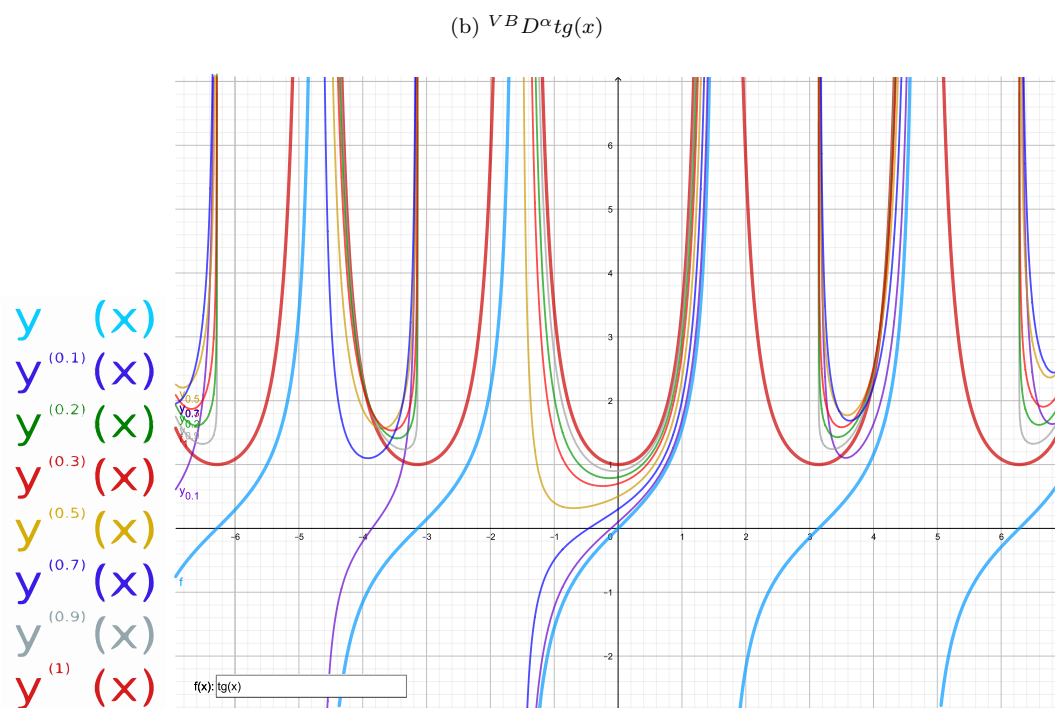
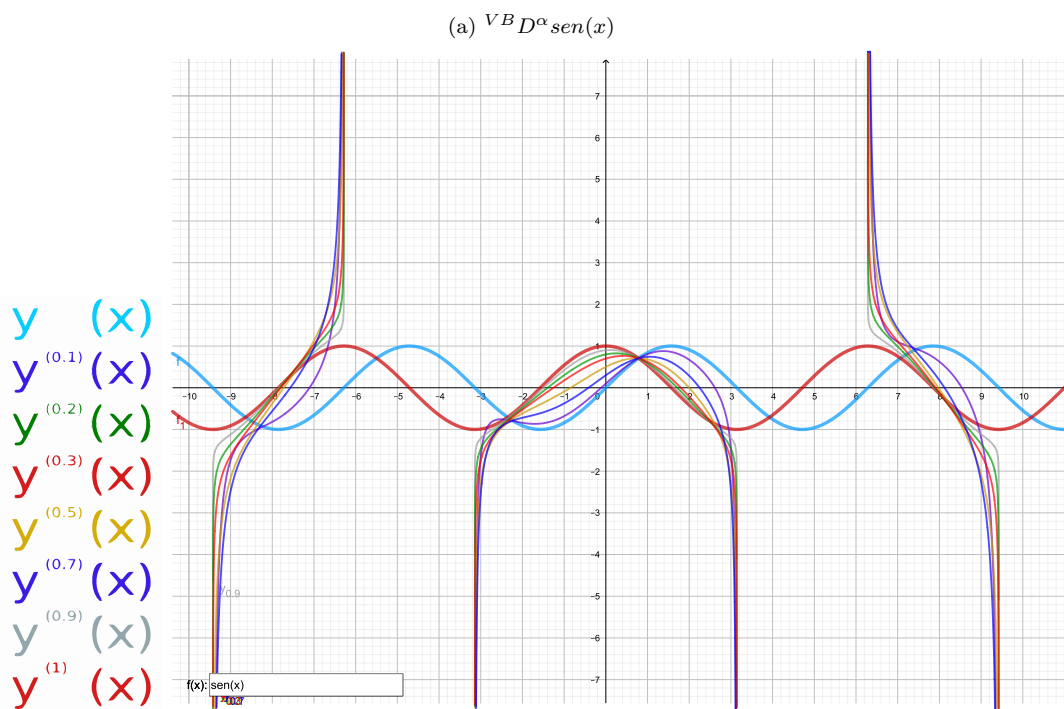
En el capítulo 2, comentamos que Seghi Rahmat [Rahmat, 2019] propone un nuevo operador diferencial fraccionario conforme. Partiendo de las definiciones de Seghi Rahmat y Karci, proponemos un nuevo operador diferencial fraccionario conforme que cumple que si $\lim_{\alpha \rightarrow 0} = f(x)$ y si $\lim_{\alpha \rightarrow 1} = f'(x)$ que llamaremos Operador diferencial fraccionario conforme Vega-Brambila (${}^{VB} D^\alpha f(x)$).

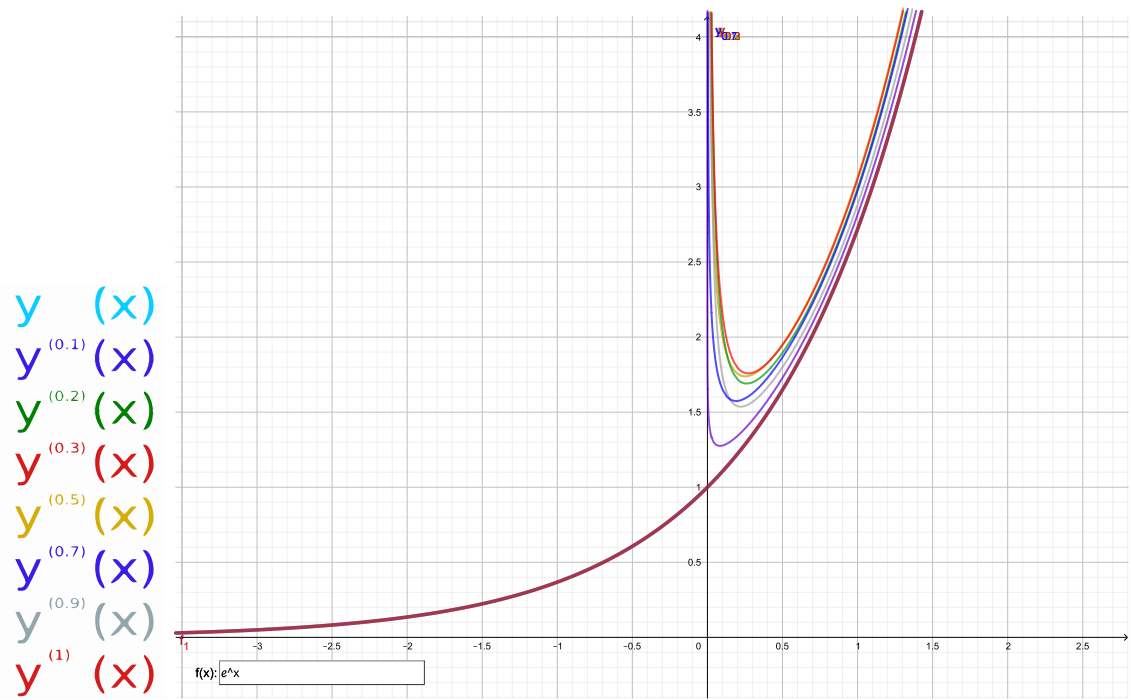
$${}^{VB} D^\alpha f(x) = (1 - \alpha) \left[\frac{f(x)}{x} \right]^\alpha f(x) + \alpha \left[\frac{f(x)}{x} \right]^{\alpha-1} f'(x), \quad (3.28)$$

En la siguiente figura 3.1 se muestran incisos de algunas funciones clásicas usando el operador propuesto en (3.27). En cada inciso se presentan seis derivadas fraccionarias conformes con valores de $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ entre la función $f(x)$ y la derivada $f'(x)$. En cada gráfica se destacan la función $f(x)$ y la derivada $f'(x)$. Los resultados mostrados en la figura pueden ser replicados de manera sencilla en un programa graficador con un número mayor de α 's mayores que cero y menores que uno.

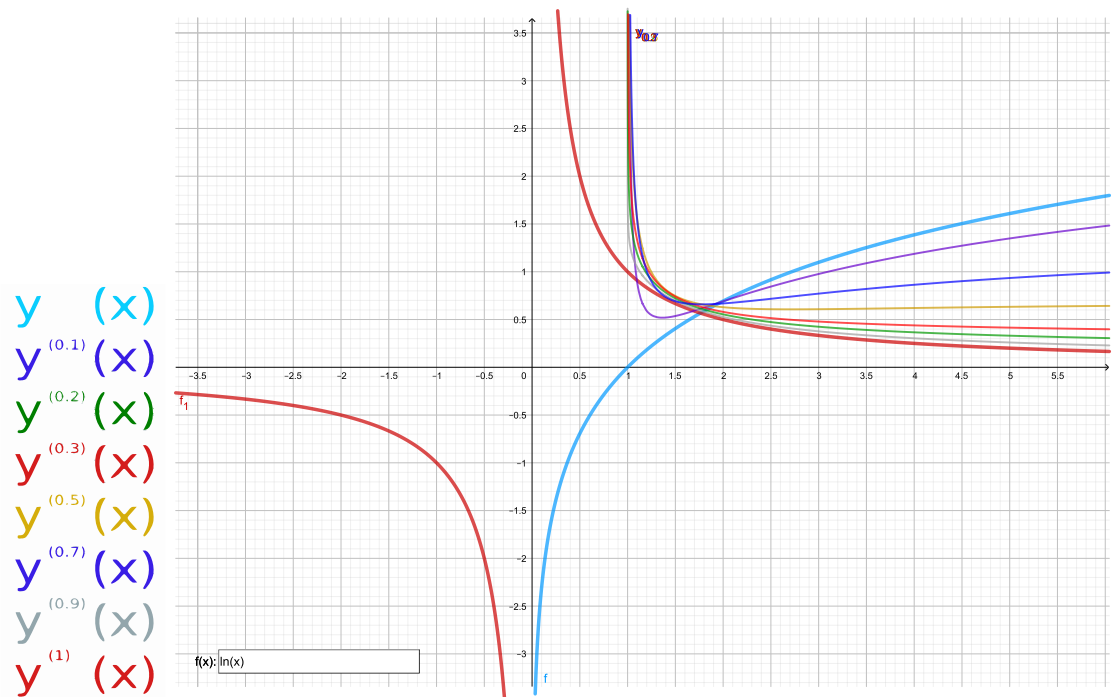
Es claro que esta nueva definición de operador diferencial fraccionario conforme cumple las condiciones de frontera que en el $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+}$ se obtiene la función $f(x)$ y en $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-}$ se obtiene la primera derivada $f'(x)$.

Figura 3.1: Derivadas fraccionarias conformes utilizando el operador ${}^{VB}D^\alpha$ de algunas funciones clásicas

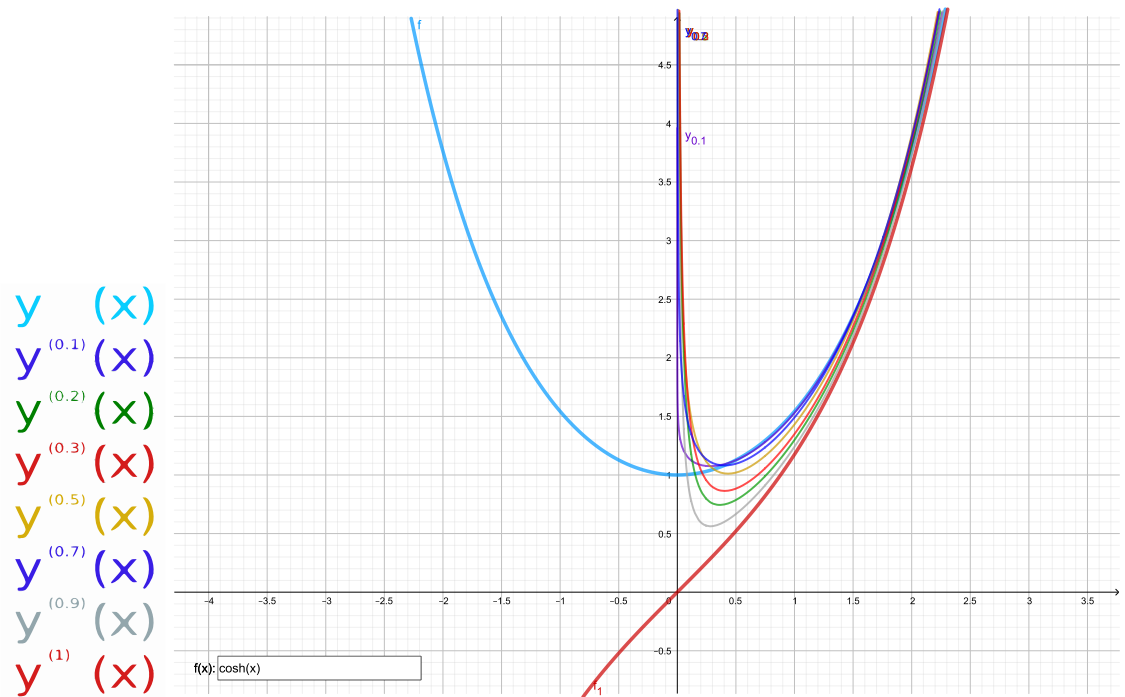




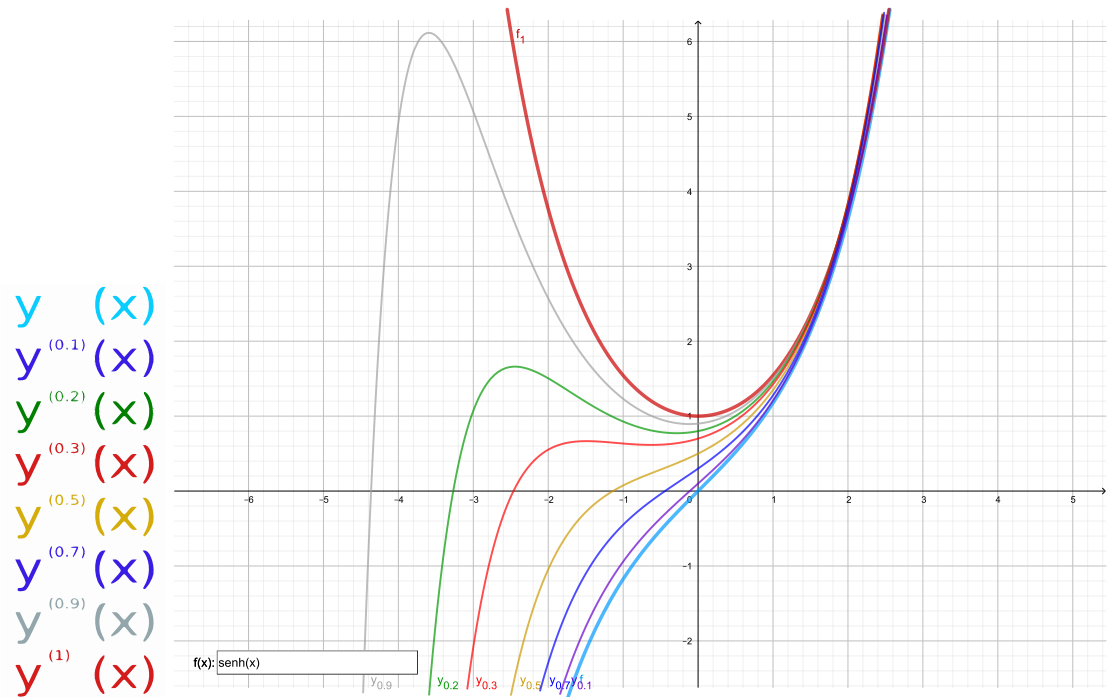
(c) ${}^{VB}D^\alpha e^x$



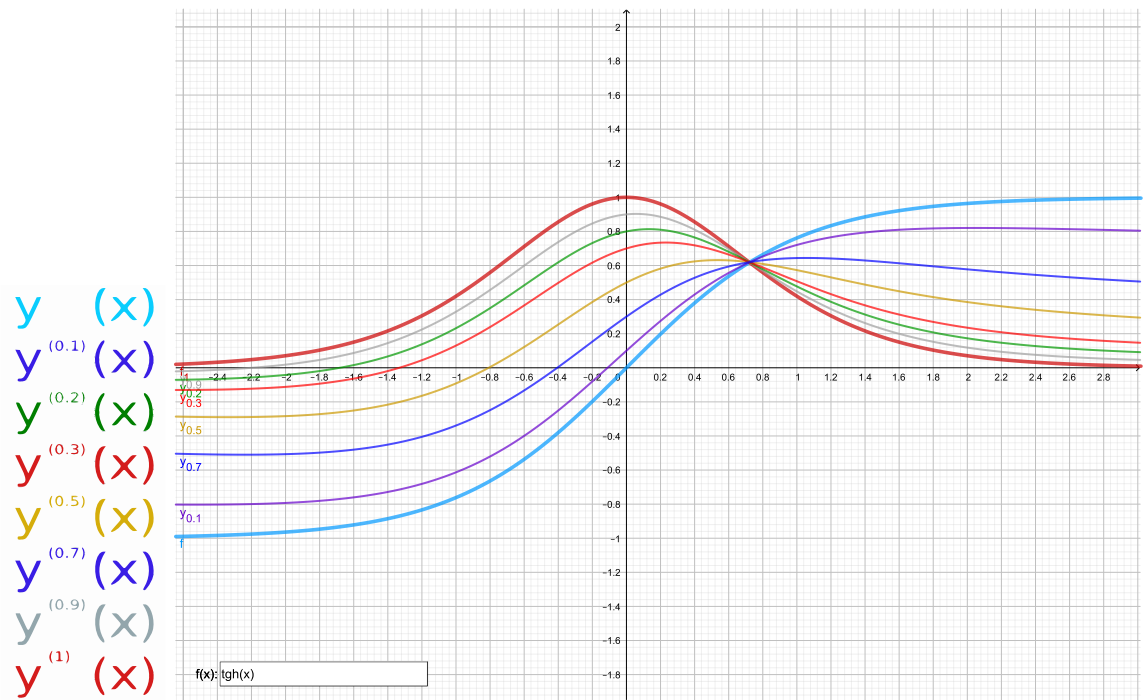
(d) ${}^{VB}D^\alpha \ln(x)$



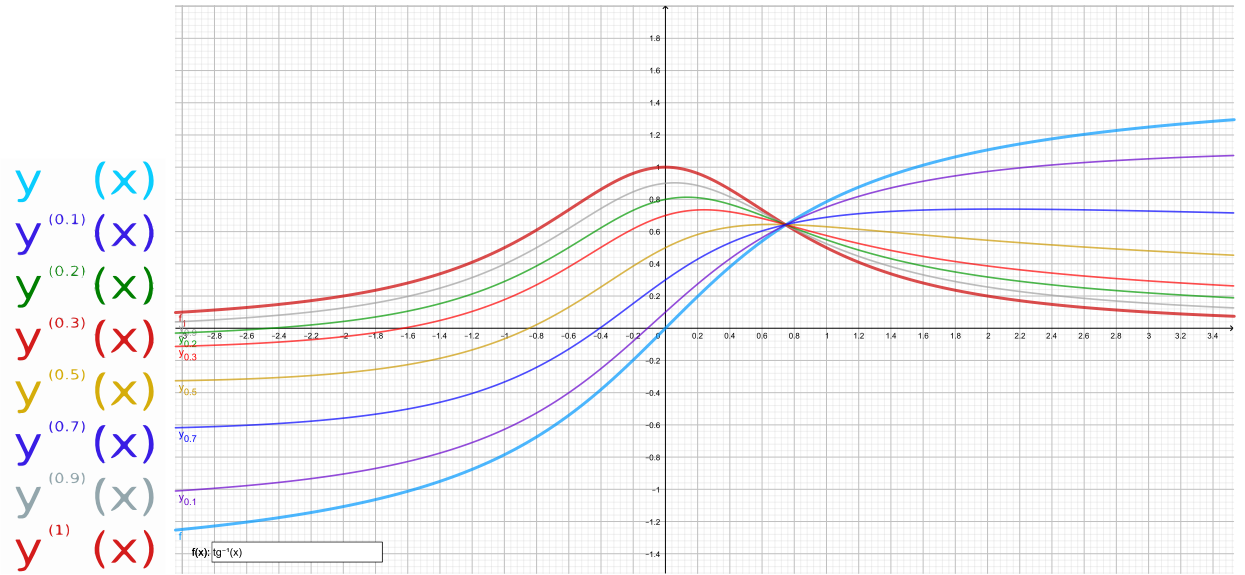
(e) ${}^{VB}D^\alpha \cosh(x)$



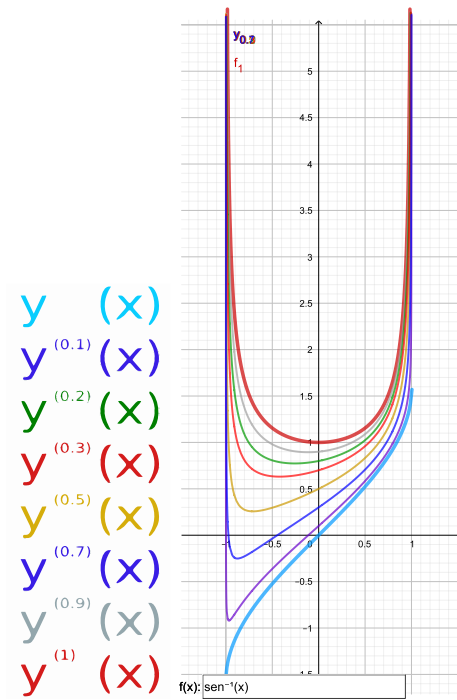
(f) ${}^{VB}D^\alpha \sinh(x)$



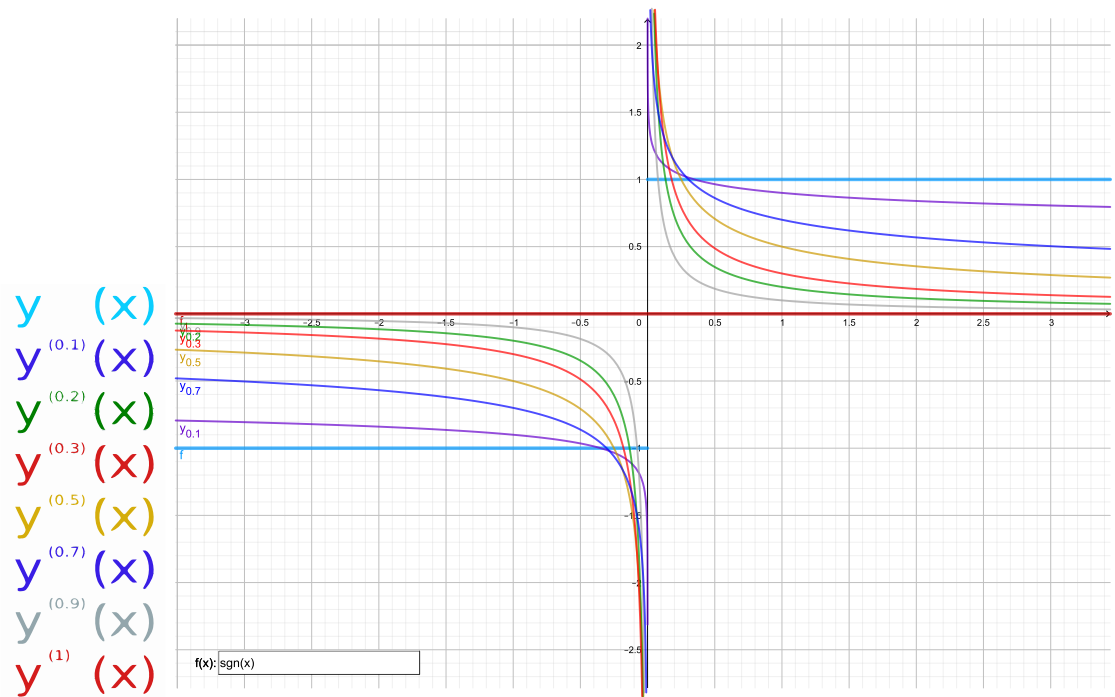
(g) ${}^{VB}D^\alpha \operatorname{tgh}(x)$



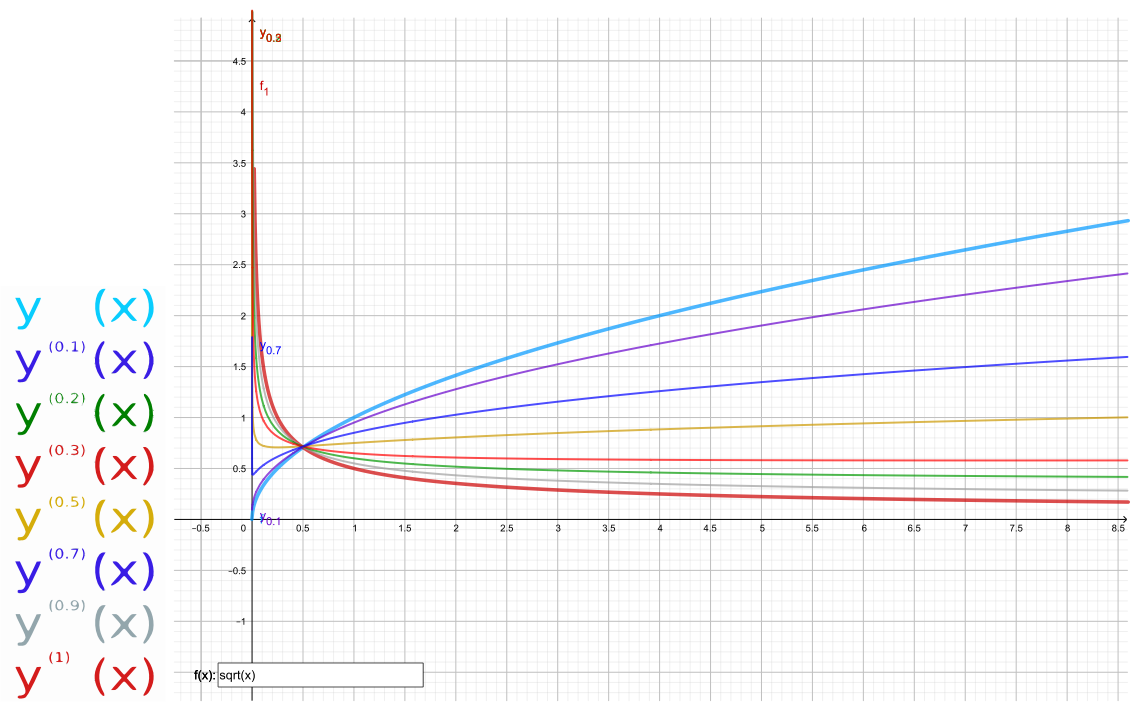
(h) ${}^{VB}D^\alpha \operatorname{arctg}(x)$



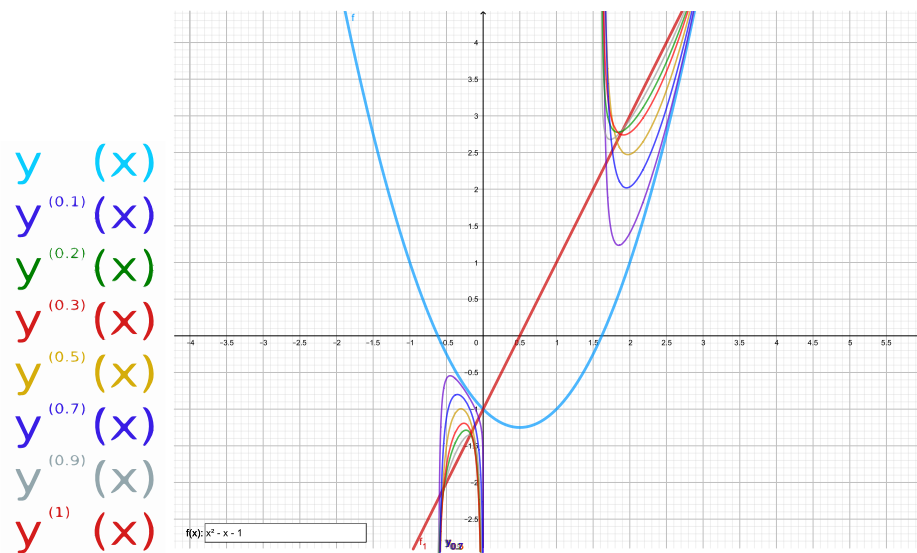
(i) ${}^V B D^\alpha \text{arsen}(x)^\alpha$



(j) ${}^V B D^\alpha \text{sgn}(x)^\alpha$



(k) ${}^V B D^\alpha x^{\frac{1}{2}}$



(l) ${}^V B D^\alpha (x^2 - x - 1)$

3.4.2. Desarrollo del método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} .$$

Para resolverlo puede pensarse como un campo vectorial $F(\bar{X}) = 0$ donde

$$F(\bar{X}) = \begin{cases} f_1(\bar{X}) = 0 \\ f_2(\bar{X}) = 0 \\ \vdots \\ f_i(\bar{X}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\bar{X}) = 0 \end{cases} = 0.$$

Por lo tanto, una aproximación lineal que se puede ver como los primeros dos términos de la serie de Taylor o como las ecuaciones de los hiper-planos tangentes a las funciones $f_i(\bar{X})$ sigue de la siguiente manera:

$$f_i(\bar{X}) \approx \nabla f_i(\bar{x}_0) \cdot \langle \bar{X} - X_0 \rangle + f(\bar{x}_0).$$

Del mismo modo, si $f_i(\bar{X}) = 0$, el sistema se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla f_1(\bar{X}_0) \cdot \langle \bar{X} - X_0 \rangle &= -f_1(\bar{x}_0) \\ \nabla f_2(\bar{X}_0) \cdot \langle \bar{X} - X_0 \rangle &= -f_2(\bar{x}_0) \\ &\vdots \\ \nabla f_n(\bar{X}_0) \cdot \langle \bar{X} - X_0 \rangle &= -f_n(\bar{x}_0) \end{aligned} ,$$

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(\bar{x}_0) \\ \nabla f_2(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\bar{x}_0) \end{bmatrix} \langle \bar{X} - \bar{x}_0 \rangle = \begin{bmatrix} -f_1(\bar{x}_0) \\ -f_2(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ -f_n(\bar{x}_0) \end{bmatrix} ,$$

$$J(F(\bar{X}))_{\bar{x}_0} \langle \bar{X} - \bar{x}_0 \rangle = F(\bar{x}_0) \quad (3.29)$$

despejando \bar{X} obtenemos,

$$\bar{X} = - \left[J(F(\bar{X}))_{\bar{x}_0} \right]^{-1} F(\bar{x}_0) + \bar{x}_0 \quad (3.30)$$

$$\bar{X} = \bar{x}_0 - [J(F(\bar{X}))_{\bar{x}_0}]^{-1} F(\bar{x}_0) \quad (3.31)$$

La ecuación anterior involucra el Jacobiano con derivadas enteras, proponemos reemplazar las derivadas enteras por derivadas fraccionarias conformes, una con el operador diferencial fraccionario de Karci (3.32) y otro con el operador fraccionario conforme Vega-Brambila (3.33) que constituyen dos aportaciones en este trabajo que se muestran a continuación.

$$\bar{X} = \bar{x}_0 - [J_{\kappa D^\alpha}(F(\bar{X}))_{\bar{x}_0}]^{-1} F(\bar{x}_0) \quad (3.32)$$

$$\bar{X} = \bar{x}_0 - [J_{VBD^\alpha}(F(\bar{x}_0))_{\bar{X}}]^{-1} F(\bar{x}_0) \quad (3.33)$$

Al iterar las ecuaciones (3.32) y (3.33) se pueden obtener los métodos iterativos presentados en (3.34) y (3.35) respectivamente.

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - [J_{\kappa D^\alpha}(F(\bar{X}))_{\bar{X}_i}]^{-1} F(\bar{X}_i) \quad (3.34)$$

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - [J_{VBD^\alpha}(F(\bar{X}))_{\bar{X}_i}]^{-1} F(\bar{X}_i) \quad (3.35)$$

Las principales ventajas de estas nuevas propuestas son que se pueden encontrar ceros complejos de polinomios utilizando condiciones iniciales reales, puede encontrar múltiples soluciones de una función con una sola condición inicial variando el parámetro α ; no se puede utilizar cuando la función es no diferenciable. En estos casos, se acota el dominio de la función para que la función sea diferenciable en ese intervalo.

Una desventaja podría ser que se tienen que calcular un número $N \times N$ de derivadas fraccionarias para un espacio de dimensión N , con la ventaja de que la derivada fraccionaria que proponemos es más sencilla de calcular que las propuestas por Riemann-Louville y Caputo, ya que se evita el proceso de integración. Por la razón anterior, se considera apropiado el método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable para resolver sistemas donde las derivadas fraccionarias parciales podrían parecer difíciles de obtener.

En la tabla 3.1 se comparan métodos iterativos, Newton-Raphson (NR), Newton Fraccionario (NF), Pseudo Newton Fraccionario (FPN) y Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM) para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones.

	NR	NF	FPN	FNRCM
Puede encontrar ceros complejos de un polinomio usando condiciones iniciales reales	No	Sí	Sí	Sí
Puede encontrar múltiples soluciones de una función con una sola condición inicial	No	Sí	Sí	Sí
Puede ser usado cuando la función no es diferenciable	No	Sí	Sí	No
Cantidad de derivadas parciales fraccionarias que necesita (Para un espacio de dimensión N)	$N \times N$	$N \times N$	N	$N \times N$
Se recomienda para resolver sistemas donde las derivadas fraccionarias parciales son difíciles de obtener de manera analítica	No	No	Sí	Sí

Tabla 3.1: Comparación de algunos métodos iterativos

[Ir al Índice](#)

Capítulo 4

Aplicaciones del método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable en paneles solares híbridos y finanzas

4.1. Paneles solares híbridos

En esta sección se presenta la primera aplicación que utiliza nuestra propuesta de método Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM) con el operador (3.34). Hemos trabajado con el equipo desarrollador del panel solar híbrido representado por el Dr. Pedro Rodrigo, que trabaja desde hace años en esta innovación. El modelo del panel solar híbrido se resume en un sistema de ecuaciones no lineales que fueron resueltas con el FNRCM y cobra relevancia ya que se resuelve un sistema no lineal por cada registro de condiciones tomadas a lo largo de un mes. Cada día se tomaban diferentes lecturas, lo cual representaba resolver un aproximado de mil sistemas de ecuaciones distintos cuyas soluciones permitieron una mayor profundidad en el análisis del sistema híbrido que ha quedado resumido en el artículo *Fractional derivative-based performance analysis of hybrid thermoelectric generator-concentrator photovoltaic system*, publicado en el journal *Applied Thermal Engineering* [De-la Vega et al., 2021].

Hemos escogido esta aplicación ya que es un desarrollo tecnológico alineado al cuidado de la casa común. Esta tecnología contribuye al buen uso de los recursos naturales que es uno de los problemas que aquejan al mundo moderno.

A continuación, describiremos los principios teóricos del diseño del panel solar híbrido desarrollado.

Los sistemas Fotovoltaicos Concentradores tienen la eficiencia de conversión más alta de entre todas las aplicaciones solares; punto de partida de esta innovación. Sin embargo, se necesita reducir su costo para competir con los sistemas fotovoltaicos tradicionales. Una manera directa es logrando que aumente su eficiencia. La hibridación con generadores termoelectricos permite recuperar parte del calor desperdiciado ($\approx 60\%$ de la energía incidente), y convertirla en electricidad, mejorando la eficiencia global. El modelo físico de un módulo termogenerador-foto-concentrador híbrido se

resume en ecuaciones no lineales. Para resolver el modelo con métodos convencionales, las condiciones iniciales deben de estar muy cerca de la solución para que puedan converger. Nuestro método para la resolución es más amigable ya que permite condiciones iniciales no tan cercanas a las soluciones.

Los sistemas fotovoltaicos concentradores que denotaremos como CPV, por sus siglas en inglés, representan un éxito en aplicaciones de energía solar por la alta eficiencia de conversión que alcanzan de manera comercial. Estos sistemas usan dispositivos ópticos para concentrar la luz solar en pequeñas células solares de unión múltiple (MJ) de alta eficiencia. Las eficiencias más altas registradas en laboratorios, para celdas mono-módulo y nivel de módulo, han alcanzado valores de 47.1 %, 43.4 % y 38.9 % respectivamente [Wiesenfarth et al., 2017, Green et al., 2019]; mientras que de manera comercial, los módulos CPV han tenido una eficiencia promedio del 30 % [Pérez-Higueras et al., 2018]. A pesar de estas altas eficiencias, los sistemas CPV tienen un Costo de Energía Nivelado (LCOE) más alto que los sistemas fotovoltaicos tradicionales que se denotará como PV. De entre las estrategias que están siendo investigadas para hacer los sistemas CPV más competitivos, se consideran el incremento del factor de concentración o el incremento de la eficiencia global. Un incremento en la eficiencia puede lograrse recuperando parte del calor desperdiciado generado en las celdas solares. De entre las estrategias para alcanzar esto podemos encontrar la hibridación con generadores térmicos o Generadores Termoeléctricos (TEGs). Así como se usa silicio como material base para el principio fotoeléctrico, se usa telurio de bismuto, Bi_2Te_3 , el cual opera bajo el efecto Seebeck para transformar el flujo de calor en electricidad [Rowe, 1995]. Los sistemas híbridos CPV-TEG están en etapa de investigación y se han reportado varios prototipos en nivel laboratorio [Beeri et al., 2015, Tamaki et al., 2017, Kil et al., 2017], aunque actualmente están lejos de presentar los beneficios esperados.

Como en todo dispositivo generador, el modelado físico del comportamiento del módulo generador híbrido CPV-TEG es esencial para optimizar la estructura y predecir su desempeño. Se han propuesto varios modelos con base en dos enfoques: conducción de calor de manera unidimensional (1D) [10-12] y aquel de elemento finito en tres dimensiones (3D) [13,14]. Los modelos 3D son más adecuados para la optimización; sin embargo, para esto se necesita usar recursos computacionales de manera extensiva. Por otra parte, los modelos 1D, a pesar de su simplificación, permiten el análisis de series más grandes de datos en condiciones atmosféricas cambiantes, como el cálculo del aprovechamiento de energía anual [15], por mencionar un ejemplo.

Un modelo del módulo híbrido CPV-TEG de 1D, desarrollado por el equipo del Dr. Pedro Rodrigo [12,15], nos fue presentado con la base de datos atmosféricos (los cuales detallaremos en el siguiente apartado), tomados durante un mes, que permiten analizar las eficiencias del CPV-TEG en condiciones atmosféricas cambiantes a lo largo del día.

4.1.1. Datos atmosféricos

En 2016, se llevó a cabo un muestreo a lo largo de un mes en el Centro de Estudios Avanzados en Ciencias de la Tierra, Energía y Medio Ambiente (CEACTEMA), de la Universidad de Jaen, parte sur de España (37.3°N, -3.3°E). En este muestreo, se usó una estación meteorológica con un sensor de temperatura y un pirheliómetro para registrar la temperatura ambiente y el ancho de banda de la Irradiancia Normal Directa (DNI) en intervalos de 10 minutos. Simultáneamente, un dispositivo Medidor de Radiación SolarSIM-D2 de Spectrafy [23] fue usado para medir y registrar el espectro directo. Este instrumento es capaz de medir el DNI en seis bandas de longitud de onda y combina esta información con modelos para determinar la DNI espectralmente resuelta a lo largo de un rango de 280 a 4000 nm en cualquier condición climatológica.

En ese estudio, el equipo del Dr. Pedro Rodrigo consideró una celda solar (con energías de bandgap de 1.9, 1.4 y 0.7 eV, respectivamente), con celosías a juego de GaIn/GaInAs/Ge. El Factor

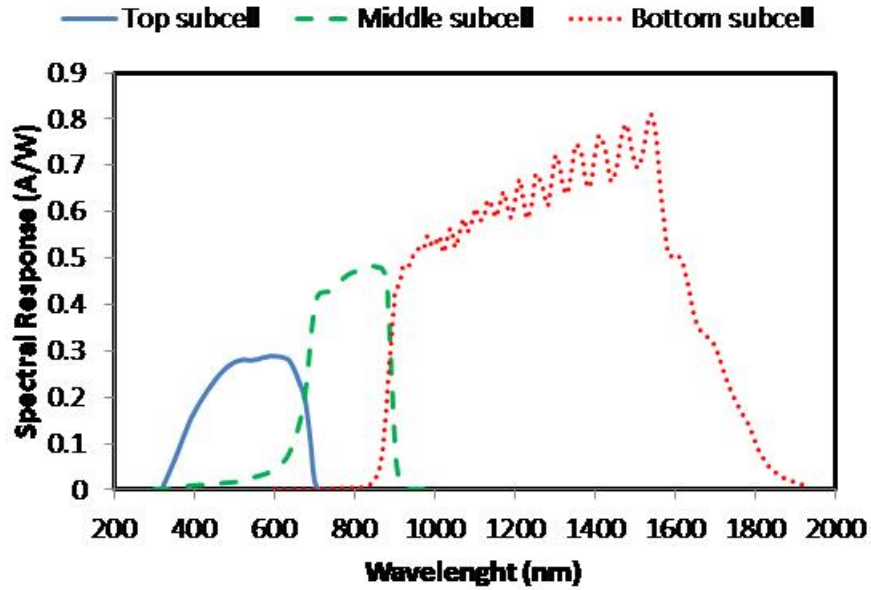


Figura 4.1: Respuesta espectral en las subceldas superior, media e inferior para las células de GaIn/GaInAs/Ge que forman la celda solar

Espectral (SF) será usado como un índice para cuantificar el impacto espectral en la celda solar MJ. Este índice se define como [24]:

$$SF = \frac{\min_j(\int E(\lambda) \cdot SR_j(\lambda) \cdot \lambda)}{\min_j(\int E^*(\lambda) \cdot SR_j(\lambda) \cdot d\lambda)} \cdot \frac{\int E^*(\lambda) \cdot d\lambda}{\int E(\lambda) \cdot d\lambda} \quad (4.1)$$

Donde $E(\lambda)$ es el espectro incidente como una función de λ como longitud de onda y $SR(\lambda)$ siendo la respuesta espectral de la subcelda. El subíndice j se refiere a cada subcelda en el arreglo (superior, medio o inferior), y el superíndice $*$ se refiere a la referencia espectral AM15.d ASTMG-173-03 [25]. El SR para la celda solar de triple unión se muestra en la figura 4.1. De acuerdo con la ecuación (4.1), se calculó el SF propio del espectro en cada set de datos. Los histogramas de la banda ancha del DNI, la temperatura ambiente y el SF obtenidos en la campaña experimental de un mes se muestran en la figura 4.2. El SF de cada uno de los datos de la hoja de datos fue calculado de acuerdo a la ecuación (4.1) y se muestran en la figura 4.2.

4.1.2. Descripción de paneles solares híbridos

La estructura de un receptor solar CPV-TEG considerada se puede observar en la figura 4.3. La celda solar está soldada en una lámina de cobre de mayor área. Debajo de la capa de cobre se usa un TEG para convertir parte del calor desperdiciado en electricidad. El TEG es enfriado con un disipador de calor de aletas. Por encima de la lámina de cobre se colocó una capa de aislante para prevenir que el flujo de calor escape en dirección ascendente hacia el receptor solar.

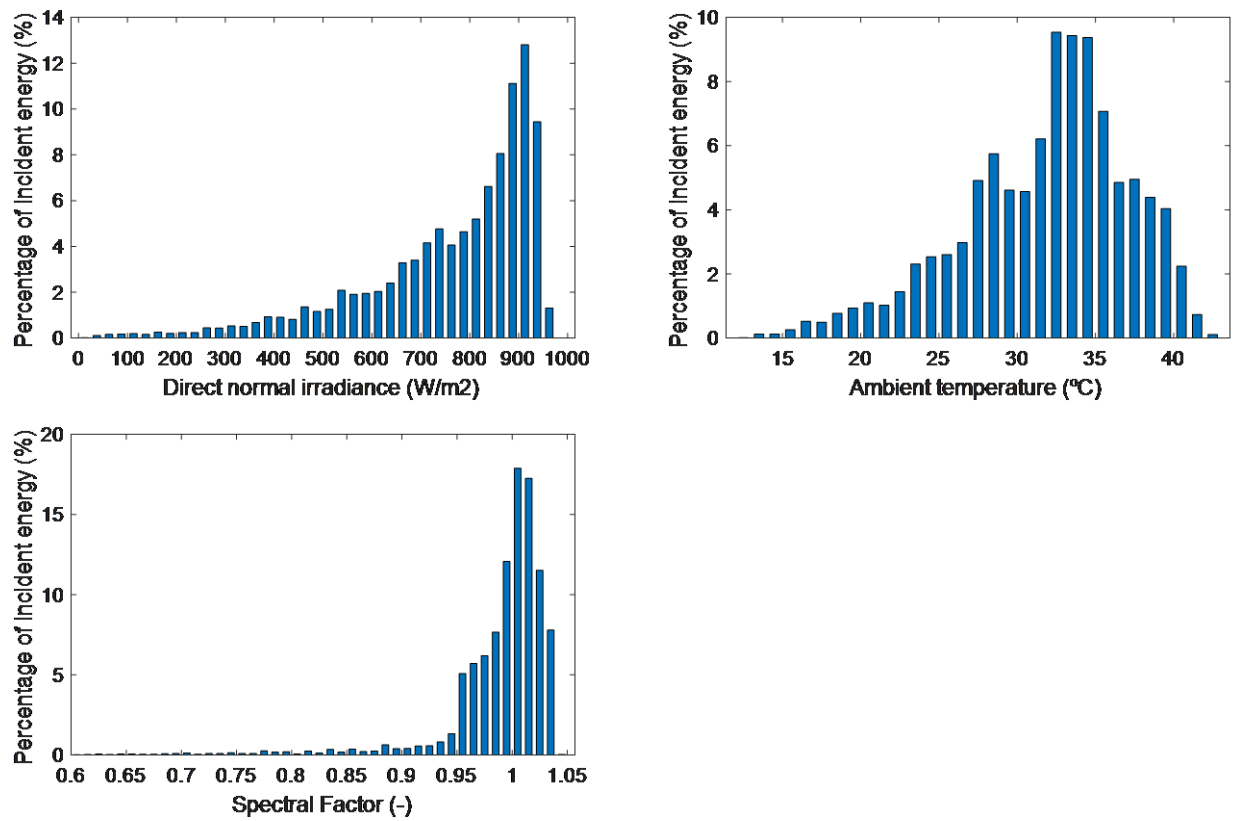


Figura 4.2: Histogramas de DNI, temperatura ambiente y SF registrados durante la campaña experimental de un mes en Jaén, Sur de España

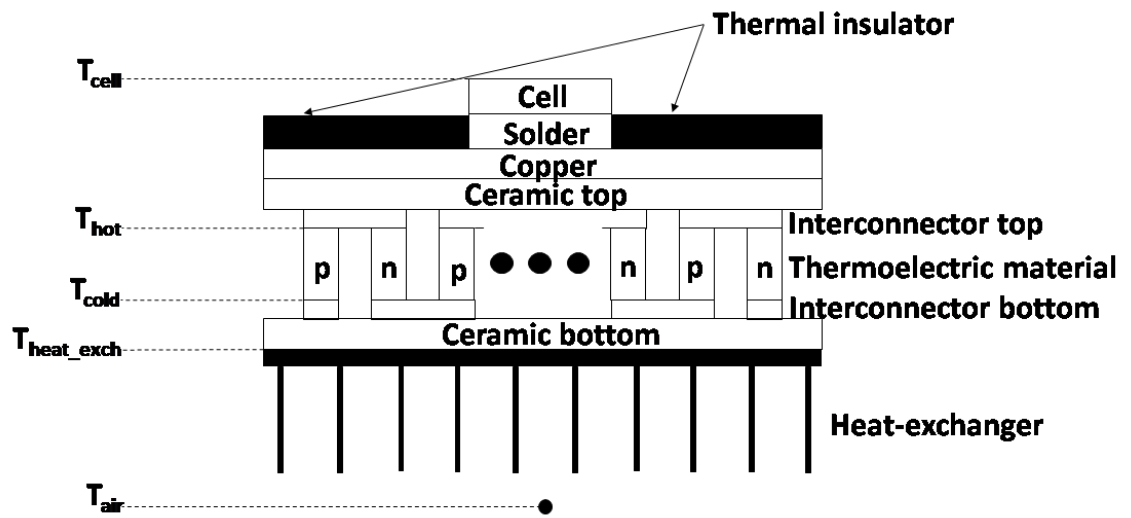


Figura 4.3: Estructura del receptor solar híbrido CVP-TEG enfriado de manera pasiva citeEnergia12

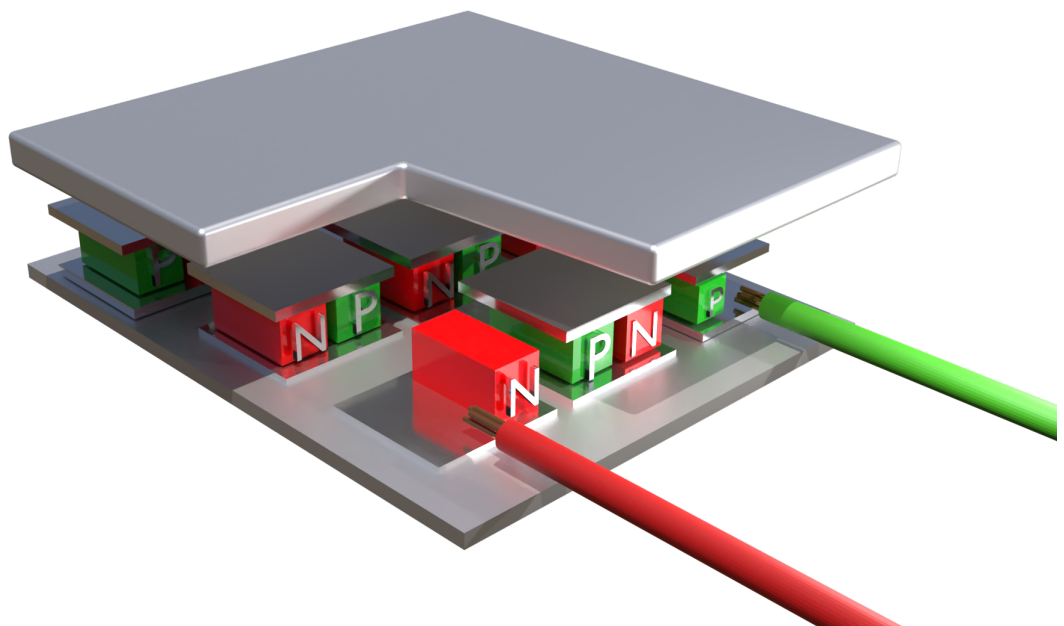


Figura 4.4: Vista ilustrativa de la estructura de un dispositivo termogenerador

4.1.3. Descripción del efecto-fotoeléctrico y termo-eléctrico

En 1905, Einstein trata el efecto fotoeléctrico desde un punto de vista nunca antes visto [Einstein, 1905]. Previamente, la luz era concebida como un objeto con características de onda cuya energía se disipaba en el espacio de acuerdo a los principios de la física clásica Newtoniana y las teorías de Maxwell. Einstein propone un cambio al paradigma, hasta entonces establecido, pensando que la energía de un haz de luz no se distribuye en el espacio creciente de manera uniforme, sino que se distribuye de manera discontinua en el espacio a manera de paquetes que nombra quanta.

Esta perspectiva novedosa permitió abordar el efecto fotoeléctrico (fenómeno de la liberación de electrones por la absorción de los quanta de luz), observado en el fenómeno de la emisión de rayos catódicos a través de la iluminación de cuerpos sólidos (en un subtema traducido como *Concerning the Emission of Cathode Rays Through Illumination of Solid Bodies* del artículo publicado en 1905 [Einstein, 1905]). Allí explica que los quanta penetran la superficie del cuerpo y su energía se transforma, al menos de manera parcial, en energía cinética para los electrones. Esta energía cinética extra, impresa en el electrón, servirá para que el electrón se libere de su órbita y así se genere una corriente eléctrica. Este principio planteado por Einstein actualmente se aprovecha para la construcción de celdas solares. Se ha encontrado que el material más adecuado para este uso es el silicio (Si).

El efecto fotoeléctrico convierte luz en corriente eléctrica. Para entender la conversión de calor en energía eléctrica, describiremos el efecto Seebeck. Se le llama efecto absoluto Seebeck al voltaje generado dentro de un material conductor aislado, cuando se le aplica un gradiente de temperatura. La manera más clara de visualizarlo sería uniendo eléctricamente dos conductores disímiles y luego aplicando un gradiente de temperatura a lo largo del objeto formado y se encontrará un voltaje en las orillas no unidas del objeto [Rowe, 1995]. El material que se usa para aprovechar este principio es el telurio de bismuto (BiTe).

4.1.4. Propuesta de problema y ecuaciones

Un panel solar híbrido utiliza la tecnología desarrollada en generadores termoelectrónicos, que aprovechan el efecto Seebeck, para aumentar la eficiencia de la producción de energía eléctrica a partir de energía solar. El dispositivo generador híbrido que estaremos tomando en cuenta fue el analizado por los investigadores P.M. Rodrigo, A. Valeria, E.F. Fernández y F.M. Almonacid [Rodrigo et al., 2019] y cuyo esquema se puede observar en la figura 4.3.

El panel está compuesto por una celda solar que aprovecha la incidencia de energía del sol y cuenta con tecnología de concentración. Al recibir la radiación solar, la celda se calienta a una temperatura llamada T_{cell} (temperatura de la celda). El calor generado por esta temperatura de la celda es conducido hacia una placa de cobre a través de soldadura. La placa de cobre es usada para distribuir uniformemente la temperatura en toda su superficie por su alta capacidad de conducción térmica. La superficie de la placa de cobre que sobresale de la celda solar se recubre con un aislante térmico. Esta capa aislante evita pérdidas de temperatura.

Debajo de la placa de cobre podemos observar un arreglo de semiconductores tipo P y tipo N, de manera alternada, donde se une un lado de los semiconductores, como se ve en la imagen, formando el termogenerador. Una vista más explicativa de este dispositivo se puede encontrar en la figura 4.4. El dispositivo termoelectrónico que se ha usado en [Rodrigo et al., 2019] está propuesto con un material de telurio de bismuto (BiTe). El generador ha sido colocado entre dos placas cerámicas que evitan pérdidas de temperatura. El gradiente generado entre las placas de cerámica con las variables T_{hot} y T_{cold} es el que determina la eficiencia del generador térmico, siendo esta propuesta el núcleo de la innovación pensada para los CPV-TEGs, ya que se genera energía eléctrica adicional incrementando la eficiencia del dispositivo.

Se puede observar que en la parte final del dispositivo termo generador se colocó un disipador de calor con una temperatura $T_{heat-sink}$, que está en contacto con el aire a una temperatura más baja, T_{air} , de tal manera que se pueda mantener el gradiente entre T_{hot} y T_{cold} . Según la investigación de Rodrigo et al [Rodrigo et al., 2019], conviene enfriar los paneles de manera pasiva (con el disipador y la temperatura del aire T_{air}), ya que es el método más barato y confiable.

4.1.5. Modelado matemático del panel solar

Sistema de ecuaciones no lineales

El modelo del panel solar propuesto con anterioridad considera como variables de diseño T_{cell} , T_{hot} , T_{cold} y las eficiencias de la celda solar denominada η_{cell} y del dispositivo termogenerador denominada η_{TEG} , por lo que al modelar se obtendrá un sistema no lineal de cinco ecuaciones: tres por el gradiente generado entre los nodos de temperatura desde T_{cell} hasta T_{air} y dos por las eficiencias.

Este modelado resume las ecuaciones en (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6). Los detalles de este desarrollo se pueden consultar en [Rodrigo et al., 2019] donde las ecuaciones de las temperaturas fueron deducidas de la ley para la conducción de temperatura de Fourier. Las ecuaciones del modelo se muestran a continuación.

$$T_{cell} - T_{hot} = \eta_{opt} \cdot C_g \cdot DNI \cdot (1 - \eta_{cell}) \left[r_{cell} + r_{sol} + A_{cell} \cdot \left(\frac{r_{cop} + r_{cer}}{A_{TEG}} + \frac{r_{intercon}}{0.5 \cdot \sqrt{f} \cdot A_{TEG} \cdot (b \cdot \sqrt{f} + \sqrt{A_{TEG}})} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$T_{hot} - T_{cold} = \eta_{opt} \cdot C_g \cdot DNI \cdot (1 - \eta_{cell}) \cdot (1 - \eta_{TEG}) \cdot \frac{A_{cell}}{f \cdot A_{TEG}} \cdot \frac{l}{k_{TEG}} \quad (4.3)$$

$$T_{cold} - T_{air} = \eta_{opt} \cdot C_g \cdot DNI \cdot (1 - \eta_{cell}) \cdot (1 - \eta_{TEG}) \cdot A_{cell} \cdot \left(\frac{r_{intercon}}{0.5 \cdot \sqrt{f} \cdot A_{TEG} \cdot (b \cdot \sqrt{f} + \sqrt{A_{TEG}})} + \frac{r_{cer}}{A_{TEG}} + R_{heat\,exch} \right) \quad (4.4)$$

$$\eta_{cell} = \eta_{cell,ref} \cdot SF \cdot [1 - \gamma_{cell} \cdot (T_{cell} - 25C)] \quad (4.5)$$

$$\eta_{TEG} = \left(1 - \frac{T_{cold} + 273.15}{T_{hot} + 273.15} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 - ZT} - 1}{\sqrt{1 - ZT} + \frac{T_{cold} + 273.15}{T_{hot} + 273.15}} \quad (4.6)$$

Los parámetros atmosféricos de entrada son el DNI, la temperatura del aire T_{air} y el SF. El resto de parámetros del modelo tienen valores conocidos, que son tomados del receptor solar analizado en [Rodrigo et al., 2019]. La nomenclatura de los parámetros del modelo, así como los valores numéricos usados en este estudio están indicados en la tabla 4.1.

4.1.6. Solución del sistema por derivada fraccionaria conforme

Como se ha comentado, el reto fue resolver el sistema no lineal anterior aproximadamente mil veces, donde cada sistema representa las condiciones atmosféricas tomadas cada diez minutos durante un mes (DNI, SF y T_{air}), utilizando nuestro método de derivada fraccionaria conforme. Se pudieron obtener los resultados de una manera rápida y sin preocupación por la cercanía de las condiciones

<i>Parámetro</i>	<i>Descripción</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
η_{opt}	<i>Eficiencia óptica del concentrador</i>	0.85	<i>Por unidad</i>
C_g	<i>Concentración geométrica</i>	1500	<i>Soles</i>
r_{cell}	<i>Resistencia térmica de la celda solar</i>	$0.3e - 6$	$\frac{K \cdot m^2}{W}$
r_{sol}	<i>Resistencia térmica de la capa de soldadura</i>	$1.603e - 6$	$\frac{K \cdot m^2}{W}$
r_{cop}	<i>Resistencia térmica de la capa de cobre</i>	$7.5e - 7$	$\frac{K \cdot m^2}{W}$
r_{cer}	<i>Resistencia térmica de la capa de cerámica</i>	$8.0e - 6$	$\frac{K \cdot m^2}{W}$
$r_{intercon}$	<i>Resistencia térmica del interconector metálico</i>	$2.331e - 7$	$\frac{K \cdot m^2}{W}$
A_{cell}	<i>Área de la celda solar</i>	$9.0e - 6$	m^2
A_{TEG}	<i>Área termoelectrica</i>	$50.4e - 6$	m^2
f	<i>Factor de llenado del TEG</i>	0.7	<i>Por unidad</i>
b	<i>Ancho del termoelemento</i>	$0.5e - 3$	m
l	<i>Largo del termoelemento</i>	$0.5e - 3m$	
k_{TEG}	<i>Conducción termal TE</i>	1.5	$\frac{W}{m \cdot K}$
$R_{heat_{exch}}$	<i>Resistencia térmica absoluta del disipador</i>	0.5	$\frac{K}{W}$
$\eta_{cell,ref}$	<i>Eficiencia de la celda solar en condiciones de referencia</i>	0.43	<i>Por unidad</i>
γ_{cell}	<i>Coficiente térmico de eficiencia de la celda solar</i>	0.44446	C^{-1}
ZT	<i>Figura de mérito del TEG</i>	1	<i>Adimensional</i>

Tabla 4.1: Tabla de parámetros

iniciales a las soluciones de cada sistema. Esta solución fue obtenida programando nuestro modelo en MatLab.

A continuación, se presentan en la tabla 4.2 los resultados del desempeño del modelo para obtener las soluciones. Se puede observar que para tres niveles de DNI, alto, medio y bajo, se pudo obtener la solución con la misma condición inicial, la misma α y las mismas iteraciones N que son muy bajas. Estas soluciones se compararon con el método de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville o Pseudo Newton Fraccionario los cuales se presentan en la tabla 4.3 donde las soluciones de ambos métodos son prácticamente idénticas.

<i>Condiciones</i>	α	X_0	$\ f(X_0)\ $	X_N
<i>DNIALto</i>	0.9450	[86.0, 72.0, 35.0, 40.00, 2.00]	145.06	[83.2, 79.0, 23.9, 41.84, 2.87]
<i>DNIMedio</i>	0.9450	[86.0, 72.0, 35.0, 40.00, 2.00]	144.86	[70.6, 67.3, 23.1, 40.41, 2.35]
<i>DNIBajo</i>	0.9450	[86.0, 72.0, 35.0, 40.00, 2.00]	145.97	[53.3, 51.2, 22.1, 31.83, 1.60]
		$\ X_N - X_{N-1}\ $	$\ f(X_N)\ $	N
		$1.3149e - 3$	$1.2552e - 3$	9
		$1.8368e - 3$	$1.0968e - 3$	9
		$0.3237e - 3$	$2.2618e - 3$	9

Tabla 4.2: Resultados del método FNRCM para tres condiciones analizadas, donde: α es el orden de la derivada; X es el vector independiente de variables; $f(X)$ es el modelo de la función; 0 es la condición inicial; N es el número de iteraciones.

A continuación se presentan algunas gráficas que se obtienen gracias a la solución de los cerca

<i>Condiciones</i>	α	X_0	$\ f(X_0)\ $	X_N
<i>DNIAlto</i>	1.0661	[82.6, 78.6, 27.2, 43.00, 2.00]	4.5347	[83.0, 78.8, 23.9, 41.85, 2.86]
<i>DNIMedio</i>	1.0541	[69.6, 67.3, 24.1, 41.00, 3.00]	1.5000	[70.4, 67.1, 23.1, 40.42, 2.34]
<i>DNIBajo</i>	1.0391	[53.7, 50.2, 19.6, 25.00, 3.00]	7.0300	[53.3, 51.1, 22.1, 31.83, 1.59]

$\ X_N - X_{N-1}\ $	$\ f(X_N)\ $	N
$3.9032e - 3$	$9.4352e - 3$	2959
$6.9000e - 3$	$9.1900e - 3$	4465
$2.4200e - 3$	$9.9700e - 3$	5265

Tabla 4.3: Resultados del método de Riemann-Liouville para tres condiciones analizadas, donde: α es el orden de la derivada; X es el vector independiente de variables; $f(X)$ es el modelo de la función; 0 es la condición inicial; N es el número de iteraciones.

de mil sistemas de ecuaciones no lineales del modelo híbrido CPV-TEG que aportan para el análisis del diseño.

Una gráfica presenta la variación de la eficiencia global η_G durante los treinta días de la recopilación de datos. La eficiencia máxima se alcanza a las primeras horas de la mañana, contrario a la noción intuitiva que sería pensar en la máxima eficiencia con la máxima cantidad de radiación DNI en las horas medias de la tarde. Se puede observar que hubo perturbaciones los días 15, 16, y 28-29.

En la figura 4.5 se presentan las tres eficiencias del dispositivo CPV-TEG (η_G , η_{CPV} , η_{TEG}); en el eje del lado derecho se encuentra la escala para las eficiencias global y CPV, y en el eje izquierdo la escala correspondiente a la eficiencia del dispositivo TEG, las cuales se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones no lineales con nuestro método FNRCM, correspondientes a las condiciones iniciales del periodo de un día. Se hace notar que la eficiencia del panel baja conforme la temperatura incrementa al transcurrir el día; se observan dos máximos y un mínimo. Pedro Rodrigo ya ha comentado que estas variaciones son causadas por variaciones en la temperatura de la celda. Los máximos se dan al inicio de la mañana y un par de horas después del mediodía. Se presenta un sólo mínimo a la hora de máxima temperatura de la celda. Se puede observar que los puntos de inflexión coinciden con los máximos y se aprecia la simetría par respecto al mínimo. Esta gráfica es una buena referencia para futuras modificaciones al prototipo con el objetivo de incrementar la eficiencia global. Por otro lado, se observa la eficiencia del dispositivo TEG, que alcanza un sólo máximo en el día, sin cambios en su concavidad.

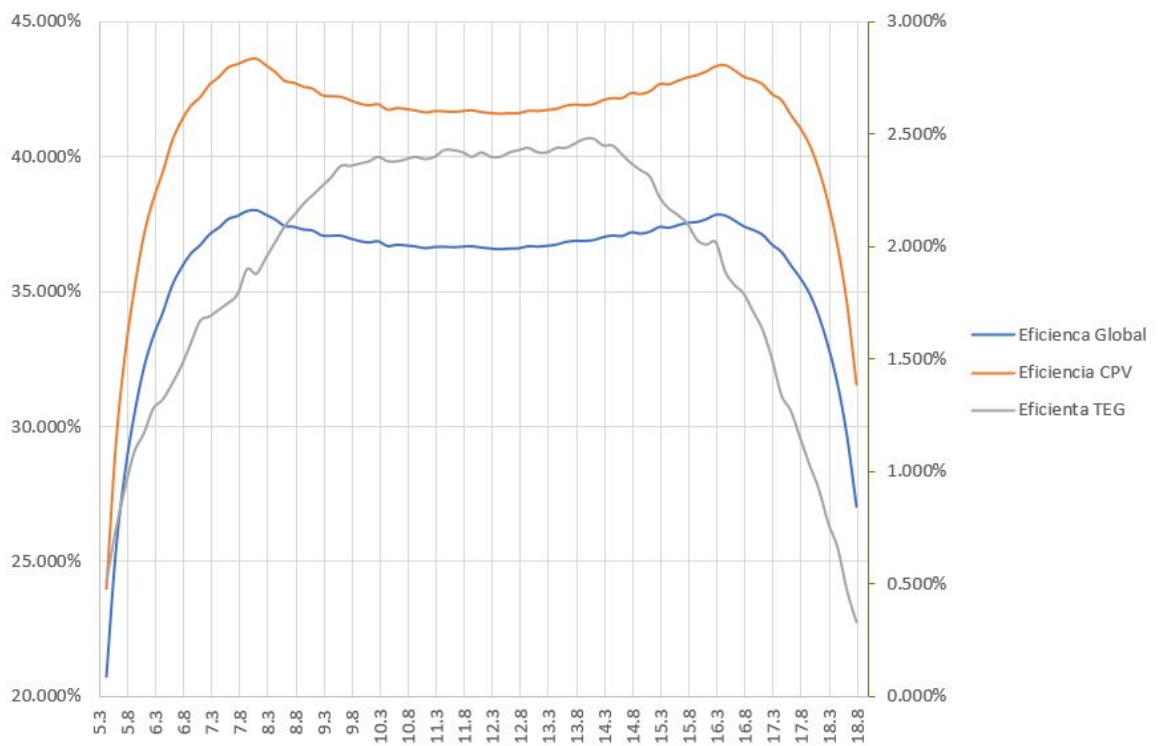


Figura 4.5: Gráfica de los datos obtenidos en el día 8. Las gráficas de eficiencia del dispositivo CPV y la eficiencia global corresponden al eje de la izquierda, mientras que la gráfica de la eficiencia del dispositivo TEG está con respecto a la escala del eje de la derecha.

Variación de eficiencia global del CPV-TEG a lo largo de 30 días

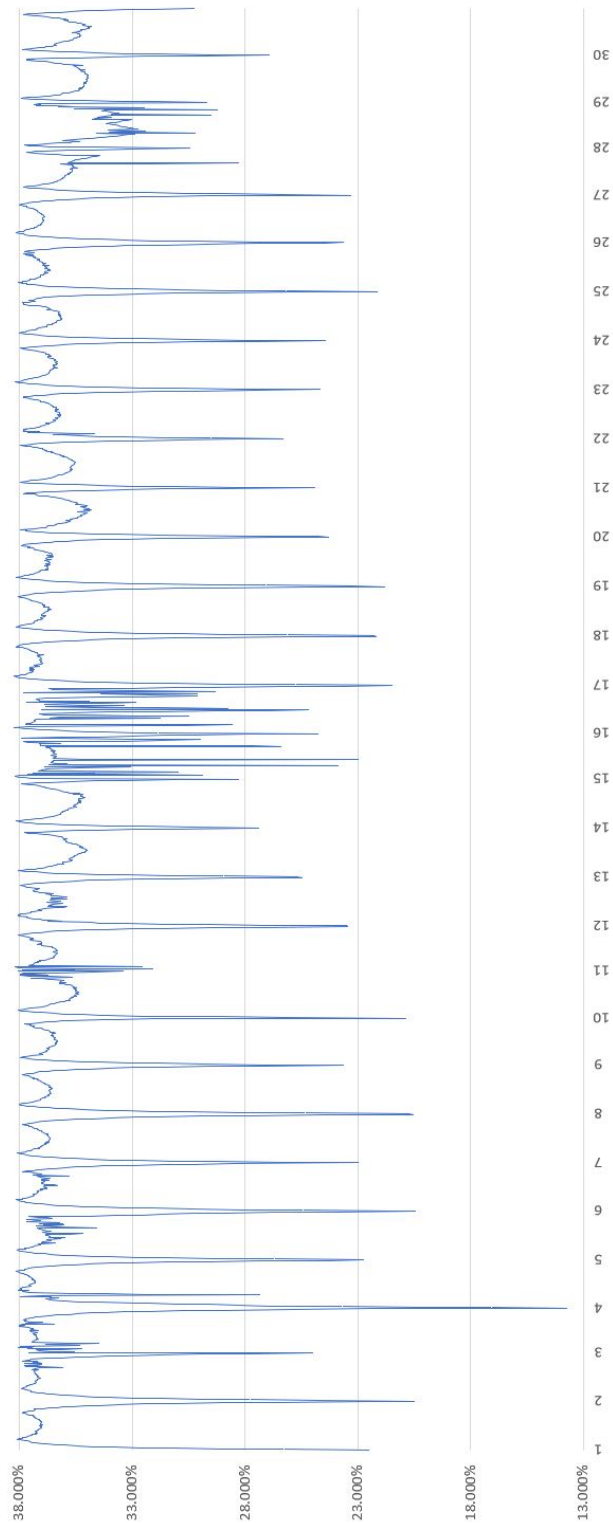


Figura 4.6: Gráfica de la eficiencia global del dispositivo CPV-TEG

Eficiencia del dispositivo CPV a lo largo de 30 días

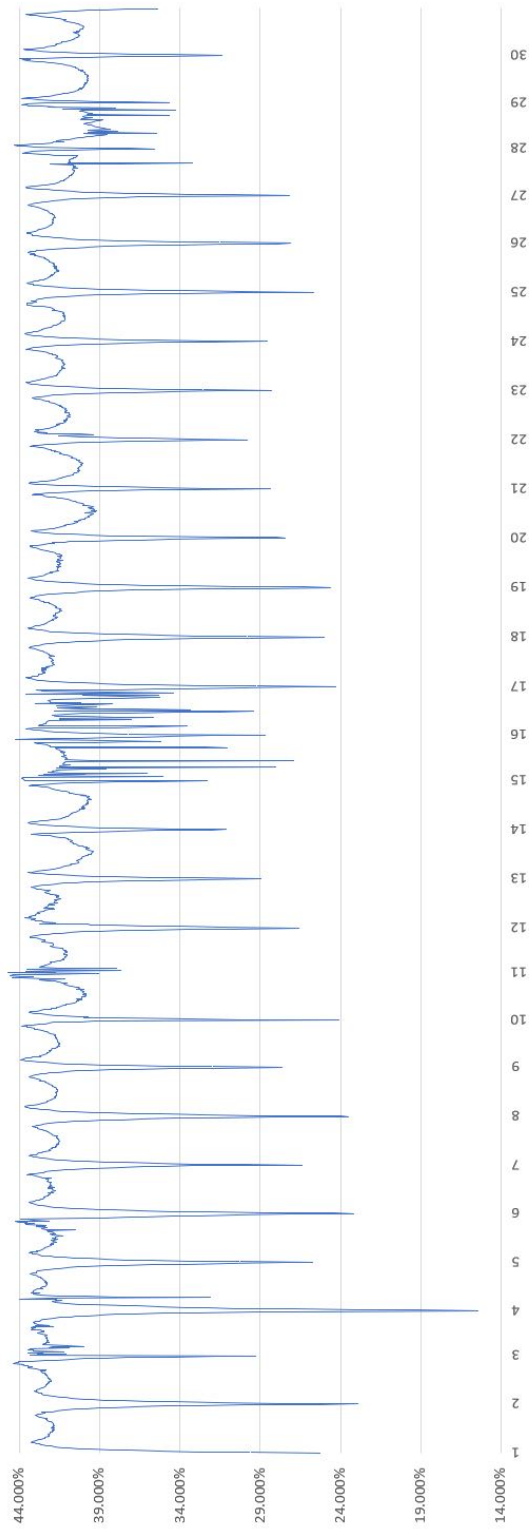


Figura 4.7: Gráfica de la eficiencia global del dispositivo CPV

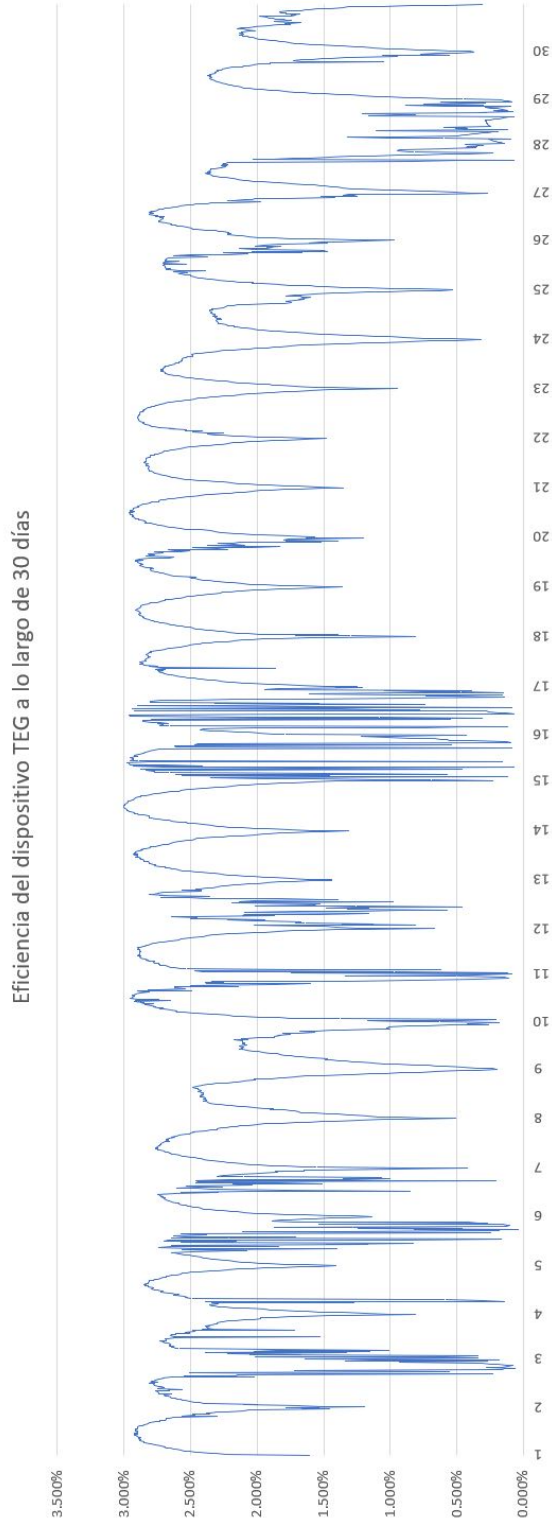


Figura 4.8: Gráfica de la eficiencia global del dispositivo TEG

4.2. Solución del modelo de Tauer¹ de análisis de opciones reales mediante el enfoque FNRCM

Cuando un productor está evaluando un proyecto, es importante considerar cómo la incertidumbre resulta una variable importante en esta época de COVID, dado que los horizontes de tiempo a los que llamamos corto, mediano y largo plazo se acortan a medida que la incertidumbre crece. Esta aplicación resuelve un problema de inversión tecnológica en el sector agroindustrial. Se necesita decidir dada una inversión inicial en tecnología y tomando en cuenta los resultados en un horizonte de tiempo t , si detener el proyecto o seguir invirtiendo.

El modelado de este problema se hace tomando como base que la inversión tecnológica tiene un comportamiento Browniano. En el siguiente apartado, se detalla el modelado que se resume en un sistema de cuatro ecuaciones no lineales que hemos resuelto con nuestro método propuesto FNRCM.

Asumimos que la inversión en tecnología influye en la capacidad de producción y ésta genera necesariamente gastos que se conocen como *sunk costs*. Desde otra perspectiva, el productor puede estimar su producción tomando como parámetros los precios del bien producido, costos de su producto y el rendimiento de su inversión. Sin embargo, estos valores cambian a lo largo del tiempo debido a su volatilidad y más en tiempos de incertidumbre. Por esto, los productores se enfrentan a la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre. La teoría sobre inversiones, que se tomó como base en estos escenarios, la presenta Dixit en [Dixit and Pindyck, 1994, Dixit, 1989] y propone un modelo que determina los puntos en donde debería reinvertir (expandir), o terminar el proyecto (cerrar la producción). En el siguiente apartado se explica el modelado.

4.2.1. Modelo económico-financiero en tiempos de incertidumbre

El modelado financiero que presentaremos parte de la consideración del ingreso como movimiento Browniano y se ha desarrollado más a fondo de acuerdo con las aportaciones hechas por Dixit y Pindyck [Dixit and Pindyck, 1994], Tauer [Tauer, 2004] y Brambila [Brambila Paz, 2011]:

$$dI = (\mu dt + \sigma dW) I, \quad (4.7)$$

donde:

- I : Ingresos,
- μ : Promedio del precio del bien a producir,
- σ : Desviación estandar del precio del bien a producir,
- dt : Incremento en el tiempo,
- dW : Variable que sigue de un proceso de Winner, con $N \rightarrow (0, dt)$

Los datos μ y σ , que son característicos del bien a producir, se obtienen fácilmente en una búsqueda en medios electrónicos. El ingreso (I) tiene una distribución Movimiento geométrico Browniano en su forma diferencial. Un ejemplo de la gráfica de movimiento Browniano unidimensional se puede ver en la figura 4.9.

¹ [Tauer, 2004]

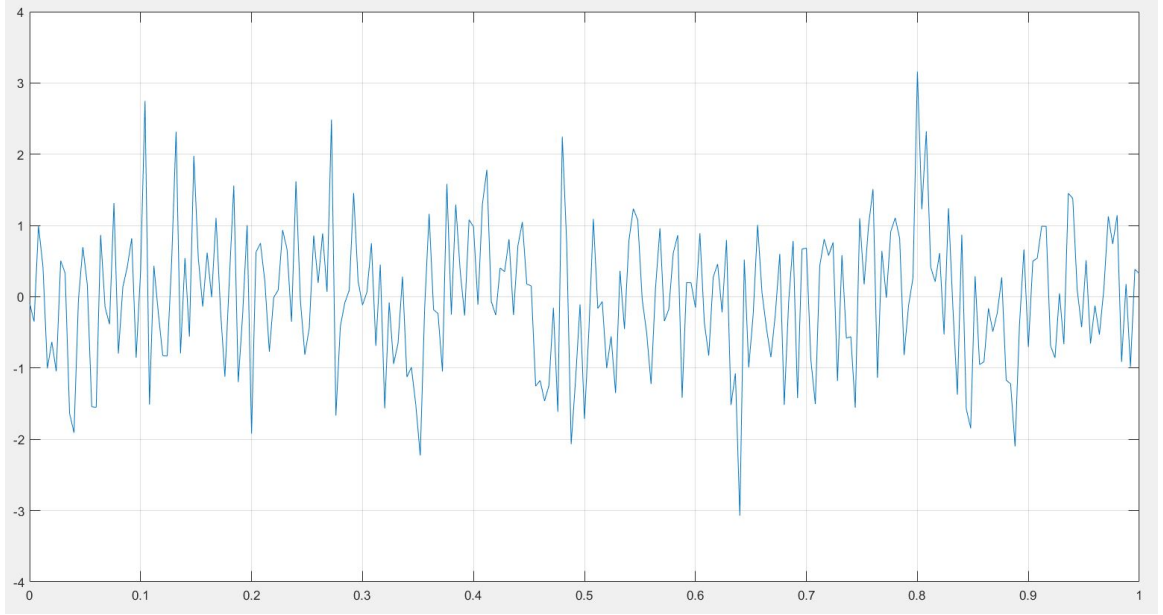


Figura 4.9: Ejemplo de movimiento Browniano en una dimensión

Función complementaria del valor del proyecto

Dixit y Pindyck [Dixit and Pindyck, 1994] desarrollaron (en 1994) un modelo de entrada y salida de opciones que expresa a $V(I, t)$ como el valor de la opción V , con la inversión I , en el tiempo t . Al expresar el dV en una serie de Taylor con variables I y t tenemos que:

$$dV = V(I_0, t_0) + \frac{\partial V}{\partial I} dI + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} (dI)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial V}{\partial t} dI dt \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 \right] \dots, \quad (4.8)$$

al sustituir 4.7 en 4.8 y considerando que $V(I_0, t_0) = 0$ y usando los términos hasta el orden 2, se obtiene:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial I} (\mu I dt + \sigma I dW) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} (\mu I dt + \sigma I dW)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial V}{\partial t} (\mu I dt + \sigma I dW) dt \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 \right], \quad (4.9)$$

desarrollando,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial I} (\mu I dt + \sigma I dW) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} (\mu^2 I^2 dt^2 + 2\mu\sigma I^2 dt dW + \sigma^2 I^2 dW^2) + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial V}{\partial t} (\mu I dt + \sigma I dW) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 \quad (4.10)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial I} \mu I dt + \frac{\partial V}{\partial I} \sigma I dW + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} \mu^2 I^2 dt^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} \mu \sigma I^2 dt dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} \sigma^2 I^2 dW^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial t} \mu I dt^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial t} \sigma I dW dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 \quad (4.11)$$

	dt	dW_{it}	dW_{jt}
dt	0	0	0
dW_{it}	0	dt	$\rho_{ij} dt$
dW_{jt}	0	$\rho_{ij} dt$	dt

Tabla 4.4: Donde $dW_{i,j}$ son diferenciales de Procesos de Wiener o Movimientos Geométricos Brownianos y ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre dW_{it} y dW_{jt} .

Utilizando la tabla 4.4 de multiplicación para la diferenciación estocástica publicada en [Martínez Palacios, 2008] [Martínez Palacios, 2012] obtenemos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial I} \mu I dt + \frac{\partial V}{\partial I} \sigma I dW + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} \sigma^2 I^2 dt. \quad (4.12)$$

Agrupando dt y dW resulta:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial I} \mu I + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} \sigma^2 I^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial I} \sigma I dW. \quad (4.13)$$

Al ser este un problema con un horizonte de tiempo infinito entonces la variable t no es una variable de decisión y por lo tanto la derivada $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ [Tauer, 2004].

Denotando:

$$\frac{\partial V}{\partial I} = V^{(1)}(I)$$

y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} = V^{(2)}(I)$$

obtenemos que:

$$dV = \left(V^{(1)}(I) \mu I + \frac{1}{2} V^{(2)}(I) \sigma^2 I^2 \right) dt + V^{(1)}(I) \sigma I dW. \quad (4.14)$$

Tomando el valor esperado $E(dV)$, notamos que es directamente el valor de la parte del diferencial dt ya que el valor esperado de dW es 0. Tauer [Tauer, 2004] hace notar que el valor esperado de esta función en $t = 0$, que denotamos como $E(dV(I))$, debe ser ajustada por $lV_0(I)dt$ donde l es la tasa ajustada diferente a la libre de riesgo que proponen Dixit y Pindick llamada *long-term real interest rate*, por lo tanto, se puede expresar ajustado como:

$$E(dV_0) = \left(V^{(1)}(I) \mu I + \frac{1}{2} V^{(2)}(I) \sigma^2 I^2 \right) dt - lV_0(I)dt \quad (4.15)$$

Como lo muestra Dixit [Dixit, 1989], en 1989, la forma de la solución general de esta ecuación es:

$$V_0(I) = AI^b + BI^a, \quad (4.16)$$

con

$$b = -\frac{1}{\sigma^2} \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 l} \right] < 0,$$

$$a = -\frac{1}{\sigma^2} \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 + 2\sigma^2 l} \right] > 1,$$

Cabe mencionar que A y B son parámetros constantes cuya determinación debe ser hecha asumiendo que $l > \mu$. [Brambila Paz, 2011].

Considerando las condiciones iniciales para el tiempo cero, se obtiene que si I tiende a 0 entonces A necesariamente es 0 ya que $b < 0$ y $a > 1$, por lo que $V_0(I)$ queda como:

$$V_0(I) = BI^a \quad (4.17)$$

En el tiempo 1 el valor esperado $E(dV_1)$ donde c es *annual production cost* del ingreso I se obtiene la ecuación:

$$E(dV_1) = lV_1(I)dt - (I - c)dt \quad (4.18)$$

La función del valor total del proyecto

La ecuación pasada tiene su solución general, propuesta por Dixit [Dixit, 1989], de la siguiente forma

$$V(I) = AI^b + BI^a + \frac{I}{l - \mu} - \frac{c}{l}, \quad (4.19)$$

Donde $AI^b + BI^a$ es el valor de la opción por abandonar el proyecto y $\frac{I}{l - \mu} - \frac{c}{l}$ es el valor presente de los ingresos netos. Si I tiende al infinito, entonces el valor de la opción de abandono del proyecto llega a 0, esto porque $b < 0$ y $a > 1$. Por lo tanto con las condiciones anteriores para $t = 1$ del valor de la opción propuesta por Tauer [Tauer, 2004] se satisfacen si $B = 0$, por lo que $V_1(I)$ queda como:

$$V_1(I) = AI^b + \frac{I}{l - \mu} - \frac{c}{l}. \quad (4.20)$$

Deduciendo las condiciones para el *investment trigger point* (punto de incremento de la inversión) H y el *abandonment point* (punto de abandono del proyecto o salida) L con κ como el costo de inversión obtenemos que:

$$V_1(H) - V_0(H) = \kappa \quad (4.21)$$

Derivando la ecuación anterior obtenemos que:

$$V_1^{(1)}(H) - V_0^{(1)}(H) = 0 \quad (4.22)$$

De manera análoga usando el punto de abandono L , tenemos que

$$V_1(L) - V_0(L) = -\chi \quad (4.23)$$

donde χ es el *cost of abandoning the investment* κ . Derivando la ecuación pasada se obtiene que:

$$V_1^{(1)}(L) - V_0^{(1)}(L) = 0 \quad (4.24)$$

Sistema de ecuaciones no lineales.

Resumiendo obtenemos que:

$$\begin{cases} V_1(H) - V_0(H) - \kappa = 0 \\ V_1^{(1)}(H) - V_0^{(1)}(H) = 0 \\ V_1(L) - V_0(L) + \chi = 0 \\ V_1^{(1)}(L) - V_0^{(1)}(L) = 0 \end{cases}, \quad (4.25)$$

Finalmente, sustituyendo H en las ecuaciones (4.17) y (4.20) y sustituyendo estas últimas en (4.21) y (4.22), para luego sustituir el valor L en las ecuaciones (4.17) y (4.20) y sustituyéndolas en (4.23) y (4.24), obtenemos un sistema no lineal de cuatro ecuaciones con cuatro variables (H, L, A, B) .

$$AH^b + \frac{H}{l-\mu} - \frac{c}{l} - BH^a = \kappa \quad (4.26)$$

$$AbH^{b-1} - \frac{1}{l-\mu} - BaH^{a-1} = 0 \quad (4.27)$$

$$BL^a - AL^b - \frac{L}{l-\mu} + \frac{c}{l} = \chi \quad (4.28)$$

$$BaL^{a-1} - AbL^{b-1} - \frac{1}{l-\mu} = 0 \quad (4.29)$$

El sistema anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(H, L, A, B)^T := ([x]_1, [x]_2, [x]_3, [x]_4)^T,$$

$$\begin{cases} [x]_3[x]_1^b + \frac{[x]_1}{l-\mu} - \frac{c}{l} - [x]_4[x]_1^a = \kappa \\ b[x]_3[x]_1^{b-1} - \frac{1}{l-\mu} - a[x]_4[x]_1^{a-1} = 0 \\ 1[x]_4[x]_2^a - [x]_3[x]_2^b - \frac{[x]_2}{l-\mu} + \frac{c}{l} = \chi \\ a[x]_4[x]_2^{a-1} - b[x]_3[x]_2^{b-1} - \frac{1}{l-\mu} = 0 \end{cases}, \quad (4.30)$$

donde se puede tomar el siguiente acomodo de parámetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} + \rho, \quad a_2 = -\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{1}{2} + \rho \\ a_3 = \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{1}{2} + \rho, \quad a_4 = -\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} + \rho \\ a_5 = \frac{1}{l - \mu}, \quad a_6 = \frac{c}{l} + \kappa, \quad a_7 = \frac{c}{l} - \chi \end{array} \right. ,$$

con

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2l}{\sigma^2}}.$$

y sustituyendo estos últimos parámetros en (4.30) se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_5[x]_1 + [x]_4[x]_1^{-a_1} - [x]_3[x]_1^{a_2} - a_6 = 0 \\ -a_1[x]_4[x]_1^{-a_3} - a_2[x]_3[x]_1^{a_4} + a_5 = 0 \\ a_5[x]_2 + [x]_4[x]_2^{-a_1} - [x]_3[x]_2^{a_2} - a_7 = 0 \\ -a_1[x]_4[x]_2^{-a_3} - a_2[x]_3[x]_2^{a_4} + a_5 = 0 \end{array} \right. , \quad (4.31)$$

que corresponde al modelo matemático de inversión en escenarios accidentados. Este modelo fue aplicado por Tauer para el caso de los productores de leche [Tauer, 2004].

4.2.2. Solución del sistema por derivada fraccionaria conforme

Asumiendo el sistema (4.31) tiene los siguientes valores para las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0.5355 \\ a_2 = 1.5808 \\ a_3 = 1.5355 \\ a_4 = 0.5808 \\ a_5 = 18.9753 \end{array} \right. ,$$

y considerando valores particulares para las constantes faltantes como sigue entonces obtenemos con el método de Newton-Raphson Fraccionario Conforme Multivariable, los siguientes resultados:

Se pueden escoger valores de la tabla 4.7 y con el método antes propuesto obtener los resultados mostrados en la tabla 4.8.

Estos resultados obtenidos utilizando el método propuesto en esta tesis pueden ser comparados con otros obtenidos con el método conocidos como Pseudo-Newton. Se podrá observar que los resultados son prácticamente los mismos y que, sin embargo, se puede apreciar una diferencia significativa en el número de iteraciones. Los resultados mostrados a continuación fueron obtenidos con los mismos valores planteados para las constantes antes mencionadas. En seguida, se presentan los resultados diferentes para hacer la comparación.

	a_6	a_7	$[x_0]_1$	$[x_0]_2$	$[x_0]_3$	$[x_0]_4$	$\ f(x_0)\ _2$
1	451,474	396,499	35,000	15,000	0.05	$4.5e7$	$3.87223e5$
2	706,975	652,000	35,000	15,000	0.05	$4.5e7$	$7.08858e5$
3	598,655	582,680	35,000	15,000	0.05	$4.5e7$	$5.81441e5$
4	506,975	452,000	35,000	15,000	0.05	$4.5e7$	$4.52019e5$
5	633,603	578,628	30,000	14,000	0.043	$2.8e7$	$5.5348e5$

Tabla 4.5: Se le dieron valor diferentes a a_6 y a_7 junto con algunas condiciones iniciales x_0 . Las condiciones iniciales se dejaron fijas en todas las corridas, salvo en la última, para demostrar que las condiciones iniciales pueden ser variadas y que el método converge aún así a la misma solución.

	α	$[x_n]_1$	$[x_n]_2$	$[x_n]_3$	$[x_n]_4$
1	0.98	41,844.57092309	11,857.32126206	0.0228363	35,613,827.36
2	0.96	60,324.4351123	20,727.9953173	0.0180718	77,668,383.29
3	0.98	43,561.70320225	20,925.4223770	0.0207986	67,188,935.83
4	1.02	45,951.77396490	13,741.03694384	0.0215069	43,742,652.99
5	1.02	55,117.71565436	18,133.15924682	0.01914455	64,424,579.86

	$\ x_n - x_{n-1}\ _2$	$\ f(x_n)\ _2$	n
	$7.37813e-5$	$4.7823e-7$	25
	$9.86743e-5$	$1.40956e-6$	164
	$7.19512e-5$	$3.85216e-7$	35
	$4.60353e-6$	$8.71723e-5$	57
	$9.772407e-7$	$2.853292e-7$	68

Tabla 4.6: Resultados obtenidos usando el método de Newton-Raphson Conforme Multivariable con $\epsilon = e - 4$.

	a_6	a_7	$[x_0]_1$	$[x_0]_2$	$\ f(x_0)\ _2$
1	451,474	396,499	15	20	$6.00379e5$
2	706,975	652,000	17	18	$9.61232e5$
3	598,655	582,680	9	16	$8.35072e5$
4	506,975	452,000	5	19	$6.78951e5$
5	633,603	578,628	11	12	$8.57733e5$

Tabla 4.7: Valores diferentes para a_6 y a_7 junto con algunas condiciones iniciales x_0 .

	α	$[x_n]_1$	$[x_n]_2$
1	0.26131	41,844.57090443	11,857.32126593
2	0.25628	60,324.4350877	20,727.99532223
3	0.23116	43,561.70316013	20,925.42239162
4	0.27136	45,951.77394332	13,741.03694719
5	0.24623	55,117.71562961	18,133.15925118

$\ x_n - x_{n-1}\ _2$	$\ f(x_n)\ _2$	n
$6.94046e - 6$	$6.96414e - 5$	78
$5.03627e - 6$	$8.61788e - 5$	85
$7.21678e - 6$	$8.66393e - 5$	128
$4.60353e - 6$	$8.71723e - 5$	105
$6.19923e - 6$	$9.26936e - 5$	83

Tabla 4.8: Resultados obtenidos con el método de Pseudo Newton y con $\epsilon = e - 4$.

[Ir al Índice](#)

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias

En este capítulo, veremos las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias iniciando con la solución de la ecuación diferencial de una masa en caída libre con fricción. Estos cálculos nos servirán para comparar la solución fraccionaria con la solución entera de primer orden. Se introduce el concepto de la función Vega-Brambila para resolver esta ecuación en el caso donde la derivada fraccionaria alfaésima, α , varíe en el tiempo; de tal manera, que se pueda presentar el modo de resolver la ecuación diferencial de primer orden con exponente fraccionario variable en el tiempo.

Una aplicación que también consideramos importante presentar es la ecuación de flujo de calor de Fourier, donde mostramos la solución clásica a modo de la ecuación de primer orden, una solución numérica por el método de diferencias finitas y otro por diferencias finitas fraccionarias.

Por último, presentamos el cálculo fraccionario aplicado a la industria petrolera donde se han hecho ya muchos estudios en este campo realizados por Benito F. Martínez, Fernando Brambila, C. Fuentes, F. Alcántara López, Anthony Torres Hernández y J. López Estrada. Tristemente, se han provocado algunos desastres naturales causados por el petróleo, como el caso del derrame de *British Petroleum* cuya crónica elaborada por *GreenPeace* narra que, *el veinte de abril de 2010, una plataforma petrolífera de la British Petroleum (BP) explotó, matando a 11 de los trabajadores de la plataforma y vertiendo decenas de miles de barriles de petróleo en el Golfo de México. El pozo de petróleo de la plataforma Deepwater Horizon de BP, situado a más de 1.500 metros de profundidad, vierte actualmente entre 675 y 13.495 toneladas de petróleo cada día en el Golfo de México. Este vertido supone un gran daño para las comunidades que viven en esa costa, para las frágiles marismas y las aguas del Golfo. Se cree que el vertido de petróleo de BP llegará a causar daños a largo plazo en las costas de Luisiana, Alabama, Misisipi y Florida, y que altere de manera irreversible el ecosistema de la zona del Golfo de México. Se trata de una zona de immaculados ecosistemas y algunas de las reservas naturales más valiosas del país. El Golfo de México es el hábitat natural de cientos de especies y, cada año, unos cinco millones de aves migratorias atraviesan la región. Según el periódico The Times-Picayune, la zona amenazada es una zona de descanso para el 70 % de las aves acuáticas del país, entre las que se encuentra el Pelicano pardo, el ave oficial que representa al estado de Luisiana. Además, existen muchas especies en peligro de extinción que dependen de las aguas del Golfo, como la frágil población de Atún rojo, cuatro especies de tortugas marinas, seis especies de ballenas, tiburones y delfines.* [Greenpeace, 2009]

Todo esto pudo haberse evitado si no se hubiera mezclado el conocimiento inexacto de la presión de salida del petróleo con la ambición económica desmedida.

Las derivadas fraccionarias se usaron para resolver el problema de extracción logrando disminuir el error del cálculo de la presión de salida. Suponemos, que si se hubiera conocido la presión de salida de manera más precisa, se hubiera concluido que no hay tecnología que sea capaz de controlarla y en consecuencia no se hubiera hecho la perforación.

5.1. Un ejemplo de la aplicación de las derivadas fraccionarias en la solución de una masa en caída libre con fricción

En esta sección se resolverá la ecuación diferencial que modela la caída libre con fricción de una masa de la forma $y'(t) + ky(t) = f(t)$ por derivadas fraccionarias. Por análisis de fuerzas de Newton,

$$\sum F = ma,$$

$$mg - c \frac{dy(t)}{dt} = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

o bien, derivando y con respecto de t para tener la velocidad como variable, obtenemos que

$$mv'(t) + cv(t) = mg. \quad (5.1)$$

Ahora aplicando la derivada fraccionaria para la primera derivada:

$$mv^\alpha(t) + cv(t) = mg, \quad (5.2)$$

donde $v(0) = v_0$.

Al aplicar la transformada de Laplace en la ecuación (5.2) tenemos que:

$$\mathcal{L}\{mv^\alpha(t) + cv(t) = mg\} = m\mathcal{L}\{v^\alpha(t)\} + cv_\alpha(s) = \frac{mg}{s}. \quad (5.3)$$

Sabemos, que la $\mathcal{L}\{v^\alpha(t)\}$ es igual a

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha v(t)\} = \mathcal{L}\{I^{-\alpha}v(t)\}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}\{D^n I^n I^{-\alpha}v(t)\} = \mathcal{L}\{D^n I^{n-\alpha}v(t)\}.$$

Por otra parte, también sabemos que

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0),$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{F^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

y de lo anterior, se podría concluir que

$$\mathcal{L}\{F^n(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0). \quad (5.5)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{D^n I^{n-\alpha} v(t)\} = s^n v(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} v^{(k-1)}(0) \quad (5.6)$$

y si $0 < \alpha < 1$ y $n = \alpha$ se deduce que la transformada de Laplace de v^α es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v^\alpha(t)\} &= s^\alpha v(s) - \sum_{k=1}^{\alpha-1} s^{\alpha-k} v^{(k-1)}(0) \\ &= s^\alpha v(s) - s^{\alpha-1} v(0) \\ &= s^\alpha v(s) - s^{\alpha-1} v_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Con lo anterior, ahora se hace la transformada de Laplace de la ecuación (5.2)

$$\mathcal{L}\{mv^\alpha + cv = mg\} = m [s^\alpha v(s) - s^{\alpha-1} v_0] + cv(s) = \frac{mg}{s}, \quad (5.8)$$

y se despeja $v_\alpha(s)$ y se simplifica,

$$\begin{aligned} ms^\alpha v(s) + cv(s) &= \frac{mg}{s} + ms^{\alpha-1} v_0, \\ (ms^\alpha + c)v_\alpha(s) &= \frac{mg}{s} + ms^{\alpha-1} v_0, \\ v_\alpha(s) &= \frac{\frac{mg}{s} + ms^{\alpha-1} v_0}{ms^\alpha + c}, \\ v_\alpha(s) &= \frac{mg}{s(ms^\alpha + c)} + \frac{ms^\alpha v_0}{s(ms^\alpha + c)}, \\ v_\alpha(s) &= \frac{g}{s(s^\alpha + \frac{c}{m})} + \frac{s^\alpha v_0}{s(s^\alpha + \frac{c}{m})}, \\ v_\alpha(s) &= \frac{g}{s(s^\alpha + \frac{c}{m})} + \frac{s^{\alpha-1} v_0}{(s^\alpha + \frac{c}{m})}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sabiendo que $\mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}$ y que $a = \frac{-c}{m}$ entonces,

$$\begin{aligned} v_\alpha(s) &= \frac{gs^{\alpha-1}}{s s^{\alpha-1} (s^\alpha + \frac{c}{m})} + \frac{v_0 s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \frac{c}{m})}, \\ v_\alpha(s) &= \frac{g}{s^\alpha} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{c}{m}} \right) + v_0 \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se toma que la transformada de Laplace de un monomio con un exponente es:

$$\mathcal{L}\{t^\square\} = \frac{\square!}{s^{\square+1}},$$

se puede decir que,

$$\begin{aligned}
v_\alpha(s) &= \frac{g}{(\alpha-1)!} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} + v_0 \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} \\
&= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} + v_0 \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} \\
&= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(au^\alpha) du\right\} + v_0 \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Ahora aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación simplificada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}v_\alpha(s) &= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(au^\alpha) du\right\} + v_0 \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} \\
v_\alpha(t) &= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(au^\alpha) du + v_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Recordando la función Mittag-Leffler que se define como

$$E_{\alpha,1}(au^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(au^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

entonces, se puede decir que

$$v(t) = \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(au^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} du + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(au^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

y denotando

$$\oplus = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(au^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

y así obtenemos,

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(au^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} du + \oplus \\
&= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^t u^{\alpha k} (t-u)^{\alpha-1} du + \oplus \\
&= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^t u^{\alpha k} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} du + \oplus \\
&= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^t u^{\alpha k} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} du + \oplus.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Para simplificar, se hacen los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} xt &= u & Siu &\rightarrow tx \rightarrow \\ du &= tdx & Siu &\rightarrow 0x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y obtenemos,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^1 (xt)^{\alpha k} \left(1 - \frac{xt}{t}\right)^{\alpha-1} dx + \oplus, \\ &= \frac{g}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^1 x^{\alpha k} t^{\alpha k} (1-x)^{\alpha-1} dx + \oplus, \\ &= g \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^1 x^{\alpha k} (1-x)^{\alpha-1} dx + \oplus, \\ &= g \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k t^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^1 x^{\alpha k} (1-x)^{\alpha-1} dx + \oplus. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Se resuelve la integral de la ecuación (5.14) por métodos clásicos,

$$\int_0^1 x^{\alpha k} (1-x)^{\alpha-1} dx, \tag{5.15}$$

derivando $x^{\alpha k}$ hasta el infinito,

$$\begin{aligned} &(\alpha k)x^{\alpha k-1} \\ &(\alpha k)(\alpha k-1)x^{\alpha k-2}, \\ &(\alpha k)(\alpha k-1)(\alpha k-2)x^{\alpha k-3}, \\ &\vdots \\ &(\alpha k)(\alpha k-1)(\alpha k-2)\cdots(\alpha k-\alpha k+1)x^{\alpha k-\alpha k} = (\alpha k)! \end{aligned} \tag{5.16}$$

y se integra el polinomio $(1-x)^{\alpha-1}$ iteradamente,

$$\begin{aligned} &-\frac{(1-x)^\alpha}{\alpha} \\ &\frac{(1-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\ &-\frac{(1-x)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \\ &\vdots \\ &\frac{(1-x)^{\alpha+\alpha k-1}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\alpha k-1)} \\ &-\frac{(1-x)^{\alpha+\alpha k}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\alpha k)} \end{aligned} \tag{5.17}$$

De lo anterior se puede concluir que,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha k} (1-x)^{\alpha-1} dx = \\ & \left. -\frac{x^{\alpha k} (1-x)^\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha k (x)^{\alpha k-1} (1-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{(\alpha k)(\alpha k-1)x^{\alpha k-2}(1-x)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \dots - \frac{(\alpha k)!(1-x)^{\alpha+\alpha k}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\alpha k)} \right|_0^1 \quad (5.18) \\ & = \frac{(\alpha k)!}{(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\alpha k)} = \frac{(\alpha k)!(\alpha-1)!}{(\alpha+\alpha k)!} \end{aligned}$$

Se sustituye el resultado de la ecuación (5.18) en la ecuación (5.14)

$$\begin{aligned} v_\alpha(t) &= gt^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha k+1)} \frac{(\alpha k)!(\alpha-1)!}{(\alpha+\alpha k)!} + \oplus, \\ &= gt^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\alpha k+1)} + \oplus, \quad (5.19) \\ &= gt^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k+1)} + \oplus \end{aligned}$$

y si tomamos $a = -\frac{c}{m}$,

$$v_\alpha(t) = gt^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{m}t^\alpha\right)^k}{\Gamma(\alpha + \alpha k + 1)} + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{m}t^\alpha\right)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (5.20)$$

y sustituyendo la notación sigma por la de la Mittag-Leffler obtenemos que

$$v_\alpha(t) = gt^\alpha E_{(\alpha, \alpha+1)}\left(\frac{-c}{m}t^\alpha\right) + v_0 E_{(\alpha, 1)}\left(-\frac{c}{m}t^\alpha\right) \quad (5.21)$$

Esta es la ecuación de la velocidad de una masa en caída libre con fricción de forma fraccional que es preferible contemplar de manera adimensional o multiplicarla por una constante de compensación para evitar desasosiego (que seguramente causará a los físicos).

De la ecuación anterior, habría que esperar con $\alpha = 1$ nos diera la solución analítica clásica. A continuación mostraremos el desarrollo.

Sea $\alpha = 1$

$$v(t) = gt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{m}t\right)^k}{\Gamma(k+2)} + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{m}t\right)^k}{\Gamma(k+1)}. \quad (5.22)$$

Si se utiliza la notación $\square = -\frac{c}{m}t$,

$$v(t) = gt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{\Gamma(k+2)} + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{\Gamma(k+1)}. \quad (5.23)$$

Ahora bien, por la definición de la función Gamma $\Gamma(z) = (z-1)!$, podemos deducir que $\Gamma(k+2) = (k+1)! = (k+1)k!$ y que $\Gamma(k+1) = k!$ y por lo tanto,

$$v(t) = gt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{k!(k+1)} + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{k!}. \quad (5.24)$$

Conociendo la serie de la función e^x donde

$$e^{\square} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{k!}$$

identificamos que podemos hacer una sustitución en la ecuación (5.24) para obtener

$$v(t) = gt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{k!(k+1)} + v_0 e^{\square} \quad (5.25)$$

Ahora simplificaremos el otro término en forma de sumatoria tomando en cuenta que

$$S_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{k!(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k}{(k+1)!},$$

y si $n = k + 1 \rightarrow k = n - 1$,

$$S_k = \sum_{n-1=0}^{\infty} \frac{\square^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\square^{n-1}}{n!} = \frac{1}{\square} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\square^n}{n!} = \frac{1}{\square} [e^{\square} - 1]$$

utilizando nuestra notación de estructura \square y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} v(t) &= gt \left[\frac{1}{\square} \right] (e^{\square} - 1) + v_0 e^{\square}, \\ &= gt \left(\frac{e^{\square} - 1}{\square} \right) + v_0 e^{\square}, \\ &= \frac{gte^{\square}}{\square} - \frac{gt}{\square} + v_0 e^{\square}, \\ &= e^{\square} \left(v_0 + \frac{gt}{\square} \right) - gt, \\ &= e^{-\frac{c}{m}t} \left[v_0 + \frac{gt}{\frac{c}{m}} \right] - \frac{gt}{\square}, \\ &= e^{-\frac{c}{m}t} \left[v_0 - \frac{mg}{c} \right] - \frac{gt}{\frac{c}{m}t} \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$v(t) = e^{-\frac{c}{m}t} \left[v_0 - \frac{mg}{c} \right] + \frac{mg}{c} \quad (5.27)$$

Si $t = 0$

$$v(0) = v_0 - \frac{mg}{c} + \frac{mg}{c} = v_0. \quad (5.28)$$

se cumple la condición inicial que $v(0) = v_0$

y si $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{c}{m}t} \left[v_0 - \frac{mg}{c} \right] + \frac{mg}{c} = \frac{mg}{c} \quad (5.29)$$

es claro que la velocidad terminal será igual a $\frac{mg}{c}$

5.2. Función Vega-Brambila

Una ecuación diferencial fraccionaria puede aceptar que el parámetro α dependa del tiempo; en otras palabras, que puede ser expresada como $\alpha(t)$. Estos cambios de la derivada fraccionaria, dependientes del tiempo, podrían plantearse en algunos modelos. Un caso sería la perforación de un pozo petrolero que va cambiando por las diferentes capas que conforman el suelo. Para esto y para modelar un problema con α variable en distintos tiempos definimos la siguiente función.

La función Vega se define como

$$\alpha(t^*) = {}_n V_{t_f}(\hat{P}(t)) = A_{i=1}^n \hat{P}\left(\frac{t_f}{n}\right) = A_{i=1}^n kP\left(\frac{it_f}{n}\right) \quad (5.30)$$

$$\alpha(t^*) = {}_n V_{t_f}(\hat{P}(t)) = kA_{i=1}^n P\left(\frac{it_f}{n}\right), \frac{(i-1)t_f}{n} < t^* \leq \frac{it_f}{n} \quad (5.31)$$

donde n es el número de intervalos, t_f es el tiempo final e i es el contador que va desde 1 hasta n .

Ejemplo:

Si $P(t^*) = t^{*2}$, $0 < t^* \leq 8$ y $n = 4$,

$$P(t^*) = t^{*2} \alpha(t^*) = {}_n V_{t_f} f(t) V_n(t^2) = A_{i=1}^n k f\left(\frac{8i}{4}\right) = k A_{i=1}^4 f(2i) \quad (5.32)$$

Para k

$$\begin{aligned} kf(t_f) &= 1, \\ k &= \frac{1}{64} \end{aligned} \quad ,$$

$$\alpha(t^*) = \begin{cases} kf(2); & si \ 0 < t^* \leq 2 \\ kf(4); & si \ 2 < t^* \leq 4 \\ kf(6); & si \ 4 < t^* \leq 6 \\ kf(8); & si \ 6 < t^* \leq 8 \end{cases} \quad , \quad (5.33)$$

$$\alpha(t^*) = \begin{cases} 4k; & si \ 0 < t^* \leq 2 \\ 16k; & si \ 2 < t^* \leq 4 \\ 36k; & si \ 4 < t^* \leq 6 \\ 64k; & si \ 6 < t^* \leq 8 \end{cases} \quad , \quad (5.34)$$

$$\alpha(t^*) = \begin{cases} \frac{1}{16}; & \text{si } 0 < t^* \leq 2 \\ \frac{1}{4}; & \text{si } 2 < t^* \leq 4 \\ \frac{9}{16}; & \text{si } 4 < t^* \leq 6 \\ 1; & \text{si } 6 < t^* \leq 8 \end{cases}, \quad (5.35)$$

En la sección anterior, se resolvió la ecuación diferencial de caída libre con fricción (5.2), cuya solución general es la ecuación (5.21). Con lo anterior, podríamos ahora resolver la ecuación:

$$mv^{\alpha(t)} + cv = mg. \quad (5.36)$$

Considerando a $\alpha(t)$ como la función definida en (5.32), obtendremos la siguiente ecuación diferencial fraccionaria con α variable en el tiempo:

$$\begin{cases} mv^{\frac{1}{16}} + cv = mg; & \text{si } 0 < t^* \leq 2 \\ mv^{\frac{1}{4}} + cv = mg; & \text{si } 2 < t^* \leq 4 \\ mv^{\frac{9}{16}} + cv = mg; & \text{si } 4 < t^* \leq 6 \\ mv^1 + cv = mg; & \text{si } 6 < t^* \leq 8 \end{cases}, \quad (5.37)$$

y de la ecuación (5.21), obtenemos la solución a este problema con α variable.

$$\begin{cases} v_{\frac{1}{16}}(t) = gt^{\frac{1}{16}} E_{(\frac{1}{16}, \frac{17}{16})}(\frac{-c}{m}t^{\frac{1}{16}}) + v_0 E_{(\frac{1}{16}, 1)}(-\frac{c}{m}t^{\frac{1}{16}}) & ; \text{si } 0 < t^* \leq 2 \\ v_{\frac{1}{4}}(t) = gt^{\frac{1}{4}} E_{(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})}(\frac{-c}{m}t^{\frac{1}{4}}) + v_0 E_{(\frac{1}{4}, 1)}(-\frac{c}{m}t^{\frac{1}{4}}) & ; \text{si } 2 < t^* \leq 4 \\ v_{\frac{9}{16}}(t) = gt^{\frac{9}{16}} E_{(\frac{9}{16}, \frac{25}{16})}(\frac{-c}{m}t^{\frac{9}{16}}) + v_0 E_{(\frac{9}{16}, 1)}(-\frac{c}{m}t^{\frac{9}{16}}) & ; \text{si } 4 < t^* \leq 6 \\ v(t) = e^{-\frac{c}{m}t} [v_0 - \frac{mg}{c}] + \frac{mg}{c} & ; \text{si } 6 < t^* \leq 8 \end{cases}. \quad (5.38)$$

5.3. Ecuación de flujo de Fourier

Fourier, nacido en 1768 en Francia, hijo de un sastre, estudiante de una escuela militar antes de convertirse en profesor de matemáticas, demostró cómo la conducción del calor en cuerpos sólidos puede ser analizada en términos de series matemáticas infinitas [Struik, 2017].

Una de nuestras inquietudes es la solución de la ecuación de flujo de Fourier, la cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales. A continuación, se presenta en una y dos dimensiones, y se puede generalizar con el uso del Laplaciano.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= k^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

la cual se representa como,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \nabla^2 T \quad (5.40)$$

La solución de Fourier, para (5.40) en una dimensión (en un alambre), la encuentra suponiendo que $T(x, t) = X(x)T(t)$. Considera algunas condiciones iniciales llamadas *condiciones de contorno* o *de frontera* donde:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 0, \\ T(l, t) &= 0, \\ T(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \quad (5.41)$$

con esto, y por separación de variables, se puede resolver el problema con la serie que lleva su nombre, la *Serie de Fourier*.

x

En esta sección, deseamos responder a las preguntas: ¿será posible resolver la ecuación de flujo de Fourier con cálculo fraccionario?, ¿existirá algún método que pueda aprovecharse para distintas aplicaciones de esta ecuación?

5.3.1. Solución de la ecuación de flujo por el método de Fourier

A continuación, presentamos la solución clásica de la ecuación de flujo, ya que será una buena referencia para el desarrollo de la solución de la ecuación con derivadas fraccionarias.

Considere un alambre de longitud L en el tiempo. Utilizando la ecuación de flujo de Fourier,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.42)$$

con las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} U(0, t) &= 0 = U(L, t), t > 0, \\ U(x, 0) &= f(x), x \in [0, L]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ahora suponemos que la solución $U(x, t)$ es el producto de $X(x)T(t)$ y por lo tanto

$$U(x, t) = X(x)T(t), \quad (5.44)$$

y para obtener la forma de la ecuación (5.42), necesitamos obtener las derivadas parciales $\frac{\partial U}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(x)T'(t), \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X'(x)T(t), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= X''(x)T(t). \end{aligned} \quad (5.46)$$

si sustituimos las ecuaciones resultantes (5.46) y (5.45) en (5.42), entonces obtendremos que

$$X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t), \quad (5.47)$$

evaluando las condiciones iniciales tendremos,

$$\begin{aligned} U(0, t) &= X(0)T(t) = 0, \\ U(L, t) &= X(L)T(t) = 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

y despejamos de la ecuación (5.47) para obtener,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{k^2 X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad (5.49)$$

Si tomamos $\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$ de la ecuación (5.49) podemos decir que:

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} &= \lambda, \\ T'(t) - \lambda T(t) &= 0, \\ \frac{T'(t)}{T(t)} &= \lambda k^2, \\ LnT(t) &= \lambda k^2 t + C, \\ T(t) &= e^{\lambda t k^2 + C}, \\ T(t) &= C e^{\lambda k^2 t}, \\ T(t) &= C e^{k^2 \lambda t} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Y si tomamos $\frac{k^2 X''(x)}{X(x)} = \lambda$ también de la ecuación (5.49) podemos decir que,

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ X'' - \lambda X &= 0, \\ m^2 - \lambda &= 0, \\ m &= \pm \sqrt{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para satisfacer las condiciones iniciales, se tiene que $\lambda < 0$ y por lo tanto,

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sen \sqrt{\lambda} x$$

que para C_1, C_2 ,

$$\begin{aligned}
X(0)T(t) &= X(L)T(t) = 0, \\
U(x, t) &= X(x)T(t), \\
&= \left(C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x \right) C e^{k^2 \lambda t}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

De la condición inicial $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$,

$$C_1 C e^{k^2 \lambda t} = 0,$$

como $C \neq 0$, se tiene que $C_1 = 0$

$$\begin{aligned}
C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} L C e^{k^2 \lambda t} &= 0, \\
\sqrt{-\lambda} L &= n\pi, \\
\lambda &= -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \\
U(x, t) &= \left(C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) e^{k^2 \lambda t}, \\
U(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x e^{-\frac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \\
U(x, 0) &= f(x)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = f(x). \tag{5.54}$$

Es claro que la ecuación (5.54) es la serie de Fourier para $f(x)$, la cual es impar y se pueden aprovechar estas propiedades.

5.3.2. Solución de la ecuación de flujo por el método de diferencias finitas

Al resolver las ecuaciones con derivadas parciales por el método de diferencias finitas, las derivadas se sustituyen por diferencias correspondientes:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \approx \frac{U(x+h, t) - U(x, t)}{h}, \tag{5.55}$$

y para la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{U(x+h, t) - U(x, t)}{h} - \frac{U(x, t) - U(x-h, t)}{h} \right], \\
&\approx \frac{U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)}{h^2},
\end{aligned} \tag{5.56}$$

análogamente

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \approx \frac{U(x, t+l) - U(x, t)}{l}. \tag{5.57}$$

Por lo tanto, para encontrar la solución de la ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.58)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \varphi(x); & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ U(0, t) &= \psi_1(t); & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ U(l, t) &= \psi_2(t); & \text{si } 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (5.59)$$

Se requiere encontrar la solución $U(x, t)$ en un rectángulo limitado por las rectas $t = 0$, $x = 0$, $x = L$, $t \leq T$. Se determinan los valores aproximados de la solución en los nudos de la red, es decir, en los puntos de intersección de estas rectas. Teniendo la notación $U(ih, kl) = U_{i,k}$, se tiene:

$$\frac{U_{i,h+1} - U_{i,k}}{l} = k^2 \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2} \quad (5.60)$$

Determinemos $U_{i,k+1}$

$$U_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2k^2 l}{h^2}\right) U_{i,k} + k^2 \frac{l}{h^2} (U_{i+1,k} + U_{i-1,k}), \quad (5.61)$$

La fórmula se simplifica especialmente si se selecciona el paso l por el eje t y se sabe que se puede obtener el valor aproximado de la solución solamente en el caso en que $l \leq \frac{h^2}{2a^2}$

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0, \quad (5.62)$$

ó

$$l = \frac{h^2}{2a^2}. \quad (5.63)$$

En este caso,

$$U_{i,k+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,k} + U_{i-1,k}), \quad (5.64)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} U_h(x, t) = U(x, t), \quad (5.65)$$

donde $U(x, t)$ es la solución del problema. También se demuestra que

$$|U_h(x, t) - U(x, t)| < Mh^2, \quad (5.66)$$

donde M es una constante que no depende de h .

5.4. Solución de la ecuación de flujo de Fourier fraccionaria con diferencias finitas

5.4.1. Método clásico de diferencias finitas

A continuación, presentaremos la solución de la ecuación por diferencias finitas fraccionarias. Esta es una aportación para resolver la ecuación de flujo con múltiples aplicaciones en todos los campos de la ingeniería. Este método, es cada vez más socorrido gracias a los avances en la tecnología computacional. Entraría dentro de la categoría de los métodos numéricos.

En la teoría clásica de diferencias finitas se asume que la

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{t_1} - T_i^{t_0}}{\Delta t}, \quad (5.67)$$

y la segunda derivada se tiene que,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{(i+1)}^{t_0} - 2T_{(i)}^{t_0} + T_{(i-1)}^{t_0}}{\Delta x^2}. \quad (5.68)$$

Sustituyendo en la ecuación de flujo de calor para una dimensión obtenemos,

$$\frac{T_i^{t_1} - T_i^{t_0}}{\Delta t} = k^2 \left[\frac{T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}}{\Delta x^2} \right] \quad (5.69)$$

Definimos $\lambda = \frac{\Delta t k^2}{\Delta x^2}$ donde Δt es el incremento del tiempo y Δx es el incremento del espacio unidimensional. Este método converge si $\lambda \leq \frac{1}{2}$

Al despejar $T_i^{t_1}$ obtenemos,

$$T_i^{t_1} = T_i^{t_0} + \lambda [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}] . \quad (5.70)$$

Una segunda manera para obtener T_i con respecto de t_1 se obtiene que,

$$\left[\frac{-T_i^{t_0} + T_i^{t_1}}{\Delta T} \right] = k^2 \left[\frac{T_{i+1}^{t_1} - 2T_i^{t_1} + T_{i-1}^{t_1}}{\Delta x^2} \right]. \quad (5.71)$$

Al simplificar y despejar

$$\begin{aligned} T_i^{t_1} - T_i^{t_0} &= \lambda [T_{i+1}^{t_1} - 2T_i^{t_1} + T_{i-1}^{t_1}], \\ T_i^{t_1} [2\lambda + 1] &= \lambda [T_{i+1}^{t_1} + T_{i-1}^{t_1}] + T_i^{t_0}, \\ T_i^{t_1} &= \frac{T_i^{t_0} + \lambda [T_{i+1}^{t_1} + T_{i-1}^{t_1}]}{2\lambda + 1}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Es fácil generalizar para tres dimensiones sumando los términos en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

5.4.2. Aportación para la solución de la ecuación de flujo fraccionaria de Fourier con los conceptos de derivada fraccionaria de a) Riemann-Liouville y b) Vega-Brambila por el método de diferencias finitas

Presentamos la solución de la ecuación de flujo de calor fraccionaria por dos formas, por la definición de Riemann-Liouville y por la definición Vega-Brambila de derivada fraccionaria conforme presentada en el capítulo 3 y resumida en la ecuación (3.28).

Solución de la ecuación de flujo fraccionaria de Fourier por Riemann-Liouville

Tomando la definición de Riemann-Liouville, resolveremos la ecuación de flujo en dos casos, cuando $f(w) = w$ y cuando $f(w) = 1$.

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.73)$$

$${}^RL D_x^\alpha f(x) = D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-w)^{n-\alpha-1} f(w) dw \quad (5.74)$$

Si $n = 1$, entonces $0 < \alpha < 1$, por lo tanto

$${}^RL D_x^\alpha = D^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-w)^{-\alpha} f(w) dw. \quad (5.75)$$

Caso 1: consideremos $f(w) = w$

$${}^RL D_x^\alpha = D^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-w)^{-\alpha} w dw. \quad (5.76)$$

Expresado en el tiempo,

$${}^RL D_t^\alpha = D^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-w)^{-\alpha} w dw, \quad (5.77)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} u &= w & dv &= (t-w)^{-\alpha} dw \\ du &= dw & v &= -\frac{(t-w)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-w(t-w)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_0^t \frac{(t-w)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dw, \\
& = \frac{-w(t-w)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{(t-w)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_0^t,
\end{aligned} \tag{5.79}$$

$${}^R D_t^\alpha = D^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1-\alpha} \frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha},$$

Esta primera derivada D^1 la podemos aproximar por los conceptos de diferencias finitas como:

$$D^1 \approx \frac{{}^R D_{T_i^{t_1}}^\alpha - {}^R D_{T_i^{t_0}}^\alpha}{\Delta t}, \tag{5.80}$$

Entonces,

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{(T_i^{t_1})^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{(T_i^{t_0})^{2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)} \right] \tag{5.81}$$

Caso 2: considerando $f(w) = 1$

$$\begin{aligned}
{}^R D_t^\alpha & = D(1) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-w)^{-\alpha} dw, \\
& = D^1 \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[-\frac{(t-w)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \Big|_0^t \right].
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$= D^1 \left[\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right].$$

Por lo tanto, la derivada aproximando la derivada por diferencias finitas,

$$\begin{aligned}
D^1 \left[\frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right] &\approx \frac{(T_i^{t_1})^{1-\alpha} - (T_i^{t_0})^{1-\alpha}}{\Delta t(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \\
&= \frac{1}{\Delta t\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \left[(T_i^{t_1})^{1-\alpha} - (T_i^{t_0})^{1-\alpha} \right], \tag{5.83}
\end{aligned}$$

La solución de la ecuación $\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ por diferencias finitas con Riemann-Liouville se resuelve con:

Caso 1:

$$\frac{1}{\Delta t\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)} \left[(T_i^{t_1})^{2-\alpha} - (T_1^{t_0})^{2-\alpha} \right] = k^2 \left[\frac{T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}}{\Delta x^2} \right] \tag{5.84}$$

Por lo tanto,

$$\left[(T_i^{t_1})^{2-\alpha} - (T_1^{t_0})^{2-\alpha} \right] = \frac{\Delta t k^2}{\Delta x^2} (1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha) \left[T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0} \right]. \tag{5.85}$$

Entonces,

$$(T_i^{t_1})^{2-\alpha} = \lambda(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) \left[T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0} \right] + (T_i^{t_0})^{2-\alpha}. \tag{5.86}$$

Si $(1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \beta$

$$(T_i^{t_1})^{2-\alpha} = \lambda\beta \left[T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0} \right] + (T_i^{t_0})^{2-\alpha}. \tag{5.87}$$

Por lo que el estimado de $T_i^{t_1}$ en el caso 1 si $\lambda = \frac{\Delta t k^2}{\Delta x^2}$ y con $\beta = (1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ viene dado por:

$$T_i^{t_1} = \left[\lambda\beta \left[T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0} \right] + (T_i^{t_0})^{2-\alpha} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} \tag{5.88}$$

Caso 2:

$$\frac{1}{\Delta t\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \left[(T_i^{t_1})^{1-\alpha} - (T_i^{t_0})^{1-\alpha} \right] = k^2 \left[\frac{T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}}{\Delta x^2} \right], \tag{5.89}$$

entonces,

$$(T_i^{t_1})^{1-\alpha} = \lambda(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) \left[T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0} \right] + (T_i^{t_0})^{1-\alpha}. \tag{5.90}$$

Si $(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \gamma$

$$(T_i^{t_1})^{1-\alpha} = \lambda\gamma [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}] + (T_i^{t_0})^{1-\alpha}. \quad (5.91)$$

Por lo que el estimado de $T_i^{t_1}$ en el caso 2 si $\lambda = \frac{\Delta tk^2}{\Delta x^2}$ y con $\gamma = (1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha)$ viene dado por:

$$T_i^{t_1} = [\lambda\gamma [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}] + (T_i^{t_0})^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.92)$$

Solución de la ecuación de flujo fraccionaria por la definición Vega-Brambila

Tomando la ecuación (3.28):

$${}^{VB}D^\alpha f(x) = (1 - \alpha) \left[\frac{f(x)}{x} \right]^\alpha f(x) + \alpha \left[\frac{f(x)}{x} \right]^{\alpha-1} f'(x), \quad (5.93)$$

podemos expresar la temperatura $T(x, t)$ si x es constante, entonces tenemos que:

$$\frac{\partial^\alpha T(x, t)}{\partial t^\alpha} = (1 - \alpha) \left[\frac{T(x, t)}{t} \right]^\alpha T(x, t) + \alpha \left[\frac{T(x, t)}{t} \right]^{\alpha-1} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad (5.94)$$

aproximando $\frac{\partial T}{\partial t}$ por diferencias finitas y con $t = t_0$ y $x = i$ se denota $T(i, t_0) = T_i^{t_0}$, entonces obtenemos

$$\frac{\partial^\alpha T(i, t_0)}{\partial t^\alpha} \approx (1 - \alpha) \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^\alpha T_i^{t_0} + \alpha \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^{\alpha-1} \left(\frac{T_i^{t_1} - T_i^{t_0}}{\Delta t} \right). \quad (5.95)$$

Sustituyendo en la ecuación de flujo de calor de Fourier,

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.96)$$

obtenemos,

$$(1 - \alpha) \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^\alpha T_i^{t_0} + \alpha \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^{\alpha-1} \left(\frac{T_i^{t_1} - T_i^{t_0}}{\Delta t} \right) = k^2 \left[\frac{T_{i-1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i+1}^{t_0}}{\Delta x^2} \right]. \quad (5.97)$$

y despejando para $T_i^{t_1}$ obtenemos,

$$T_i^{t_1} = \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^{1-\alpha} \left[\frac{\lambda}{\alpha} (T_{i-1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i+1}^{t_0}) + \frac{(\alpha - 1)\Delta t}{\alpha} \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0} \right]^\alpha T_i^{t_0} \right] + T_i^{t_0}. \quad (5.98)$$

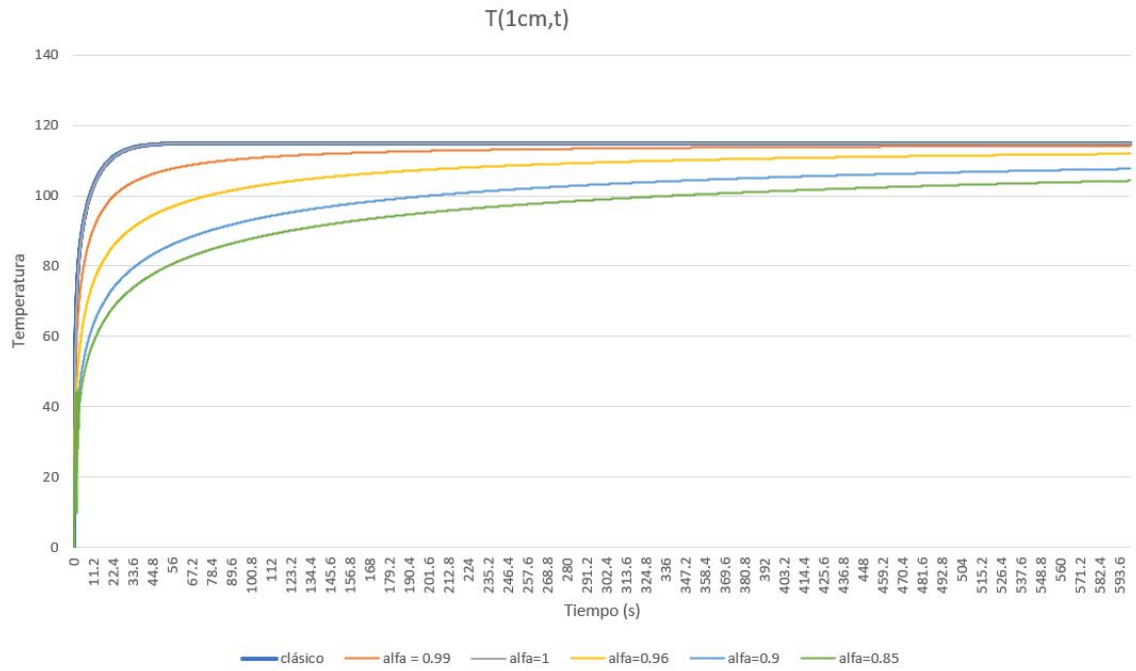
con la condición de que $T_i^{t_1} \neq 0$.

En el cuadro 5.1 se resume el cálculo de $T_i^{t_1}$ a partir de t_0 con los métodos clásico, Riemann-Liouville (RL) ($f(w)=w$ y $f(w)=1$) y Vega-Brambila (VB):

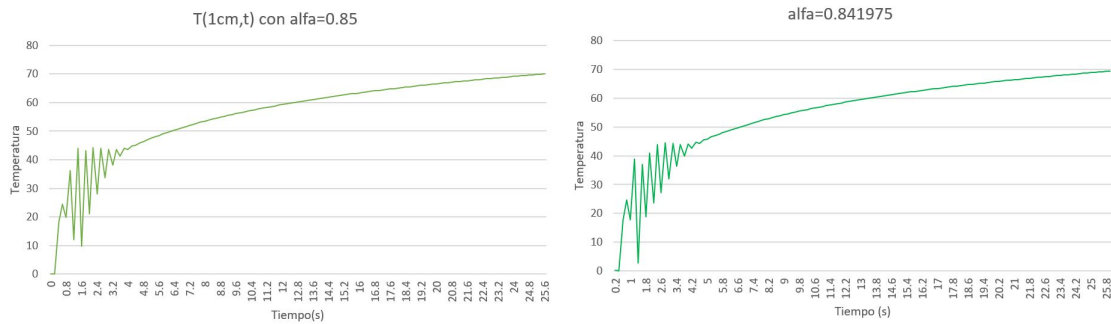
A continuación, se muestran gráficas obtenidas a partir de corridas con el método clásico al aproximar la ecuación de flujo de calor de Fourier por diferencias finitas y con el operador diferencial

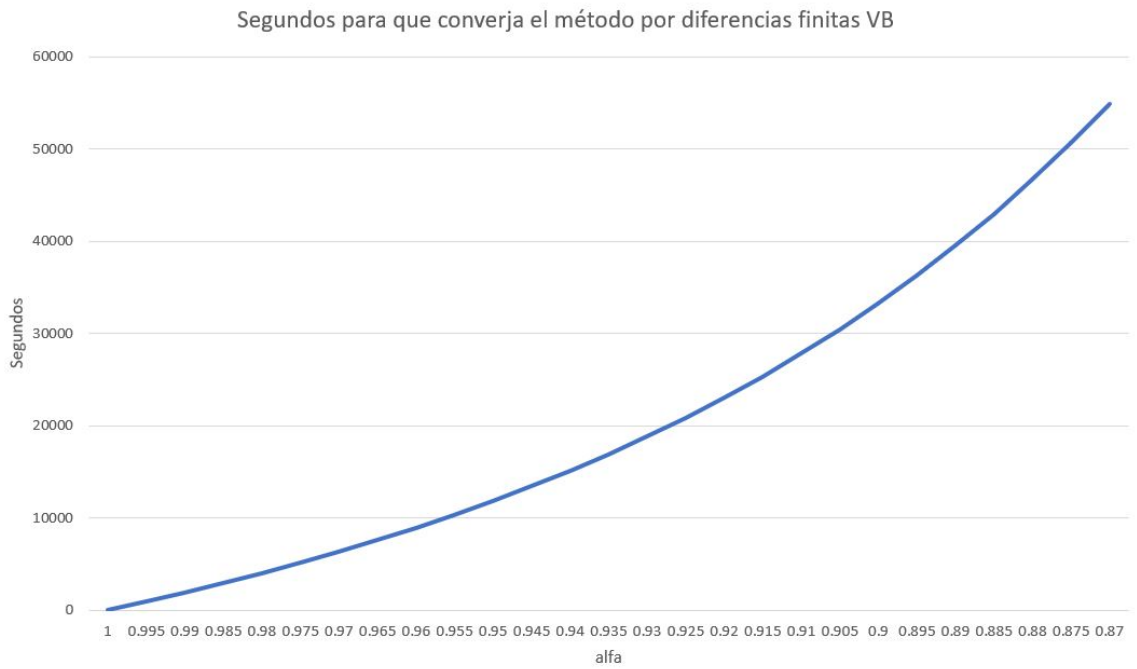
Figura 5.1: Gráficas del comportamiento de las iteraciones al usar la definición VB en el método de diferencias finitas

(a) Gráficas que van hacia la convergencia con distintos valores para α

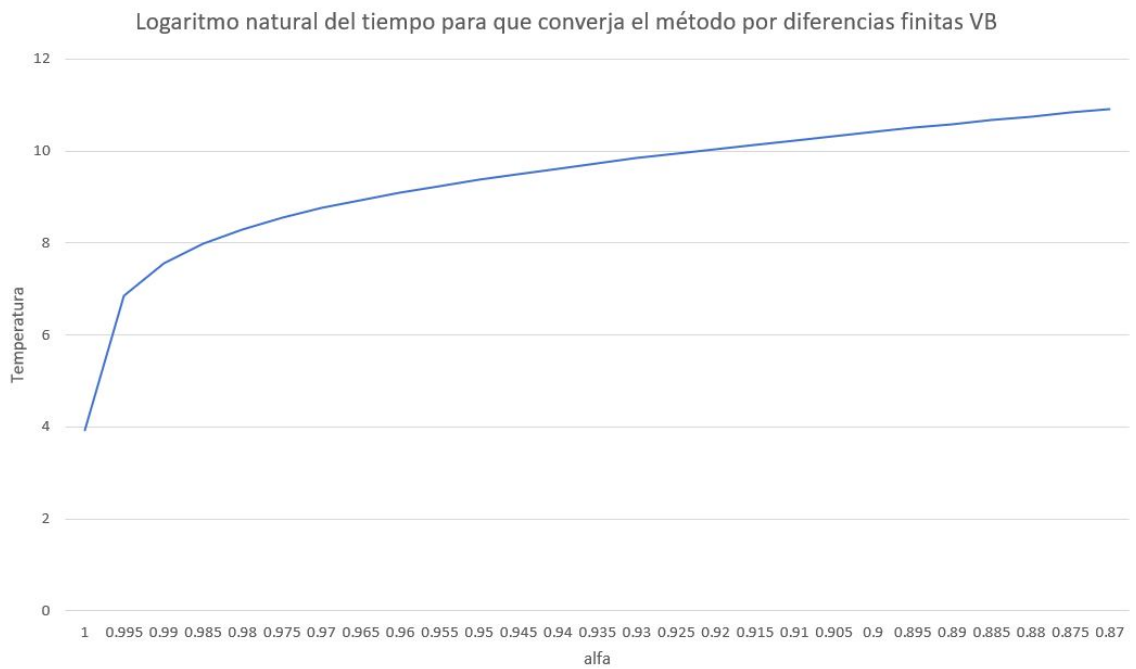


(b) Gráfica del caso cuando $\alpha = 0.85$ con perturbaciones





(c) Gráfica del número de iteraciones para llegar a la convergencia para distintos valores de α



(d) Gráfica del logaritmo natural del número de iteraciones para la convergencia

Clásico	$\alpha = 1$	$T_i^{t_1} = T_i^{t_0} + \lambda [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}]$
RL	$0 < \alpha < 1$ $f(w)=w$	$T_i^{t_1} = [\lambda\beta [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}] + (T_i^{t_0})^{2-\alpha}]^{\frac{1}{2-\alpha}}$
	$f(w)=1$	$T_i^{t_1} = [\lambda\gamma [T_{i+1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i-1}^{t_0}] + (T_i^{t_0})^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$
VB	$0 < \alpha \leq 1$	$T_i^{t_1} = \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0}\right]^{1-\alpha} \left[\frac{\lambda}{\alpha} (T_{i-1}^{t_0} - 2T_i^{t_0} + T_{i+1}^{t_0}) + \frac{(\alpha-1)\Delta t}{\alpha} \left[\frac{T_i^{t_0}}{t_0}\right]^\alpha T_i^{t_0} \right] + T_i^{t_0}$

Tabla 5.1: Cuadro comparativo de los distintos métodos de diferencias finitas para resolver la ecuación de flujo de Fourier

fraccionario VB para una barra de 10 cm empotrada con una temperatura de 120° C en un extremo y 70° C en el otro para un factor $\lambda = 0.2$ y $k = 1$.

De la imagen 5.1c, se puede apreciar que las iteraciones adoptan un comportamiento parecido al de una función exponencial a medida que el parámetro alfa disminuye. Podemos pensar que la ecuación diferencial de flujo de calor de Fourier se va perdiendo a medida que α se aleja de 1 ya que la derivada comienza a desaparecer, y por lo tanto, la ecuación diferencial pierde la forma original. Experimentalmente, encontramos que con $\alpha < 0.85$ se pierde el modelo.

5.5. Aplicación en industria petrolera

En esta sección, presentamos el trabajo del Dr. Fernando Brambila y Benito Martínez Salgado. Como ya hemos comentado al inicio del capítulo, la aplicación del cálculo fraccionario en el cálculo de la presión de salida de pozos petroleros es de gran utilidad para evitar futuros desastres ecológicos. A continuación, presentamos el modelado de los doctores Brambila y Martínez.

En [Martínez-Salgado et al., 2020] Martínez, Brambila et al, explican que el cálculo de la diferencia de presión se realiza a partir de las ecuaciones clásicas de transferencia. Se toman en cuenta la superposición de tres factores: la presión en la matriz de la roca m (porosidades llenas de petróleo), la presión de las fracturas f y la de los vórgulos v y proponen un sistema de ecuaciones con triple porosidad y tripe permeabilidad donde:

$$\Delta_{s_1 s_2}(p) := p_{s_1} - p_{s_2}$$

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_m}{\partial r} \right) + a_{mf} \Delta_{fm}(p) + a_{mv} \Delta_{vm}(p), \quad (5.99)$$

$$\phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{k_f}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) - a_{mf} \Delta_{fm}(p) + a_{fv} \Delta_{vf}(p), \quad (5.100)$$

$$\phi_v c_v \frac{\partial p_v}{\partial t} = \frac{k_v}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_v}{\partial r} \right) - a_{mv} \Delta_{vm}(p) - a_{fv} \Delta_{vf}(p), \quad (5.101)$$

donde ϕ_m , ϕ_f , y ϕ_v representan las porosidades de la matriz de suelo, el medio fracturado y el medio vugular respectivamente con unidades de m^3/m^3 ; c_m , c_f y c_v representan la compresibilidad en cada uno de los medios porosos con unidades de pa^{-1} ; k_m , k_f y k_v representan la permeabilidad de cada uno de los medios porosos en unidades de m^2 ; p_m , p_f y p_v representan la presión del fluido

en cada uno de los medios porosos y sus unidades son Pa; μ es la viscosidad del fluido en Pa·s; a_{mf} , a_{mv} y a_{fv} son los términos de transferencia en las interfaces matriz-fractura, matriz-vacío y fractura-vórtex respectivamente con unidades $\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$; t representa el tiempo en segundos y r la distancia hasta el pozo en metros.

Reescriben las tres ecuaciones anteriores con factores $(\omega_m, \omega_f, \omega_v, \kappa_m, \kappa_f, \kappa_v, \lambda_{mf}, \lambda_{mv}, \lambda_{fv})$ para hacer adimensional el sistema y derivada fraccionaria para obtener:

$$\omega_m \frac{\partial^{\beta_m} p_{D_m}}{\partial t_D^{\beta_m}} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{D_m}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf} \Delta_{fm}(p_D) + \lambda_{mv} \Delta_{vm}(p_D), \quad (5.102)$$

$$\omega_f \frac{\partial^{\beta_f} p_{D_f}}{\partial t_D^{\beta_f}} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{D_f}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mf} \Delta_{fm}(p_D) + \lambda_{fv} \Delta_{vf}(p_D), \quad (5.103)$$

$$\omega_v \frac{\partial^{\beta_v} p_{D_v}}{\partial t_D^{\beta_v}} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{D_v}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mv} \Delta_{vm}(p_D) - \lambda_{fv} \Delta_{vf}(p_D). \quad (5.104)$$

Haciendo la transformada de Laplace de las ecuaciones (5.99), (5.100) y (5.101), se tiene que:

$$\omega_m u^{\beta_m} \bar{p}_{D_m} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{D_m}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf} \Delta_{fm}(\bar{p}_D) + \lambda_{mv} \Delta_{vm}(\bar{p}_D), \quad (5.105)$$

$$\omega_f u^{\beta_f} \bar{p}_{D_f} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{D_f}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mf} \Delta_{fm}(\bar{p}_D) + \lambda_{fv} \Delta_{vf}(\bar{p}_D), \quad (5.106)$$

$$\omega_v u^{\beta_v} \bar{p}_{D_v} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{D_v}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mv} \Delta_{vm}(\bar{p}_D) - \lambda_{fv} \Delta_{vf}(\bar{p}_D). \quad (5.107)$$

Reescribiendo las ecuaciones anteriores con una notación clásica en ingeniería obtenemos:

$$\omega_m s^{\beta_m} P(s)_{D_m} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial P_{D_m}(s)}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf} (P_{D_f}(s) - P_{D_m}(s)) + \lambda_{mv} (P_{D_v}(s) - P_{D_m}(s)), \quad (5.108)$$

$$\omega_f u^{\beta_f} P(s)_{D_f} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial P(s)_{D_f}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mf} (P(s)_{D_f} - P(s)_{D_m}) + \lambda_{fv} (P(s)_{D_v} - P(s)_{D_f}), \quad (5.109)$$

$$\omega_v u^{\beta_v} P(s)_{D_v} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial P(s)_{D_v}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mv} (P(s)_{D_v} - P(s)_{D_m}) - \lambda_{fv} (P(s)_{D_v} - P(s)_{D_f}). \quad (5.110)$$

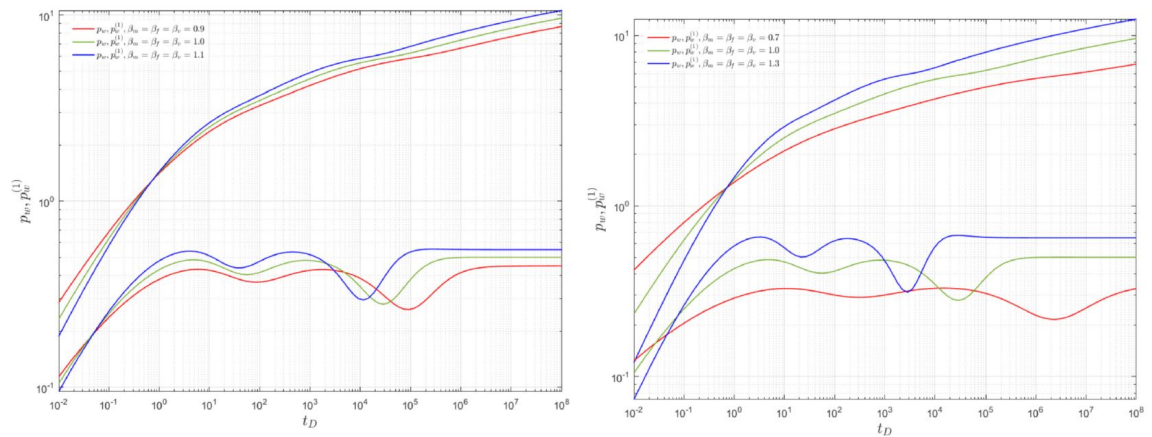
De las ecuaciones anteriores, Martínez las resuelve como ecuaciones de Bessel para llegar a una solución de la forma:

$$P_\omega|_{r_D=1} = \sum_{i=1}^3 D_i K_0(\alpha_i) = \sum_{i=1}^3 A_i D_i K_0(\alpha_i) = \sum_{i=1}^3 B_i D_i K_0(\alpha_i) \quad (5.111)$$

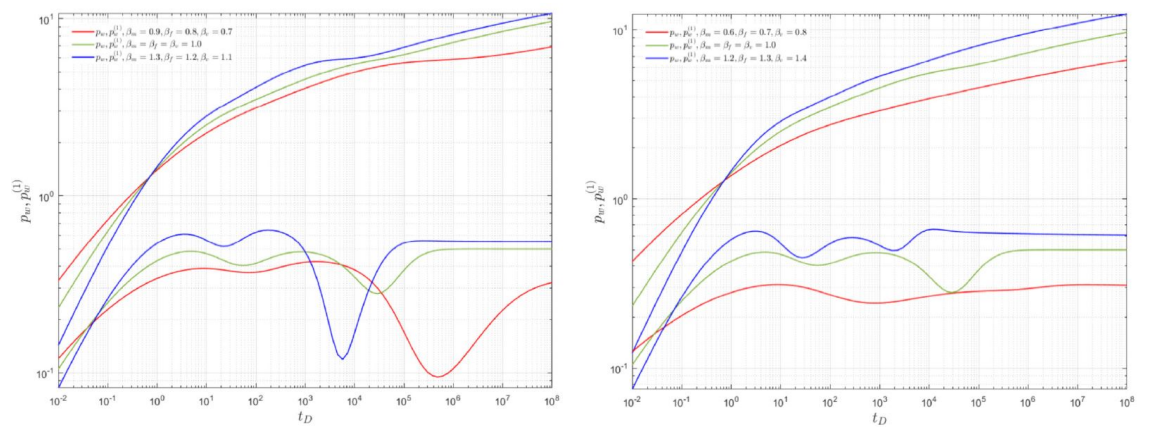
De la solución anterior, Martínez elabora una serie de gráficas muy ilustrativas y mostramos a continuación.

Figura 5.1: Comportamiento de la presión p_w y la primera derivada $p_w^{(1)}$ para diferentes valores de β_m, β_f y β_v . Las soluciones fueron obtenidas con valores particulares de $\kappa_f = 0.75$, $\kappa_v = \omega_f = 0.02$, $\omega_v = 0.8$, $\lambda_{mf} = 10^{-3}$, $\lambda_{vf} = 10^{-8}$ y $\lambda_{fv} = 10^{-5}$. En todos los casos la línea verde corresponde a la solución clásica [Martínez-Salgado et al., 2020].

(a) Gráficas de la presión de salida del petróleo



(b) Gráficas de la presión de salida del petróleo



En su trabajo, Martínez comenta que la solución al sistema de las tres ecuaciones fraccionarias con tres incógnitas, que se les aplicó la transformada de Laplace y que presentan cada una la presión en la matriz, en la fractura y en el vóculos, tienen una solución analítica en el tiempo que no es trivial encontrar. Pensamos, que es posible aplicar la transformada inversa a este sistema utilizando la regla de Cramer, la función Mittag-Leffler y la convolución para encontrar dicha respuesta analítica al problema, como se hizo en la solución que presentamos en la primera sección de este capítulo. La prueba de esta hipótesis queda como un problema abierto para futuras investigaciones.

Notas Finales

Conclusiones

- El Magisterio de los Papas ha denunciado los abusos de la mano del hombre sobre la tierra, que es llamada la casa común, y lo ha marcado como una de las problemáticas principales a resolver. Junto con eso, queda una marcada necesidad de tomar siempre en cuenta el criterio ecológico en el proceso de diseño tecnológico en ingeniería, evaluando los impactos al corto, mediano y largo plazo.
- La atención a las ecuaciones fraccionarias no puede considerarse casual. Se explica por la importancia que tienen las ecuaciones para las aplicaciones prácticas de la matemática. En cualquier área, para obtener soluciones concretas, se deben resolver con mayor frecuencia las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones con exponentes fraccionarios.
- El incorporar el operador diferencial de Karci [Karci, 2013] en el método de Newton Raphson para un campo vectorial nos da una nueva herramienta para resolver sistemas de ecuaciones con exponentes fraccionarios que hemos llamado Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM).
- El método de Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM) que se ha desarrollado se puede aplicar para resolver sistemas de ecuaciones fraccionarias del tipo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Este método tiene la desventaja que requiere $n \times n$ derivadas fraccionarias. Después de calculadas las derivadas, las corridas del análisis de sensibilidad son cómodas y permiten analizar más a fondo los sistemas.
- El método de Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (FNRCM) desarrollado tiene un buen desempeño al encontrar los ceros reales y complejos de ecuaciones del tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Se aplicó el método FNRCM con el operador de Karci [Karci, 2013] para resolver casi mil sistemas de ecuaciones multivariadas con exponentes fraccionarios que modelan un Sistema Fotovoltaico Concentrador Generator Termoeléctrico (CPV-TEG) [De-la Vega et al., 2021], encontrando satisfactoriamente las soluciones con bajas iteraciones y con una sola condición inicial.
- Se aplicó el método FNRCM con el operador de Karci [Karci, 2013] para resolver un modelo con ecuaciones fraccionarias para la inversión en tiempos de incertidumbre encontrando satisfactoriamente las soluciones con bajas iteraciones y con una sola condición inicial.
- La teoría de Karci [Karci, 2013] la hemos implementado en la estructura propuesta por Seghi Rahmat [Rahmat, 2019] para obtener un nuevo operador diferencial fraccionario que hemos llamado operador diferencial Vega-Brambila (VB). Las gráficas elaboradas con esta definición ilustran muy bien las derivadas fraccionarias que existen entre la función y su primera derivada.
- La ecuación fraccionaria de flujo de Fourier ha sido resuelta utilizando el método de diferencias finitas. Al método de diferencias finitas le hemos integrado la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y el operador Vega-Brambila generando dos nuevos modelos. Ambos modelos fraccionarios se desempeñaron bien al solucionar la ecuación diferencial. El resumen se encuentra en la tabla 5.1

Futuras líneas de investigación

- Probar el desempeño del operador diferencial VB en el método Newton Raphson Fraccionario Conforme Multivariable (NRCM) en los sistemas ya resueltos con el método FNRCM y con el operador diferencial de Karci para comparar sus resultados.
- Probar el desempeño del operador diferencial VB para la solución de la ecuación de calor de Fourier por el método de diferencias finitas.
- Analizar si los criterios propuestos por Ortigueira et al. [Ortigueira and Machado, 2015] de las derivadas fraccionarias para el operador VB, en particular el criterio de linealidad, se cumple para el $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+}$ y en $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-}$.
- Publicar un artículo basado en la solución del problema de inversión en tiempos de incertidumbre presentado en el cuarto capítulo de esta tesis.
- Profundizar en el análisis de los Sistemas Fotovoltaico Concentrador Generador Termoeléctrico (CPV-TEG) usando métodos de cálculo Fraccionario Conforme Multivariable.
- Analizar el orden de convergencia para el método FNRCM con los operadores de Karci y el operador VB.
- Investigar el diseño de un circuito que sea capaz de hacer la derivada fraccionaria en el tiempo de una señal.

[Ir al Índice](#)

Bibliografía

Capítulo 1

Auer, Alfons. 1984. *Umweltethik: ein theologischer Beitrag zur ökologischen Diskussion*, Düsseldorf: Patmos-Verlag.

Biervliet, John Harold. 2012. “La ecología humana. Complejidad del espacio y del tiempo”, *Ciencias Sociales y Educación*, Vol. 1/1: 147-162.

Bonell Rosabal, Sheyla. 2009. “Petróleo y biotecnología: análisis del estado del arte y tendencias”, *Acimed (On line)* v.19 n.1.

Buell, Frederick. 2014. “A Short History of Oil Cultures: or The Marriage of Catastrophe and Exuberance”. *Journal of American Studies*, 46/2: 273-293.

Chirico, Adriana. 2014. *Profili giuridici della comunicazione nella Chiesa*. Bari: Cacucci Editori.

Costa, Giacomo - Foglizzo, Paolo. 2015. “Editoriale. L’ecologia integrale”, *Aggiornamenti Sociali*, agosto-settembre. Available in https://www.arpae.it/cms3/documenti/_cerca_doc/ecoscienza/ecoscienza2015_-4/Enciclica_ES4_15.pdf Czarnecka, Magdalena. 2013. “Metafizyka w ekologii? Ekosystem jako Złożony System Adaptacyjny”. *Scientia et Fides*, 1/1: 183-195.

De Gregorio, Laura. 2016. “Laudato Sì: per un’ecologia autenticamente cristiana”. *Stato, Chiese e pluralismo confessionale*, n° 41, available in www.staroechiese.it Dedov, A. G.- Ivanova, E. A.- Sanszhieva, D. A. et al. (2017). “New materials and ecology: Biocomposites for aquatic remediation”, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 51/4: 617-630.

Enrique Alarcón recognovit et instruxit. 2020. *Sancte Thomae de Aquino, Summa Theologiae*, in *Opera Omnia* <https://www.corpusthomisticum.org/>

Enrique Alarcón recognovit et instruxit. 2020. *Sancte Thomae de Aquino, Scriptum super Sententiis*, in *Opera Omnia* <https://www.corpusthomisticum.org/>

Gil Fernández, Juan,trans. 1985. *Las pasiones del alma de Descartes*, Barcelona: Orbis.

Guo, Q. L.- Boufadel, M. C., et al. 2014. “A field experiment and numerical modeling of a tracer at a gravel beach in Prince William Sound, Alaska”. *Hydrogeol* 22: 1795-1805.

Hallett, S. & Wright, J. (2011). *Life without oil: why we must shift to a new energy future*, Amherst, N.Y.: Prometheus Books.

Informe Banco Mundial. 2018. *La pobreza y la prosperidad compartida 2018: Armando el rompecabezas de la pobreza, panorama general del informe*, Banco Mundial, Washington, DC. Available in <https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/30418/211330ovSP.pdf>

Kuhn, Thomas. 2004. *La estructura de las revoluciones científicas*. México: FCE.

Lledó Iñigo, Emilio, trans. 1985. *Ética Nicomáquea de Aristóteles*, Madrid: Gredos.

Megías Quirós, José Justo. 2014. “El dominio de la Naturaleza: de la moderación escolástica al relativismo kantiano”. *Persona y Derecho*. Vol. 70/1: 147-169.

Polo, Leonardo. 2008. *El hombre y la historia*, Pamplona: Cuadernos de Anuario Filosófico.

Polo, Leonardo. 1991. *Quién es el hombre. Un espíritu en el mundo*. Madrid: Rialp.

Pontificio Consejo “Justicia y Paz”. 2004. *Compendio de la Doctrina Social de la Iglesia*, Libreria Editrice Vaticana, n. 166. Available in www.vatican.va Portoghesi, Paolo. 2014. *Il sorriso di tenerezza. Letture sulla custodia del creato*. Città del Vaticano: Libreria Editrice Vaticana.

Puig, Jordi. 2019. “Sensibilidad por el medio ambiente y cristianismo”. *Scientia et Fides*. 7/1: 73-96.

Rehman, Muhammad Moshin. 2012. “Enhanced Oil Recovery Using Electrical Methods”, ProQuest Dissertations and Theses; Thesis (M.S.) The Petroleum Institute (United Arab Emirates); Publication Number: AAT 1535245; ISBN: 9781267992598

Revol, Fabien. 2015. *Pour une écologie de l’espérance. Les chrétiens et la création*. Lyon : Éditions Peuple Libre.

Revol, Fabien. 2018. “L’écologie intégrale comme capacité à aimer”, *Lumen vitae*. XXIII/ 4: 411-424. S.S. Francisco, Exhortación apostólica *Evangelii gaudium*, available in http://www.vatican.va/content/francesco/exhortations/documents/papa-francesco_esortazione-ap_20131124_evangelii-gaudium.html

S.S. Francisco. 2015. *Carta Encíclica Laudato Si. Sobre el cuidado de la casa común*, México: Ediciones Paulinas. Scheid, D.P. 2016. *The Cosmic Common Good. Religious Grounds for Ecological Ethics*. New York: Oxford University Press.

Scola, A. (2015), *Abitare il mondo. La relazione tra l’uomo e il creato*, Bologna: EMI. Sellés, J. F. (1999). *La virtud de la prudencia según Tomás de Aquino*, Pamplona: Cuadernos de Anuario Filosófico (n° 90).

Zampetti, P. L. (1993). “Sovranità degli Stati e problema delle fonti di energia” in Lippolis, L. (a cura di), *Diritti umani, poteri degli stati e tutela dell’ambiente*. Milano: Giuffré.

Zyrin, V. - Ilinova, A.; "Ecology safety technologies of unconventional oil reserves recovery for sustainable oil and gas industry development", Journal of Ecological Engineering, Volume 17, Issue 4, Sept. 2016, pages 35–40.

[Ir al Índice](#)

Bibliografía

- [Arfken and Weber, 2005] Arfken, G. and Weber, H. (2005). *Mathematical methods for physicists*.
- [Beeri et al., 2015] Beeri, O., Rotem, O., Hanas, E., Kantz, E., Braun, A., and Gelbstein, Y. (2015). Hybrid photovoltaic-thermoelectric systems for concentrated solar energy conversion: Experimental realization and modeling. *Journal of Applied Physics*, 118.
- [Brambila Paz, 2011] Brambila Paz, J. d. J. (2011). *Bioeconomía: instrumentos para su análisis económico*. Number 339 B73.
- [De-la Vega et al., 2021] De-la Vega, E., Torres-Hernández, A., Rodrigo, P., and Brambila-Paz, F. (2021). Fractional derivative-based performance analysis of hybrid thermoelectric generator-concentrator photovoltaic system. *Applied Thermal Engineering*. .^{en} proceso de revisión”.
- [Dixit, 1989] Dixit, A. (1989). Entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Political Economy*, pages 620–638.
- [Dixit and Pindyck, 1994] Dixit, A. K. and Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press.
- [Einstein, 1905] Einstein, A. (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann Physik*, 17.
- [Green et al., 2019] Green, M., Dunlop, E., Levi, D., Hohl-Ebinger, J., Yoshita, M., and Ho-Baillie, A. (2019). Solar cell efficiency tables. *Progress in Photovoltaics Res. Appl.*, 27:565–575.
- [Greenpeace, 2009] Greenpeace (2009). Catástrofe ecológica en el Golfo de México. "<http://archivo-es.greenpeace.org/espana/global/espana/report/contaminacion/100607.pdf>".
- [Hilfer, 2000] Hilfer, R. (2000). Applications on fractional calculus in physics.
- [Karci, 2013] Karci, A. (2013). A New Approach for Fractional Order Derivative and Its Applications. *Universal Journal of Engeneering Science*, 3:110–117.
- [Kil et al., 2017] Kil, T.-H., Kim, S., Jeong, D.-H., Geum, D.-M., Lee, S., Jung, S.-J., Kim, S., Park, C., Kim, J.-S., Baik, J., Lee, K.-S., Kim, C., and Choi, W. (2017). A highly-efficient, concentrating-photovoltaic/thermoelectric hybrid generator. *Nano Energy*, 17:242–247.
- [Lacroix, 1819] Lacroix, S. F. (1819). Ve Courcier.
- [Legendre, 2018] Legendre, A. (2018). Retrieved from <https://www.britannica.com/biography/Adrien-Marie-Legendre%0A>.

- [Martínez Palacios, 2008] Martínez Palacios, M. T. V. (2008). Un análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [Martínez Palacios, 2012] Martínez Palacios, M. T. V. (2012). Modelo macroeconómico de riesgos de mercado y política fiscal incierta. Master's thesis, Instituto Politécnico Nacional, México.
- [Martínez-Salgado et al., 2020] Martínez-Salgado, B., Alcántara-López, F., Torres-Hernández, A., Brambila-Paz, F., Fuentes, C., and López-Estrada, J. (2020). Fractional flow equations: A model for pressure deficit in an oil well. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 63.
- [Miller and Ross,] Miller, K. S. and Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.
- [Neils Henrik,] Neils Henrik, A. Retrieved October 16, 2018, from <https://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
- [Ortigueira and Machado, 2015] Ortigueira, M. D. and Machado, J. T. (2015). What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, 293:4–13.
- [Piedra, 2011] Piedra, R. (2011). La función Gamma. variable compleja. Retrieved from <https://hplusplus.files.wordpress.com/2009/01/investigacion-de-la-funcion-gamma-para-variable-compleja.pdf>.
- [Pérez-Higueras et al., 2018] Pérez-Higueras, P., Ferrer-Rodríguez, J., Almonacid, F., and Fernández, E. (2018). Efficiency and acceptable angle of high concentrator photovoltaic modules: Current status and indoor measurements. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 94:143–153.
- [Rahmat, 2019] Rahmat, M. R. S. (2019). A new definition of conformable fractional derivative in arbitrary time scales. *Advances in Difference Equations*.
- [Rodrigo et al., 2019] Rodrigo, P., Valera, A., Fernández, E., and Almonacid, F. (2019). Performance and economic limits of passively cooled hybrid thermoelectric generator-concentrator photovoltaic modules. *Appl. Energy*, pages 1150–1162.
- [Ross, 1975] Ross, B. (1975). *Lecture Notes in Mathematics*. 1 edition.
- [Rowe, 1995] Rowe, D. (1995). *CRC handbook of thermoelectrics*. CRC Press.
- [Struik, 2017] Struik, D. (2017). Joseph Fourier. Retrieved from <https://www.britannica.com/biography/Joseph-Baron-Fourier>.
- [Tamaki et al., 2017] Tamaki, R., Toyoda, T., Tamura, Y., Matoba, A., Minamikawa, T., Tokuda, M., Masui, M., and Okada, Y. (2017). Hibrid photovoltaic and thermoelectric module for high concentration solar system. *API Conference Proceedings*.
- [Tauer, 2004] Tauer, L. (2004). When to get in and out of dairy farming: A real option analysis. Technical report, Cornell University, Department of Applied Economics and Management.
- [Teodoro et al., 2018] Teodoro, G. S., Oliveira, D. S., and de Oliveira, E. C. (2018). Sobre derivadas Fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40(2):e2307.

- [Torres Hernández, 2020] Torres Hernández, A. (2020). Introducción al Cálculo Fraccionario.
- [Torres-Hernández et al., 2020] Torres-Hernández, A., Brambila-Paz, F., Rodrigo, P., and la Vega, E. D. (2020). Reduction of a nonlinear system and its numerical solution using a fractional iterative method. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 9.
- [Wiesenfarth et al., 2017] Wiesenfarth, M., Philipps, S., Bett, A., Horowitz, K., and Kurtz, S. (2017). Current status of concentrator photovoltaic (CPV) technology. *Fraunhofer Institute for Solar Energy Systems. ISE National Renewable Energy Laboratory*. <https://www.ise.fraunhofer.de/content/dam/ise/de/documents/publications/studies/cpv-report-ise-nrel.pdf> (accessed February 18, 2020).
- [Ypma, 1995] Ypma, T. (1995). Historical development of the Newton-Raphson Method. *Siam Review*, 37:531–551.

Ir al Índice

Publicaciones en el marco de esta tesis

- [PubCalabrese et al., 2022] Calabrese, C., Brambila, F., la Vega, E. D., and Hernández, A. (2022). Energía y medio ambiente. una mirada desde la encíclica laudato si'. *Carthaginensia. Revista de Estudio e Investigación*, 73. Aceptado para publicar en el N° 73 (Enero 2022).
- [PubDe-la Vega et al., 2021] De-la Vega, E., Torres-Hernández, A., Rodrigo, P. M., and Brambila-Paz, F. (2021). Fractional derivative-based performance analysis of hybrid thermoelectric generator-concentrator photovoltaic system. *Applied Thermal Engineering*, 193:116984.
- [PubTorres-Hernández et al., 2020] Torres-Hernández, A., Brambila-Paz, F., Rodrigo, P. M., and la Vega, E. D. (2020). Fractional Pseudo-Newton Method and its use in the Solution of a Nonlinear System that Allows the Construction of a Hybrid Solar Receiver. *Applied Mathematics and Sciences*, 7:1–12.
- [PubTorrez-Hernández et al., 2020] Torrez-Hernández, A., Brambila-Paz, F., and la Vega, E. D. (2020). Fractional Newton-Raphson Method and Some Variants for the Solution of Nonlinear Systems. *Applied Mathematics and Sciences*, 7.
- [PubTorrez-Hernández et al.,] Torrez-Hernández, A., Brambila-Paz, F., Rodrigo, P. M., and la Vega, E. D. Reduction of a nonlinear system and its numerical solution using a fractional iterative method. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 6.

[Ir al Índice](#)