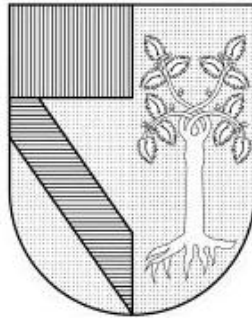


UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ESCUELA DE PEDAGOGÍA

**Con Reconocimiento de Validez Oficial de Estudios
ante la Secretaría de Educación Pública**



" Experiencias estéticas para dotar de sentido al proceso de enseñanza de la Geometría"

T E S I S
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Presenta

Madinina Mauvois Romero

Directora del Programa: Dra. María del Carmen García Higuera

Director de Tesis: Dra. Margarita Espinosa Jiménez

México, D.F.

2016

a la bella Gaia

*Dedico especialmente este trabajo a mis padres,
les agradezco con todo mi corazón la vida que me han dado,
el apoyado siempre incondicional
y la gran ayuda que me dieron para poder hacer toda la maestría,
¡sin ellos nada de estos hubiera sido posible!*

*Agradezco enormemente el tiempo, la atención y
comentarios siempre oportunos de mi asesora Maggy Espinoza
quién me leyó y me ayudó a la construcción de esta aventura desde sus inicios,
confió en mí y me dio todo su apoyo en cada momento para seguir adelante
con muchísima paciencia, dedicación y apoyo hasta el final.*

CONTENIDO

<u>Introducción</u>	9
<u>Capítulo uno. La experiencia estética como una experiencia educativa</u>	14
<u>I.1 Experiencia estética, morfología e historia del concepto</u>	14
<u>I.2 La experiencia estética en John Dewey</u>	20
<u>I.3 Experiencia educativa</u>	23
<u>Capítulo dos. Desarrollo de las habilidades geométricas</u>	25
<u>II.1 Piaget</u>	26
<u>II.2 Etapas del desarrollo cognoscitivo según Piaget</u>	28
<u>II.2.1 Desarrollo del pensamiento sensorio-motriz</u>	30
<u>II.2.2 Desarrollo del pensamiento simbólico</u>	31
<u>II.2.3 Representación articulada o intuitiva</u>	32
<u>II.2.4 El progreso de las operaciones concretas</u>	33
<u>II.3 Desarrollo cognoscitivo espacial según Piaget</u>	34
<u>Capítulo tres. La Geometría y la relevancia de su estudio</u>	38
<u>III.1 Un poco de historia</u>	39
<u>III.1.1 Los Elementos de Euclides</u>	41
<u>III.1.2 El quinto postulado y las geometrías no euclidianas</u>	43
<u>III.1.3 La Topología</u>	46
<u>III.2. La importancia del desarrollo de las habilidades geométricas</u>	48

<u>Capítulo cuatro. Propuesta didáctica</u>	52
<u>IV.1 Fundamentos</u>	56
<u>IV.2 Propuesta</u>	59
<u>IV.2.1 Justificación</u>	60
<u>IV.2.2 Objetivo general</u>	61
<u>IV.2.3 Objetivo específico</u>	61
<u>IV.2.4 Temas selectos</u>	61
<u>IV.3 Ejemplo</u>	63
<u>Consideraciones finales</u>	67
<u>Fuentes de consulta</u>	71

INTRODUCCIÓN

*“Sí, las matemáticas son fascinantes,
y cada vez que un concepto abstracto queda atrapado
en algo tangible
no puedo dejar de maravillarme”
Madinina*

La inquietud de hacer esta investigación referida a las experiencias estéticas como fundamento para dotar de sentido al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría surgió de varios momentos en los que impartí clases de regularización a alumnos que cursaban la secundaria y preparatoria o que se estaban preparando para presentar los exámenes para entrar a la universidad, en ellas, me percaté que una condición muy importante para el entendimiento de estos contenidos, era propiciar que pudieran ser transformados en conocimientos, y para ello, era básica la actitud que el alumno tiene hacia éstos; por ejemplo, a algunos chicos a los que les daba seguimiento, mejoraban en su rendimiento académico y comenzaban a pasar sus exámenes con sólo abrirles el panorama de su relación con las matemáticas y generar un **cambio de actitud**, sin siquiera haber profundizado totalmente en el entendimiento de los conceptos matemáticos en sí.

Las matemáticas puras o abstractas son sin duda una fuente de deleite para aquellos que se dedican a ellas o que han tenido la oportunidad de entender su belleza, pero esto no sucede con la mayoría de las personas que las estudian y para las cuales suelen ser una imposición, por ello, las conciben como algo árido, frío, lejano e inentendible; en general se piensa que son algo difíciles de comprender y que son “sólo para los genios”. Por lo tanto, considero que es relevante proponer **estrategias didácticas** en las cuales a través de generar experiencias estéticas nos acerquen a conceptos y contenidos de la Geometría.

Englobamos estas estrategias didácticas en geometría dentro de la divulgación de la ciencia que están dirigidas para alumnos e instituciones de nivel secundaria, con el fin de llegar a sensibilizar a todos los actores implicados en PEA¹, con el fin de provocar un acercamiento a estos conocimientos desde lo lúdico, lo bello, el arte, etc., desde todas estas posibilidades que abre la experiencia estética

Este trabajo pretende generar un proceso reflexivo acerca de la importancia y del valor de las experiencias estéticas como experiencias educativas, en particular dentro de la **enseñanza de la geometría** en secundaria, por ello es que a lo largo de este documento, se buscará presentar el sustento teórico partiendo del hecho de que existirán **aprendizajes** con significado si se genera dicho cambio de actitud al lograr una apropiación de lo aprendido por medio de los sentidos, situación que resulta al vincular las matemáticas con el contexto cercano, y por tanto, con su belleza. Lo anterior adquiere mayor sentido si tiene en cuenta que desde sus orígenes remotos, las matemáticas fueron desarrolladas, no sólo para efectos prácticos, sino también por razones de **orden estético y espiritual**, por el amor al conocimiento por sí mismo.

El supuesto de esta tesis plantea la relevancia de que generar experiencias estéticas dentro de los procesos educativos es vital, debido a que se generan otro tipo de conexiones o rutas de entendimiento que los procesos puramente racionales; actualmente dentro de la educación formal, y sobre todo con los adolescentes (que es en la edad que nos estamos centrando para la investigación) se da demasiado peso a la razón, quitando importancia al contacto con el conocimiento que se desprende desde lo corpóreo, lo sensorial y el proceso creativo, tan activos, vitales y formativos a esta edad.

¹ PEA es la abreviación de proceso de enseñanza-aprendizaje.

² Lo artístico se refiere al acto de la producción, lo estético al de la percepción, en tanto el goce y lo bello

En particular en el ámbito de las matemáticas esto produce que los alumnos terminan por repetir formulas sin sentido, sin aprender que el verdadero “músculo” del pensamiento matemático es la abstracción. El proceso de abstracción es un proceso creativo-estético.

La intención de este trabajo académico, se centra, no en cambiar las matemáticas en sí, sino en modificar la forma en la que éstas se presentan. Por ello, es que el **objetivo general** de la presente tesis pondera el esbozar propuestas de estrategias didácticas a nivel de la educación secundaria, donde se subraye la importancia del uso de las experiencias estéticas para generar sentido en el PEA en la geometría.

Esta tesis presenta los siguientes **objetivos particulares**:

- Generar un sustrato conceptual definiendo y contextualizando a la experiencia estética. Argumentar el por qué una experiencia estética es primordialmente una experiencia educativa.
- Generar un sustento contextual a la propuesta pedagógica analizando las etapas de desarrollo cognoscitivo, principalmente las referentes al desarrollo sensorio-perceptivo, las del desarrollo de la percepción espacial y la visualización, así como las del desarrollo lógico matemático. Puntualizar la importancia de los primeros años de vida como base de la forma en que aprendemos.
- Entender el contexto histórico, partiendo de como se a desarrollado la Geometría a lo largo de la historia, la importancia de *Los Elementos* de Euclides y del quinto postulado. Concebir las geometrías no euclidianas. Y por último plantear por que es relevante el desarrollo de las habilidades geométricas.
- Estructurar una propuesta, centrada en la geometría, con estrategias didácticas sustentadas en experiencias estéticas.

El trabajo académico presentado, es una propuesta didáctica que se inscribe en el área de la pedagogía experimental, señalada por Landsheere (1996: 13) como: “(...) de una intervención deliberada en una situación o fenómeno para modificarlos según un propósito determinado”.

Pretende por tanto, ser una reflexión de parámetros cualitativos que generen un proceso reflexivo que tienda a “(...) la producción de materiales, técnicas, procesos, organización y entornos que representan los progresos significativos con respecto a lo que ya existe” (Landsheere, 1996: 15; Marcelo y Vaillant, 2009).

Los caminos que se siguen para el desarrollo por capítulos de esta investigación se presentan de la siguiente manera:

- En un principio, en el **capítulo I**, se da sustento teórico e histórico de lo que es una **experiencia estética**, que sienta las bases teóricas que sustentan las estrategias didácticas propuestas. Se retoma para ello la postura que el pragmático John Dewey tiene al respecto, con el fin de desarrollar el concepto de experiencia estética que mejor se apega a este trabajo, valorando su importancia como generadoras experiencias educativas.
- En el **capítulo II** ahondamos el contexto de las experiencias estéticas, apoyándonos en las etapas del desarrollo cognoscitivo según **Piaget**. Esto con el fin de entender dos situaciones principalmente, primero en que etapa de desarrollo se encuentran los adolescentes, pero sobre todo, argumentar la importancia de la aprehensión del conocimiento a través de lo sensorio-motriz.
- En el **capítulo III** hacemos un breve resumen del desarrollo histórico de la geometría. Cabe recalcar que la historia de la geometría se **desarrolla en sentido inverso** que a lo que sucede durante el desarrollo cognoscitivo manejo espacial de

la persona. Al final del capítulo revisaremos la importancia del desarrollo de las habilidades geométricas.

- En el **capítulo IV**, generaremos una propuesta didáctica la cual aterrizamos en la propuesta de un festival matemático, que a manera de intervención irrumpe en las secundarias proponiendo contactar con la maravilla de las sensopercepciones al ver, tocar y oler, y asir las matemáticas. La propuesta es generar un espacio para abrir canales de comunicación para la reflexión, la crítica y la creatividad, y apoyarlas a través de las experiencias estéticas, que a lo largo de la tesis se argumentan que son una forma indispensable para volver la complejidad algo asequible.

Algo que generalmente no se muestra en el ámbito educativo formal es la belleza y la diversión que se pueden encontrar en las matemáticas al ser entendidas o descubiertas. Para sensibilizar a la persona con estos momentos estéticos donde se despiertan los sentidos a través del juego; se propone generar un taller que puede ser llevado a diferentes escuelas y donde las actividades pueden ser adecuadas según la edad de los participantes.

Capítulo uno

LA EXPERIENCIA ESTÉTICA COMO UNA EXPERIENCIA EDUCATIVA

¿Qué pasa cuando vivimos una experiencia estética? ¿Qué cualidades tiene este tipo de experiencia? ¿Tiene algún valor formativo? Éstas son las preguntas a las que intentamos responder y desarrollar en este primer capítulo.

En un primer momento analizando la morfología e historia del término, para posteriormente generar un marco conceptual que de sustento a las estrategias didácticas desarrolladas en el capítulo IV.

I.1. Experiencia estética, morfología e historia del concepto.

“La diversidad de las experiencias estéticas”
Stanislaw Ossowski

El vocablo estético contiene varias acepciones; éste, deriva del verbo griego “*aisthanomai*” que significa sentir (López Quintas, 2010: 29), también lo encontramos traducido como impresión sensorial o percepción y junto con prefijo “*-ika*” de relativo a, se dice que es lo relativo a las sensaciones o relativo a la percepción (Tatarkiewicz, 2001: 348)

A lo largo de los años se han discutido mucho las ideas entorno a la experiencia estética, las que son múltiples y variadas, y en ocasiones se contraponen o contradicen, algunas otras, hacen referencia a asuntos diferentes, así, algunas teorías han intentado crear una definición del concepto, otras una teoría alrededor. Tatarkiewicz (2001: 347-375) en su

obra *Historia de seis ideas* hace un tratado histórico del concepto que se presentará a continuación.

De los primeros puntos a consideración para adentrarse en el concepto es el de diferenciar el término estética según su uso como el adjetivo o como la ciencia (lo estético y la Estética), clave para aclarar la propia definición de lo que es experiencia estética.

La **estética** como ciencia, en resumen, es una rama de la filosofía que se encarga de estudiar la manera en la que el razonamiento del ser humano interpreta los estímulos sensoriales que recibe del mundo circundante. Así como la lógica estudia el conocimiento racional, la estética estudia el conocimiento sensible, el que se adquiere a través de los sentidos. Entre los diversos objetos de estudio de la estética figuran la belleza o los juicios de gusto, por ello, es que se encuentra íntimamente ligada al arte pero, es importante aclarar, va más allá de este.

El termino es muy complejo y hay muchas acepciones de éste, a lo largo del desarrollo histórico filosófico se ha discutido mucho en torno a su significado en profundidad y desarrollado mucha teoría alrededor; partiendo desde la simplicidad, es pertinente quedarnos con la propiedad adjetiva dada en la morfología de la palabra, es decir, lo estético en lo relativo a la percepción.

En su desarrollo histórico el termino de **experiencia estética** llego posteriormente al concepto de estética, por lo que no son coetáneos: “resultado ser un nombre tardío para aquellos fenómenos que habían sido discutidos al menos por dos mil años” (Tatarkieicz, 2001: 348).

El término aparece con los griegos (“*cognitio aesthetica*”) pero no se usa apareado al concepto hasta el siglo XVIII. En ese tiempo el concepto existía y había muchas discusiones entorno al fenómeno, pero otros sinónimos fueron usados en su lugar como *cognitio sensitiva* (del latín) que fue surge en contraposición a *cognitio intellectiva*, y otros

como *sensus animi*, *institutio*, *representatio sensitiva*, *goût*, *taste*, sentido de la belleza, entre otras.

Fue en el siglo XVIII que se mencionó el concepto asociado al término con el filósofo alemán Alexander Baumgarten (Tatarkieicz, 2001), que relacionó la palabra *aesthetica* a *cognitio sensitiva* (conocimiento sensible) y lo sistematizó dándole lugar a una disciplina, en donde se asocia el término de experiencia estética al concepto de percepción de lo bello, denotando a la Estética como la ciencia de lo bello y extendiendo el uso del término en este sentido.

Esta amalgama que se hace entre la apreciación de lo bello y lo estético queda hasta nuestros días, es muy común registrar esta creencia de que estético es sinónimo de lo bello, confundiendo también la estética como ciencia y lo estético como adjetivo. “Lo bello, lo artístico y lo estético² (en su adjetivación) tienen cada uno un ámbito propio” (Tatarkieicz, 2001).

En estos años sin definición hubo dos líneas principales de desarrollo de pensamiento en torno al concepto. “(...) mientras Aristóteles describió la actitud estética, Platón describió la facultad de la mente que es indispensable para experimentar este tipo de experiencia” (Tatarkieicz, 2001). Estas dos líneas han sido seguidas por los estetas hasta nuestros días.

Las diferentes teorías que han aparecido a lo largo de los tiempos han cambiado y algunas veces se han radicalizado y contrapuesto, dado que no es un término fácil de definir y menos de describir junto con sus propiedades, elementos y las actitudes mentales y físicas implicadas en el proceso. Ejemplo de esta polarización se dio durante el periodo de la Ilustración en donde se encuentran dos tendencias, la primera rama es inglesa, su

² Lo artístico se refiere al acto de la producción, lo estético al de la percepción, en tanto el goce y lo bello tiene que ver más con lo subjetivo.

representante es Locke, psicólogo inglés que plantea que “(...) la experiencia estética se la debemos no sólo a las facultades de la percepción, sino además a la intuición” (Tatarkieicz, 2001: 356). La segunda línea es la que se da con Baumgarten, donde plantea esta experiencia estética como la ciencia de la percepción de lo bello (Léveque, 2002), y afirma, que la experiencia estética es conocimiento pero exclusivamente sensual e irracional.

En el siglo XVIII Immanuel Kant, considerado el padre de la estética contemporánea, sistematiza esta disciplina dándole el lugar de una ciencia filosófica. Kant³ (Tatarkieicz, 2001: 360) alude a la Estética Trascendental, indicando que “(...) el juicio del gusto (la estética) no es cognoscitivo, y por tanto no es lógico, sino estético, lo que significa que su base sólo puede ser subjetiva”; ésta es una idea que a lo largo de este trabajo será contrapuesta, debido a que lo que aquí se plantea es que la experiencia estética no sólo aporta conocimiento, sino que es una fuente amplia y primaria de éste.

En Kant es muy notoria esta tendencia que se generó en su tiempo de separar y purificar cada idea o concepto; para tratar de definir la estética y dar un concepto “puro” se genera el término de estética trascendental que no sólo antepone, sino que polariza con el de razón trascendental, generando el sentido de separación entre cuerpo y mente como partes diferentes que se pueden desasociar.

Según Kant (1781: 27) todo el conocimiento comienza con la experiencia. “La experiencia es, sin duda, el primer producto surgido de nuestro entendimiento al elaborar éste la

³ Immanuel Kant (1724-1804) Uno de los más grandes filósofos alemanes desde la época de la Ilustración, en el mundo intelectual de nuestros días hay un Kant de los filósofos, un Kant de la divulgación científica y un Kant pedagogo/científico de la educación. Nace en Königsberg, Alemania, el 22 de abril de 1724, en el seno de una familia de artesanos. A los 16 años ingresó en la Universidad de su pueblo natal. Impartió enseñanza como profesor particular para niños desde el comienzo de sus estudios, dio clases en la universidad a partir de 1755 durante 15 años, y en 1770 fue nombrado profesor titular de lógica y metafísica en la Universidad de Königsberg. Fue rector de la Universidad de Königsberg entre 1783 y 1788. A lo largo de su intensa vida de erudito redactó las obras filosóficas que marcarían la pauta de su tiempo y le darían renombre universal (Kant, UNESCO, 1993).

materia bruta de las impresiones sensibles”, sin embargo plantea que el conocimiento no se reduce al único terreno de la experiencia, dado que ésta nos indica qué es lo que existe, pero no necesariamente señala que tenga que ser así y no de otra manera. Estos conocimientos, que el llama *a priori*, van mas allá de la experiencia, son universales y por sí mismos, independientemente de la experiencia, son ciertos; a diferencia de aquellos, *a posteriori*, que se obtienen de modo empírico. Por tanto, *en el orden temporal*, ningún conocimiento precede a la experiencia y todo conocimiento comienza en ella, pero no necesariamente todo él viene de ella.

La ciencia de todos los principios de la sensibilidad a priori la llamo estética trascendental, en oposición a aquella otra ciencia que contiene los principios del pensar puro, o a priori, que se llama lógica trascendental. El problema aquí no es la búsqueda de esta pureza o detalle con la que Kant pudo describir el tipo de conocimientos que se adquiere, sino que de estas ideas se genero una tendencia a despreciar una cosa y sobre poner otra. Kant proponía la necesidad de la existencia de una ciencia filosófica que sólo se dedicara al estudio del pensamiento a priori.

Al definir la estética trascendental en su libro “*Crítica a la razón pura*” (2005: 42) dice:

La capacidad (receptividad) de recibir representaciones, al ser afectados por los objetos, se llama sensibilidad. Los objetos nos vienen, pues, dados mediante la sensibilidad y ella es la única que nos suministra intuiciones. Por medio del entendimiento, los objetos son, en cambio, pensados y de él proceden los conceptos. Pero, en definitiva, todo pensar tiene que hacer referencia, directa o indirectamente [mediante ciertas características], a intuiciones y, por consiguiente (entre los humanos), a la sensibilidad, ya que ningún objeto se nos puede dar de otra forma.

¿Cómo recibir conocimiento sensible sin la experiencia? Esta pregunta plantea el fundamento de la propuesta didáctica que hacemos, debido a que esta sensibilidad de la que surge y es base de todo conocimiento es la misma a la que nosotros nos referimos y

llamamos como experiencia estética, inseparable de todo proceso cognitivo. Aunque sea un conocimiento lógico trascendental, éste tiene su origen en una experiencia estética.

Las ideas entorno a la experiencia estética durante todos estos años son múltiples y variadas, muchas veces se contraponen o contradicen. Algunas veces hacen referencia a asuntos diferentes. En los siglos que le siguieron se encuentran enlazados, hasta utilizados como sinónimos los conceptos de arte, belleza y estética, para nosotros, como conceptos lo estético, lo bello y lo artístico (en su adjetivación) no son lo mismo. En este mismo debate, también se genera la discusión en torno a lo pasivo o activo de la acción estética, algunos pensadores la definen como mera contemplación; también se ha intentado abarcar el concepto tanto desde la psicología, como desde la filosofía.

Algunas teorías han intentado crear una definición del concepto, otras una teoría alrededor de, pero pocos estetas hacen diferencia entre ambos cometidos. Algunas teorías son descriptivas otras teorizan sobre las condiciones o las facultades para que suceda, algunas lo emparejan con belleza y sublimidad, otras lo contraponen con la razón. Algunos hablan de pasividad o contemplación otros de actividad, empatía, ilusionismo. La dificultad que ha existido en cuanto a formular una definición radica principalmente en que la complejidad del termino apela al carácter somático⁴ del mismo.

La **experiencia estética** comprende todas las características antes descritas, tiene un carácter pasivo y activo, contiene claramente el factor emocional e intelectual, comprende la contemplación, la exaltación y a la empatía. Es lo bello, lo artístico, lo eufórico, lo divino y también, porque no, lo lúdico (Tatarkieicz, 2001).

⁴ Somático se refiere a “the body perceived from within” (Hanna 1986)

I.2. La experiencia estética en John Dewey⁵

Las ideas de John Dewey van justo en la dirección que se quiere plantear para esta investigación, por ello es que se ha abierto un espacio para hacer un resumen de sus ideas principales entorno a la experiencia estética. Una de la razones de su importancia es la de que contextualiza el término, experiencia estética, en el ámbito educativo, lo vuelve pragmático, mientras que anteriormente se mantenía en el área de la retórica.

Según Dewey en su libro *el arte como experiencia* (2008: 41): “**La experiencia** ocurre continuamente porque la interacción de la criatura viviente y las condiciones que la rodean está implicada en el proceso mismo de la vida”, pero una cosa es la capacidad de ser experimentada y otra es que articule *una* experiencia. Entonces ¿Cuál es la naturaleza de una experiencia?

Dice que la **naturaleza de la experiencia** tiene varias cualidades (Dewey, 2004: 124-128), pues incluye un elemento pasivo y otro activo. El elemento activo remite al término *experimento* y el pasivo a *sufrir o padecer* (en el sentido amplio de las palabras); entre estas dos cualidades hay una organización dinámica que marca un ciclo: experimentar algo y después padecer las consecuencias de eso que se ha experimentado. La mera actividad no constituye una experiencia, cuando una actividad se continua en el sufrir las consecuencias, se carga de sentido, aprendemos algo, por ejemplo acercar los dedos a las llama no es una experiencia, se vuelve una cuando sufrimos las consecuencias.

⁵ John Dewey (1859-1952) En la pedagogía contemporánea ocupa uno de los lugares predominantes el filósofo norteamericano uno de los más eminentes representantes de la llamada *Escuela Nueva*. Filósofo abocado a la educación, desarrolló una filosofía que abogaba por la unidad entre la teoría y la práctica. Obtiene su doctorado con una tesis sobre la psicología de Kant. Dewey se orientó en sus estudios hacia el pragmatismo y el naturalismo; cuestionaba los dualismos que oponen mente y mundo, pensamiento y acción característicos de la época, afirmaba que muchos de los errores de la práctica educativa se debían a que estaban fundamentados en una epistemología dualista errónea. El concepto principal que formula relacionado con la teoría del conocimiento es el de la experiencia, manteniendo una concepción dinámica del individuo (Westbrook, 1993).

Al contrario de Kant, Dewey plantea que una separación de la fase del hacer activo de la fase respecto al sufrir pasivo que destruye el sentido vital de toda experiencia y el conocimiento que ésta pueda aportar. El rompimiento de la unión íntima entre la acción y el sufrir las consecuencias, genera una pérdida de sentido. Este dualismo, que se hereda de la ilustración, perdura hasta nuestros días y trae varias consecuencias siendo una de las principales el establecimiento de hábitos mecánicos sin sentido, en palabras de Dewey (2004: 127)

Estamos tan acostumbrados a una especie de pseudoideas, a una media percepción, que no nos damos cuenta de la semimuerta que es nuestra acción mental ni de cuánto más profundas y extensas serían nuestras observaciones e ideas si las formáramos bajo las condiciones de una experiencia vital que nos obligara a usar el juicio: a perseguir las conexiones de las cosas que manejamos.

Aunque la experiencia tiene elementos analíticos y sintéticos que posibilitan los procesos cognitivos, ésta no es primariamente un asunto cognoscitivo; la experiencia es un asunto activo pasivo que trae lo cognoscitivo como consecuencia, recalca Dewey.

La experiencia adquiere **adjetivos de interpretación** que se clasifican según su función en reflexiva, práctica y estética, siendo la última la más importante, en tanto que se muestra como más universal y amplia frente a las otras, y se comporta como experiencia educativa al ser la que cualifica de manera más profunda los juicios críticos que se hacen frente al mundo.

Es claro que los tres elementos aparecen en toda experiencia, pero ésta se adjetiva según el elemento que se recalque o lo que se quiera obtener. Por ejemplo **la cualidad reflexiva** es la del discernimiento de la relación que existe entre lo que experimentamos y su consecuencia, ninguna experiencia con sentido es posible sin algún elemento del pensamiento reflexivo, pero al recalcar este elemento y generar una experiencia reflexiva por excelencia, aumentamos el valor de la experiencia. Si empujamos hacia la reflexión de

un modo preciso y deliberado, se pueden percibir no sólo las conexiones entre los hechos y sus consecuencias, sino los pormenores de estas conexiones que hacen explícitos los lazos conectivos en forma de relaciones.

Cabe recalcar que al generar la intensión para descubrir conexiones específicas entre algo que nosotros hacemos y las consecuencias que resultan, genera un continuo que elimina la tendencia que sucede cuando sólo actuamos, o sólo reflexionamos, o sólo sentimos, últimamente el valor del conocimiento está subordinado a su uso en el pensar.

Por otro lado **la cualidad estética**, lo que se padece, nos enlaza con el mundo. No puede ser separado de lo intelectual, ni de lo práctico, lo estético permite que el acto se vuelva consciente y por lo tanto se genere una verdadera experiencia; no es un lujo vano, es un rasgo que pertenece a toda experiencia completa y normal.

En palabras de Dewey (2008: 24):

La relación de la experiencia predominantemente intelectual y práctica que se ha hecho, intenta mostrar que tener una experiencia no implica tal contraste, al contrario, ninguna experiencia, de cualquier clase que sea, es una unidad, a menos que tenga cualidad estética.

Así, es la cualidad estética la que redondea la experiencia hasta completarla y darle unidad en términos emocionales. Por eso cuando hacemos propuestas pedagógicas desde este ámbito logramos que el aprendizaje llegue y se sostenga de diferentes maneras, creando aprendizajes mas completos y andamios mas sólidos.

I.3 Experiencia educativa

Entonces, ¿tiene la experiencia estética algún valor formativo?

Adquirir un conocimiento es un proceso vivo, una función biológica, según Dewey (2004) el aprendizaje es aquello que ha sido organizado en nosotros para capacitarnos a adaptar el ambiente a nuestras necesidades y a nuestros fines y deseos a la situación que vivimos. La educación es un proceso evolutivo. De tal manera el niño no nace con facultades que han de desplegarse, sino con impulsos especiales de acción que se han de desarrollar mediante su uso en preservar y perfeccionar la vida de las condiciones sociales y físicas bajo las cuales se mueve, por esto hay que acudir a la propia experiencia del niño, es decir que hagan cosas. En este sentido, dice Dewey, la escuela tiene que ser una comunidad embrionaria, donde lo que se haga sobre todo sea construir y producir.

La experiencia, aunque en su primer momento no implica a lo cognitivo, no es su primer fin, sino el cumplimiento del ciclo entre su parte activa y su consecuencia. Nos da un elemento cognitivo como parte de este proceso, y hacia el cual, como pedagogos, podemos empujar.

Al igual que en la experiencia reflexiva, al incidir a propósito (o con un propósito), la experiencia hacia su cualidad estética, generamos una experiencia rica en apertura y sensibilidad. Guiada por este propósito la expresión de este tipo de experiencias es emocional y sensible, de tal manera que opera una criatura viviente, totalmente activa y en movimiento. Sólo hay que aclarar que la receptividad o el padecer las cosas no es un pasivo, como muchas veces se cree, lo pasivo mas bien borra la experiencia. La experiencia estética nos brinda conocimiento desde un lugar muy primario del ser y nos completa el entendimiento.

En las tendencias actuales estos dos factores, la experiencia y lo estético, son un contraste con la educación tradicional, por un lado el de aprender por medio de experiencia y por el otro ir mas allá de la razón y volver a los sentidos, a lo estético. Por

ello al plantear la experiencia estética como eje educativo estamos generando un vuelco, pero éste nos lleva al origen del hombre y a su naturaleza de aprendizaje desde el inicio de su vida.

El reto para nosotros queda en como generar una propuesta pedagógica consistente desde esta perspectiva. En los siguientes capítulos ahondaremos en estos orígenes del aprendizaje en la vida del hombre, en sus orígenes de percepción sensorio-motriz.

Capítulo dos

DESARROLLO COGNOSCITIVO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

*“los conceptos que los niños desarrollan a más temprana edad
han demostrado ser los mismos conceptos
que mejor han resistido
las “revoluciones” de la ciencia”
Piaget*

En este capítulo se reflexionará acerca de cómo el individuo va desarrollando el pensamiento geométrico que es producto de la interacción de la persona con las diferentes propiedades del tiempo y del espacio. Para ello esbozamos de manera sencilla y breve la teoría que Jean Piaget formulo sobre el desarrollo de la inteligencia de los niños a través de diferentes estadios.

En capítulos posteriores veremos que la historia de la geometría se **desarrolla en sentido inverso** a como sucede el desarrollo cognoscitivo para comprender el espacio. Las nociones y propiedades topológicas que tantos siglos les ha costado a los matemáticos desarrollar desde lo formal, se presentan con menos tiempo en el desarrollo de la persona, lo que avala esta perspectiva que se presenta en este trabajo y que aborda el contacto de la persona con las propiedades del espacio en la infancia.

Aunque la propuesta pedagógica de esta investigación se dirige hacia los niños que están entrando en la adolescencia, que se encuentran en la secundaria, es de interés conocer lo que sucede antes de este periodo, porque ahí se encuentran muchas claves que fortalecen la importancia de las experiencias estéticas dentro de la educación y en particular, en el conocimiento de la geometría.

La niñez se vuelve muy interesante para este tipo de estudio, debido a que es durante este periodo donde se forman la mayoría de las estructuras psicológicas que el individuo utilizará a lo largo de su vida.

Veamos entonces como Piaget elabora su investigación acerca del desarrollo cognoscitivo.

II.1 Piaget⁶

Las investigaciones y teorías de Jean Piaget son consideradas, dentro del terreno educativo, de gran autoridad (Richmond, 1993); la profundidad y amplitud de sus estudios es mucha, y aunque es conocido principalmente como psicólogo infantil es zoólogo, matemático y filósofo; uno de sus aportes más importantes se da en el campo de la psicología cognitiva, y durante más de cuarenta años estuvo en la primera línea de la investigación científica sobre los orígenes y desarrollo de las facultades intelectuales en los primeros años de vida.

⁶Jean Piaget (1896-1980), biólogo, epistemólogo, psicólogo y político suizo, aunque jamás ejerció como educador es considerado como tal por la gran cantidad de obras pedagógicas de otros autores que se han desarrollado en torno a las consecuencias educativas de la obra de Piaget (Munari, 1994). Fue director de la Oficina Internacional de Educación (OIE). Lucho para defender y promover el enfoque científico enfocándose en el campo de las ciencias físicas y naturales, en las ciencias del hombre y, concretamente, en la psicología y la epistemología. Descubre la riqueza del pensamiento infantil cuando trabaja en los laboratorios Binet, aquí elabora el primer esquema de su método clínico o epistemología genética como se llamara posteriormente partiendo de las enseñanzas que recibió ahí de Dumas y Simon en psicología clínica y de Brunshvich y Lalande en epistemología, lógica e historia de las ciencias. Posteriormente lo llaman a trabajar en la Casa de los Niños del Instituto Jean-Jacques Rousseau, del cual posteriormente fue codirector, centro privilegiado de la educación moderna dedicado enteramente al desarrollo y al perfeccionamiento de sistemas de educación y prácticas educativas donde llegó a comprender **la distancia que con demasiada frecuencia se paraba las capacidades intelectuales insospechadas de los niños y las prácticas normalmente utilizadas por los maestros de las escuelas públicas**. Fue como director de este Instituto y posteriormente como director de la OIE que lo llevó a descubrir los elementos sociopolíticos que inevitablemente están en juego en toda empresa educativa y a comprometerse a participar en el gran proyecto de una educación internacional.

El estudio que Piaget realiza del pensamiento de los niños entra en el campo de la epistemología genética, que se refiere a los procesos embriogenéticos y ontogenéticos del desarrollo individual. La psicología genética estudia a la psicología en general (inteligencia, percepciones, entre otros) pero trata de explicar las funciones mentales por su modo de formación o desarrollo del niño (Piaget e Inhelder, 2007).

En el momento en el que Piaget desarrolla sus investigaciones se encontraban en boga las pruebas del Coeficiente Intelectual, por lo que se interesó de manera especial, no en los resultados obtenidos en estas pruebas estándar, sino en los errores de pensamiento que los niños cometen, y consideró, que no importa la conclusión de la pruebas si no las líneas de razonamiento que desarrolla cada persona (Gardner, 1994). Piaget no criticó abiertamente la teoría de CI que predominaba en ese momento pero el trabajo que emprendió iba en una dirección opuesta y evidenciaba las debilidades de este programa, dado que estas pruebas sólo se enfocan en la respuesta correcta sin mirar el proceso, a la vez, muchas de ellas se encuentran muy alejadas de la vida cotidiana y reflejan el conocimiento adquirido por vivir en determinado medio social y educacional o los gustos de la propia familia. Rara vez estas pruebas valoran la habilidad para asimilar nueva información o para resolver nuevos problemas. Más aún, las pruebas de inteligencia revelan muy poco acerca del potencial que puede desarrollar un individuo en su crecimiento futuro; o como lo llamaría Lev Vygotsky: “zona de desarrollo potencial”.

Piaget desarrolló a través de varios decenios un punto de vista radicalmente distinto y en extremo poderoso de la cognición humana. Según él, el principio de todo estudio del pensamiento humano debe ser la postulación de un individuo que trata de comprender el sentido del mundo. El individuo construye hipótesis en forma continua y con ello trata de producir conocimiento (Gardner, 1994: 55).

Al inicio de sus investigaciones alrededor de 1920, Piaget, seguía la línea de las pruebas del C.I., trabajando en el laboratorio de Simon, pioneros de este tipo de pruebas e investigaciones y confirmó de nuevo que no importa la exactitud de la respuesta, sino las líneas de razonamiento que invoca el niño, a lo que denominó cadenas de razonamiento.

Las categorías de la razón, clases cualitativas y relaciones cuantitativas, objeto y espacio, causalidad y tiempo son algunos de los temas más importantes en los que Piaget profundizó. Puso acento en la organización mental y las operaciones lógicas, y en el crecimiento de dichas estructuras desde el nacimiento hasta la adolescencia. También estudió los componentes y la organización biológica que es donde se enraízan estas estructuras.

El crecimiento mental es indisociable del crecimiento físico, especialmente la maduración de los sistemas nervioso y endocrino, en el periodo en que se forma el feto, así mismo, las influencias del ambiente adquieren una importancia cada vez mayor a partir del nacimiento, pues aunque el desarrollo del niño no puede limitarse a recurrir a factores de maduración biológica, el ámbito incide en la evolución física y mental (Piaget e Inhelder, 2007)

Para describir el proceso de desarrollo de la inteligencia poniendo el énfasis en el choque individual con el entorno a través de los diferentes estadios, es que se esbozan las raíces biológicas del intelecto, las estructuras. La propuesta que nosotros desarrollamos del conocimiento adquirido a través de las experiencias estéticas comparte y subraya esta visión.

II.2 Etapas del desarrollo cognoscitivo

Las etapas de desarrollo que describe Piaget (Piaget e Inhelder, 2007) describen el crecimiento mental hasta la adolescencia.

Desde su nacimiento o antes, el bebé va comprendiendo el sentido de su entorno, primordialmente a través de sus reflejos, sus percepciones sensoriales y sus acciones físicas. Después de uno a dos años, logra un conocimiento “práctico” o “**sensorio motor**” del mundo de los objetos, en la forma como existen en el tiempo y el espacio. Con este

conocimiento, puede abrirse camino de manera satisfactoria en su ambiente y puede apreciar que un objeto sigue existiendo en el espacio y en el tiempo, aunque esté fuera de su vista.

En seguida el niño que comienza a caminar desarrolla luego **acciones interiorizadas u operaciones mentales**. Se trata de acciones que potencialmente se pueden formar en el mundo de los objetos, pero, debido a una capacidad que apenas emerge, basta con que estas acciones se realicen cerebralmente, de manera que, por ejemplo, en el contexto físico, donde tenga que desplazarse desde un punto de partida familiar, el niño no necesita probar diversas rutas: le basta con calcular que, al desandar sus pasos, regresará a su origen. Al mismo tiempo, también se vuelve capaz de usar símbolos: ahora puede emplear varias imágenes o elementos para que representen objetos “de la vida real” en el mundo, y puede volverse hábil en el despliegue de diversos **sistemas simbólicos**, como el idioma o los dibujos.

Esta evolución de la *interiorización* a la *simbolización* alcanza un punto alto cuando el niño puede realizar **operaciones concretas**. Con este conjunto de capacidades, puede sistemáticamente acercarse del mundo de los objetos y con ello al número, tiempo, espacio, causalidad y cosas parecidas. El niño, que ya no está confinado a sólo actuar de una forma física apropiada con los objetos, puede apreciar las relaciones que se obtienen entre una serie de acciones sobre los objetos, de manera que comprende que éstos se pueden reacomodar y la cantidad sigue siendo la misma; que la forma de un material se puede cambiar sin que se afecte la masa; que una escena se puede ver desde una perspectiva distinta, sin que deje de contener los mismos elementos.

Durante la adolescencia temprana, el joven que es capaz de realizar **operaciones formales**, puede razonar acerca del mundo no sólo a través de acciones o símbolos aislados, sino calculando las implicaciones consecuentes de un conjunto de proposiciones relacionadas.

De manera más amplia describimos a continuación esta secuencia del desarrollo en estadios y períodos que se establecen en virtud de criterios del desarrollo de habilidades, aunque éstas son solamente líneas guía de los resultados generales, pues cada niño las alcanza antes o después que otros.

II.2.1 Desarrollo del pensamiento sensorio-motriz (desde el nacimiento a los dos años)

En un principio los modelos innatos de conducta se ejercitan en el medio ambiente y se modifican por la naturaleza de las cosas que actúan sobre el niño que posibilitan se vayan coordinando sus sistemas sensorio-motrices. El niño va construyendo gradualmente modelos de acción interna en virtud de acciones verificadas; gracias a éstas, comienza a reconocer objetos y con el modelo interno de sus acciones lleva a cabo experimentos con los objetos que puede manipular. A esto se le llama pensamiento sensorio-motriz, es decir acción interiorizada.

El progreso realizado por la inteligencia es enorme: los objetos son permanentes, tienen existencia propia y dejan de ser prolongaciones del yo; además se inicia la presencia de la relación causa y efecto; puede también distinguirse un ritmo temporal de acontecimientos, queda lugar a las secuencias. Tiene un conocimiento práctico del modo en que las cosas se conducen cuando él las manipula. El pensamiento se encuentra dentro del registro sensorio-motriz.

Los objetos se hacen externos y permanentes, y se crea un sistema de relaciones sensorio-motrices entre el niño y los objetos; estas relaciones son las representaciones con las que el niño alcanza este tipo de pensamiento.

En el periodo anterior al lenguaje, a falta de función simbólica, el lactante no presenta todavía pensamiento, ni afectividad ligada a representaciones que le permitan evocar a las

personas o los objetos ausentes en esta etapa, el desarrollo es rápido y de gran importancia porque el niño elabora las subestructuras cognoscitivas que servirán de punto de partida a las construcciones perceptivas e intelectuales ulteriores, así como cierto número de reacciones afectivas elementales que determinaran su afectividad subsiguiente. En este periodo se construye un complejo esquema de asimilación que será la base de las formas de aprendizaje a futuro, en donde se organiza lo real según un conjunto de estructuras espacio-temporales y causales, hay una falta de lenguaje y función simbólica, por tanto las construcciones se efectúan apoyándose exclusivamente en percepciones y movimiento (lo somático o propiocepción)

Para Piaget (según Richmond, 1993), el desarrollo es la sucesión de estadios, la cual se da en una progresión continua, una cosa lleva a la otra, así como la construcción gradual de la inteligencia. Algunos psicólogos establecen que se hace por asociación, para Piaget esto sucede por asimilación, plantea que toda relación nueva es integrada en una estructura anterior, el sujeto se hace sensible en la medida que las nuevas estructuras son asimilables a las estructuras ya construidas, que llama esquemas de asimilación.

Invitando a una pequeña reflexión: si la utilización sistemática de los sentidos crea los primeros hábitos y los primeros símbolos, si ésta es nuestra manera primaria de aprendizaje y crea, según la visión estructuralista, los cimientos ¿qué sucede cuando los quitamos? No sería lógico pensar que a cualquier edad seguimos necesitando de los sentidos para aprender.

II.2.2 Desarrollo del pensamiento simbólico: La representación preconceptual (aproximadamente de un año y medio a los cinco años)

Alrededor de los dos años aparece la representación simbólica. El pensamiento sensorio-motriz se mantiene en línea paralela con esta actividad simbólica.

La función simbólica nace porque la imitación interiorizada (producto final del pensamiento sensorio-motriz) que puede ser evocada en ausencia de las acciones que originalmente crearon las imitaciones. Piaget (2007) llama a esta evocación “imitación diferida”; que posibilita el manejo de imágenes, que son los símbolos que el niño utiliza para su pensamiento preconceptual.

El lenguaje llega a ser posible en virtud de la función simbólica; en un inicio, el lenguaje es preconceptual y no representativo, en tanto que los símbolos del niño están íntimamente referidos a sus orígenes sensorio-motrices. El preconcepto es un intermedio entre el símbolo-imagen y el concepto propiamente dicho.

Por lo que se refiere a la comprensión y representación del espacio, ésta se encuentra limitada al registro sensorio-motriz de la actividad física, así como el concepto de espacio está limitado por la figura de la casa, la figura de las cosas, en la proximidad, separación, continuidad y en lo circundante. Que como veremos más adelante es el comienzo del desarrollo de lo que Piaget llama las relaciones topológicas. Igualmente el tiempo como concepto no tiene significado, pero ciertas clases de experiencia presentan connotaciones temporales, como los ritmos de la vida.

II.2.3 Representación articulada o intuitiva; los comienzos del pensamiento operacional (desde cuatro a los ocho años)

La interacción social con el lenguaje es una de las características más importantes de este periodo y que permite el desarrollo de otros aspectos. Este factor influye en la descentralización de la visión infantil del mundo. Cuando más se relaciona socialmente, y cuanto más usa el lenguaje, más reorienta su modelo mental del medio. Este cambio se produce en un doble sentido: por un lado ordena y relaciona sus representaciones en consonancia con la naturaleza conceptual del lenguaje. Ello incrementa su capacidad de

comunicar coherentemente. Por otro lado, reorganiza sus representaciones para dar paso a la relatividad y pluralidad de los puntos de vista que la interacción social impone.

Los conceptos abstractos de tiempo y espacio quedan aún fuera de su comprensión. Los objetos ocupan un espacio y los hechos tienen su propio tiempo. Hacia el final de esta etapa, los niños comienzan a entender que el espacio puede estar tanto lleno como vacío, y que el tiempo sin acontecimientos (entre un acontecimiento y otro) tiene duración. El movimiento es el principal enlace entre éstas.

Las acciones mentales que producen representaciones se van haciendo más flexibles, móviles y coordinadas entre sí. Sistema interrelacionado.

Las operaciones concretas, son acciones mentales, derivadas en primer lugar de acciones físicas que se han convertido en internas de la mente y, estos “datos inmediatos” pueden reestructurarse en nuevas formas mentales. El contacto con el medio ambiente se mantiene, se necesita aún para reafirmar estas acciones.

Se presentan además las estructuras que dan pie a la reversibilidad y conservación.

II.2.4 El progreso de las operaciones concretas: comienzo de las operaciones formales (de los nueve a los doce años)

Una vez desarrolladas las operaciones concretas permiten que la observación y la experimentación se afinen. Pueden formarse clases complejas y declaraciones concatenadas. Por otro lado se da la aparición del “sistema combinatorio”, desarrollo del pensamiento proposicional y la estrategia hipotético-deductiva.

Para el desarrollo del pensamiento lógico matemático esta etapa es crucial, debido a que se comienza a dar el salto del paso del número a la abstracción de las grafías, que implica

una mayor capacidad de abstracción y del conocimiento de lo que es el lenguaje matemático.

Es en este momento donde el niño tiene que ir al origen de su aprendizaje de esta manera todo el mundo nuevo que se abre al pasar a esta abstracción de la letra al número tiene sentido. Como hemos mencionado antes hay una muy fuerte tendencia en la educación de ser lineal y olvidar el desarrollo del propio niño. Siempre ha que ir hacia delante, al siguiente nivel. Piaget nos da una secuencia de desarrollo y parece que es lineal, pero nos deja ver que siempre hay que regresar a las bases de las formas de aprendizaje.

Piaget tenía una clara inclinación hacia como el niño desarrollaba su parte científica y matemática. Para las matemáticas, sobre todo para el proceso del desarrollo espacial, desarrollo varias teorías, algunas de ellas se contraponían, pero dejó iniciado y abierto este interesante camino de su investigación.

II.3 Desarrollo de las habilidades espaciales

Para Piaget e Inhelder (según Camargo, 2011) la concepción del espacio, sus elementos y sus relaciones no es algo que en el individuo este dado *a priori*, aunque en el proceso de desarrollo se den; cabe indicar que estos conceptos y relaciones se van elaborando paulatinamente en la medida en que el individuo avanza por las etapas de su desarrollo cognitivo, por ello es que la participación activa del sujeto juega un papel decisivo en cómo este proceso de maduración se lleva a cabo.

El conocimiento del espacio se desarrolla primero en la etapa sensorio motriz, posteriormente a nivel representativo se irá flexibilizando, coordinando y haciendo reversibles las imágenes espaciales para convertirlas en operaciones. Tal conocimiento conforma el producto de una larga y compleja construcción.

Piaget establece que existen tres tipos de relaciones espaciales, que como reflexionamos, evolucionan de manera muy diferente a lo largo de la historia que a lo largo del desarrollo cognoscitivo ontogenético. Estas relaciones son topológicas, proyectivas y euclidianas.

Las relaciones topológicas tienen en cuenta las características de los objetos teniendo en cuenta sus propiedades cualitativas, que proporciona el concepto de límite.

Piaget plantea que a pesar de que los niños desarrollan una percepción del espacio circundante desde una edad muy temprana, en realidad desde el inicio que empiezan a concebir los límites y el espacio interior y exterior, no conceptualizan la noción de espacio, ni construyen una representación mental del mismo (Camargo, 2011).

Las relaciones topológicas tienen en cuenta el espacio dentro de un objeto o figura particular, y comprenden relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad. Propiedades cualitativas (Ochita, 1986)

Los espacios proyectivos y euclidiano consideran los objetos y sus representaciones, teniendo en cuenta las relaciones entre objetos de acuerdo con sistemas proyectivos (espacio proyectivo), o de acuerdo con ejes coordenados (espacio métrico o lo que llaman euclideano)

Como bien recalca Ochaíta (1986) hay que notar que **el desarrollo ontogenético de estas relaciones sigue un orden inverso al desarrollo epistemológico**, ya que el niño desarrolla primero el espacio topológico, tanto en el nivel de la acción como en el de la representación. Después vienen el desarrollo de las relaciones proyectivas y euclidianas

En el período sensoriomotor el niño va a ir elaborando un conocimiento práctico del espacio comenzando por las relaciones topológicas, elaborando después las proyectivas y finalmente las euclidianas. Los primeros meses el bebé es capaz de percibir, únicamente,

relaciones topológicas. Después coordina la visión con la presión y nociones de permanencia en los objetos así como su relación con otros objetos o el espacio.

Durante el periodo de las operaciones concretas el niño va elaborando a nivel representativo sus adquisiciones y posteriormente a nivel práctico. Su pensamiento operatorio le facilita la flexibilización y reversibilidad del espacio.

Por último, durante el estadio de las operaciones formales, las operaciones espaciales pueden ser totalmente separadas de la acción real.

Puede entonces considerarse que la didáctica de la Matemática es una disciplina joven. Su estado científico se alcanzó a mediados de la década de los sesenta. En particular, los albores de la Didáctica de la Geometría se ubica por la misma época y los trabajos de Piaget marcan buena parte de este comienzo.

La visión que tienen los niños no es tan infantil, desarrollan conceptos matemáticos y físicos tales como topología, velocidad, tiempo y causalidad, así como acerca de la naturaleza de las ideas de éstos.

Vemos la importancia del periodo sensorio-motor y como una etapa no se termina tajantemente; Piaget (2007) señala: “cada periodo de desarrollo informa, en parte, a los siguientes”. El sistema de los esquemas de asimilación desemboca en una especie de

lógica de la acción, es decir estructuras de orden que constituyen la subestructura de las futuras operaciones del pensamiento. La inteligencia senso-motora conduce a un resultado muy importante en lo que concierne a la estructuración del universo del sujeto: organiza lo real construyendo las grandes categorías de la acción que son: los esquemas de lo permanente, espacio, tiempo y causalidad. En este periodo el individuo sufre una transformación copernicana que se basa básicamente en las “des-centralización”, el punto aquí es que la educación tiende a subrayar esta descentralización y no vuelve a nuestros sistemas primarios de inteligencia.

Cuando vemos el orden teórico o lógico de estas ideas encontramos una progresión muy diferente a la del desarrollo cognitivo: primero vienen las ideas e intuiciones de la topología, después a las ideas de la geometrías sólida por una parte y los conceptos generales de medición. El desarrollo ontogenético de estas relaciones sigue un orden inverso al desarrollo epistemológico.

Capítulo 3

LA GEOMETRÍA y la relevancia de su estudio

*“La geometría ilumina el intelecto y templó la mente.
Todas sus pruebas son claras y ordenadas.
Apenas caben errores en el razonamiento geométrico,
pues está bien dispuesto y ordenado.
Así, no es probable que la mente que se aplica a la geometría con regularidad cometa errores.
De este modo, quien sabe geometría adquiere inteligencia”*
Ibn Khaldun

Este capítulo aborda la evolución histórica de la geometría con el fin de crear un contexto y contraponer a lo visto con la evolución del desarrollo cognoscitivo en el individuo

El músculo de las matemáticas es la abstracción. Abstraer consiste en separar mentalmente una cualidad, estado, acción o fenómeno con independencia del objeto en que existe o por el que existe (Moliner, 2007), dentro del proceso de enseñanza de las matemáticas el énfasis tendría que estar en aprender a utilizar este músculo, esto no siempre sucede, así en las clases que imparto para darme cuenta del desarrollo de la capacidad de abstracción generalmente pregunto: ¿La a del teorema de Pitágoras y la a en una ecuación de segundo grado son la misma? la respuesta que obtengo generalmente es una mirada esquiva que voltea hacia todos lados esperando que no fije la mirada en ella. No tienen idea, esto me señala que su aprendizaje ha consistido en memorizar conceptos sin saber de donde vienen, ni hacia dónde van los procesos de desarrollo y los conceptos, sin un anclaje de la abstracción con la realidad.

Parte de este error en la enseñanza tiene que ver con el paradigma kantiano, debido a que las matemáticas son definidas como ciencia pura, es decir como un cuerpo de conocimiento que puede ser formado absolutamente de conceptos a priori, sin ninguna relación con la experiencia, y se pierde el ejercicio de abstracción. Si se refuerza dentro

de la experiencia, de la que habla Dewey, el ejercicio de la abstracción podría llevar a mover con más ligereza, posteriormente, en los mundos a priori formados por las matemáticas.

El termino geometría proviene del griego antiguo “*geo*” tierra y “*metrein*” medir “medición de la tierra” (Gómez, Figueiras y Marín, 2001:144), por tanto, es la rama de las matemáticas que se ocupa del espacio de los cuerpos que lo ocupan y sus relaciones, así como las propiedades espaciales de un objeto. Es, junto con la teoría de números, una rama de las matemáticas de las más antiguas, surge con el “*homo sapiens*”, debido a que una de las características de racionalidad del hombre es su habilidad de medir y clasificar, en particular el espacio donde vive y sus componentes

Como acertadamente comenta Ivorra (2010) el objeto de estudio de la Geometría se encuentra íntimamente arraigado en la forma de concebir la realidad. Esto desde que el hombre es hombre dentro del desarrollo histórico, pero también desde que el hombre es hombre dentro de la perspectiva del desarrollo del individuo.

Desde sus inicios el individuo clasifica las características espaciales de los objetos. Toda la información que recibimos del mundo que nos rodea, todo lo que vemos, oímos y tocamos, los procesamos en primera instancia en términos geométricos⁷ y/o en términos topológicos⁸.

III.1 Un poco de historia

Como ha sucedido con todos los cuerpos de conocimiento humano, éstos se van cristalizando como ciencia poco a poco a lo largo de su desarrollo histórico, determinado

⁷ Diremos brevemente que lo topológico se refiere a lo cualitativo mientras que los geométrico estudia lo cuantitativo

⁸ Desde ahora quisiera hacer notar que existe una diferencia entre lo topológico como lo describe Piaget, y la Topología que han desarrollado los matemáticos como ciencia.

tanto por factores prácticos, objetivos y subjetivos, como por sucesos de orden mundial (Sigarreta y Ruesca, 2004).

La palabra geometría evoca la imagen de la regla y el compás ya que en sus inicios como ciencia, mucho de su desarrollo fue a partir de las construcciones posibles con estos elementos, creando grandes avances sobre todo en el área de la arquitectura y la ingeniería.

No hay duda alguna que en los tiempos antiguos la geometría era una ciencia semi empírica, una especie de física primitiva. Un punto era un cuerpo de cuya extensión se hacia abstracción, una recta se definía como conjunto de puntos que aparecían confundidos al mirarlos en dirección conveniente, o como imagen de un hilo tenso. Se trataba, pues, de conceptos que, como ocurre siempre con los conceptos, no proceden exclusivamente de la experiencia, ni son consecuencia lógica de ella, pero que se establecen en relación directa con hechos reales. Las propiedades de puntos, rectas, igualdad de segmentos o de ángulos eran al mismo tiempo, desde el punto de vista del conocimiento, propiedades de ciertos fenómenos observados en objetos de la naturaleza Einstein (2005: 677).

La geometría griega fue la primera en ser formal. Pitágoras dio un primer paso de transformación de las matemáticas como una disciplina liberal (apegada a un oficio) dirigiéndola hacia la posibilidad de transformarse en una ciencia matemática, se admitió que la mayor parte de sus propiedades podía ser deducido de un cierto número de ellas, los llamados axiomas, por vía puramente lógica y conceptos a priori.

Como no reducibles lógicamente a otros, y testimonios de su origen empírico, quedaron en el sistema de la geometría sólo los conceptos fundamentales: punto, recta, segmento, etc., y los llamados axiomas. El número de estos conceptos fundamentales lógicamente irreducibles y de axiomas fue reducido al mínimo (Einstein, 2005: 677).

Así la Geometría fue saliendo de la turbia esfera del empirismo para convertirse en una ciencia pura.

III.1.1 Los *Elementos* de Euclides

Los Elementos de Euclides de Alejandría es una obra escrita alrededor del año 300 a. C. que recopila en 13 libros, y que se integra por los conocimientos matemáticos que se habían generado en más de 2000 años (García, 2002). Una obra sustancialmente de naturaleza geométrica. Algunos afirman que, después de la Biblia, es posible que los *Elementos* sean la obra más traducida, pública y estudiada de la civilización occidental.

Los *Elementos* empiezan con una serie de definiciones y cinco postulados (imagen 1) en los que se basan todas las demostraciones de los teoremas presentados por Euclides.

Los primeros tres postulados se refieren a construcciones geométricas (construcción con regla y compas). Por ejemplo, el primer postulado establece que es posible trazar un único segmento de recta que pase por dos puntos diferentes, el segundo establece que este segmento se puede extender indefinidamente hasta formar una línea recta y el tercero nos indica que dado un punto y un radio existe una circunferencia. Los postulados cuarto y quinto, son de naturaleza diferente, el cuarto establece que todos los ángulos rectos son iguales. Esta idea implica que las propiedades geométricas de una figura son independientes de la posición en que se coloque en el espacio.

El famoso quinto postulado, llamado “postulado de las paralelas” dice (más o menos): Si una recta que intersecta a dos rectas hace que los ángulos interiores de un mismo lado sumen menos de dos rectos, entonces, si las dos rectas se prolongan indefinidamente, se intersectarán en el lado en que la suma de los ángulos interiores es menor de dos rectos.

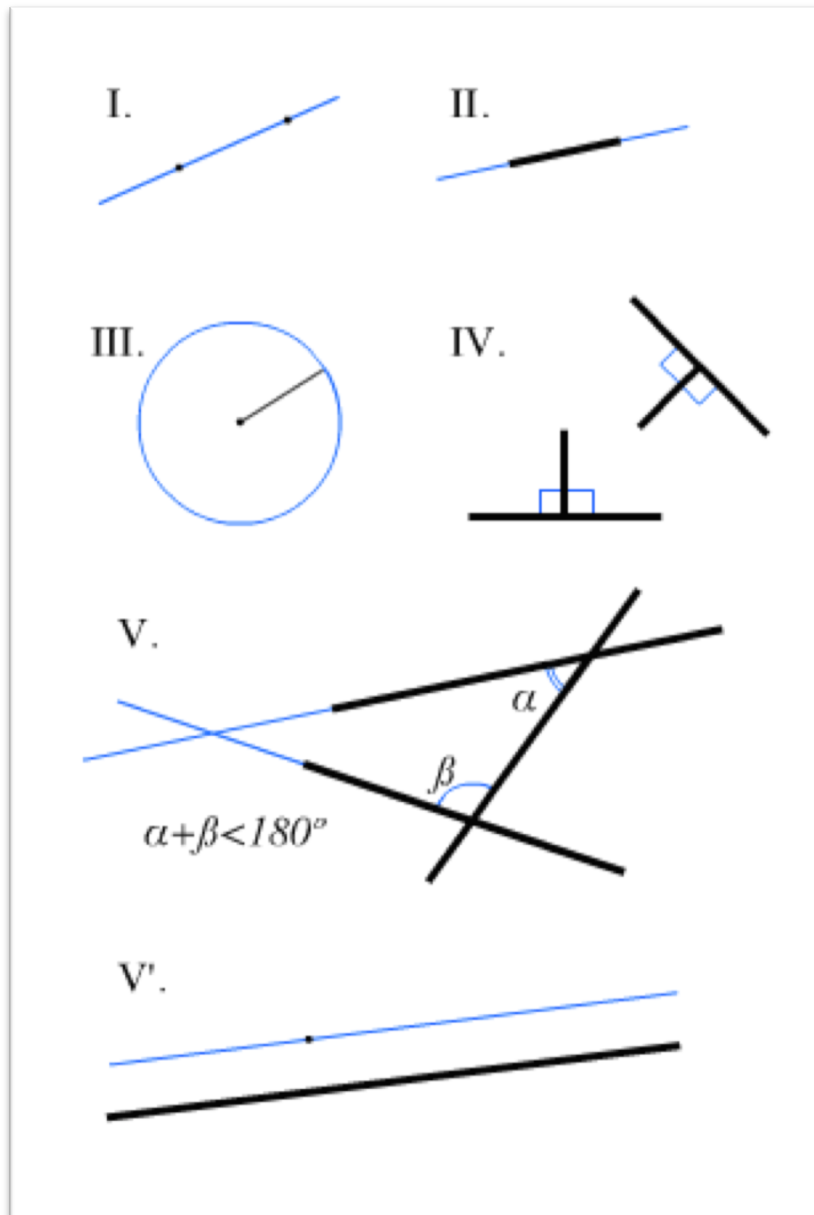


Imagen 1. Los postulados de Euclides
Imagen obtenida de Wikipedia

III.1.2 El quinto postulado y las geometrías no euclidianas

A lo largo de muchos siglos, una lista inmensa de matemáticos que dedicaron considerables esfuerzos por probar que el quinto postulado es consecuencia de los anteriores cuatro. Algunas de estas demostraciones duraron mucho tiempo siendo aceptadas como válidas, hasta que en algún momento se encontraba el error.

Era el llamado axioma de las paralelas. Pero al ver que todos los esfuerzos encaminados a lograr tal demostración fracasaban, debió de surgir poco a poco la sospecha de que dicha demostración era imposible, es decir, que este axioma era independiente de los demás. Y, en efecto, se llegó a demostrar esta sospecha, pues se construyó un edificio sin contradicción lógica, el cual se distinguía de la geometría euclidiana, tan sólo en haber sustituido por otro el axioma de las paralelas. Haber acogido firmemente estos pensamientos y haberlos desarrollado con plena convicción será siempre mérito imperecedero de Lobatschewski por un lado y de Bolyai (padre e hijo) por otro.

Sin embargo, Prócuro propone el siguiente postulado, equivalente al quinto de Euclides: dados una recta y un punto no contenido en la recta, existe una y sólo una paralela a la recta dada que pasa por el punto dado (García, 2002). En 1697, el Jesuita Girolamo Saccheri produjo uno de los más notables intentos de demostración del quinto postulado. La importancia del trabajo de Saccheri reside en el hecho de que supuso que el quinto postulado es falso e intentó obtener una contradicción. Ocurrió que no sólo no obtuvo contradicción alguna, sino que obtuvo, sin darse cuenta el saber del alcance que podría tener lo que estaba haciendo, varios teoremas pertenecientes a lo que hoy conocemos como geometrías no euclidianas. Como el espacio hiperbólico que ahora conocemos y encontramos en patrones de la naturaleza como las lechugas y los corales.

Durante los siglos XVII y XVIII la geometría elemental estuvo tan avocada al problema del postulado de las paralelas que D'Alembert, en 1767, lo llamó el escándalo de la geometría: las Geometrías no euclidianas.

El primer matemático que obtuvo un concepto claro sobre una Geometría distinta a la de Euclides fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el más grande matemático del siglo XIX y quizá de todos los tiempos (Sigarreta y Ruesca; 2004), formuló una nueva Geometría que llamó no euclidiana. El llamado "*Príncipe de las Matemáticas*", significó un golpe para las concepciones filosóficas imperantes; el Kantismo, pues Kant sostenía la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico.

Para 1817 Gauss estaba convencido de que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro, y, empezó a trabajar sobre las consecuencias geométricas que tendría el suponer que es posible trazar más de una paralela a una recta dada por un punto dado

Gauss discutió sobre el problema de las paralelas con su amigo el matemático Farkas Bolyai, quien escribió varias pruebas falsas del postulado. Farkas Bolyai enseñó matemáticas a su hijo, Janos Bolyai, pero a pesar de haberle aconsejado que "no gastara ni una hora de su tiempo en ese problema", Janos trabajó intensamente en él. En 1823 Bolyai escribió a su padre diciéndole: "he descubierto cosas tan maravillosas que estoy sorprendido. Partiendo de la nada he creado un mundo nuevo y extraño" (parafraseado por Sigarreta y Ruesca; 2004: 45)

Bolyai publicó sus descubrimientos en un apéndice de 24 páginas en un libro de su padre. Después de leer el trabajo de Bolyai, Gauss se mostró muy impresionado. En cierto sentido, Bolyai sólo supuso que era posible la existencia de una nueva geometría, pero es precisamente el reconocimiento de esta posibilidad lo que constituye una significativa aportación por parte de Bolyai. Gauss manifestó que él había llegado, varios años antes, a las mismas conclusiones de Bolyai, pero que había decidido no publicarlas. Aunque esta afirmación de Gauss es, sin lugar a dudas, cierta, no representa demérito alguno al logro de Bolyai, así como tampoco lo representa el hecho de que Lobachevski publicara, en 1829, sus trabajos sobre geometría no euclidiana.

Ni Bolyai, ni Gauss tenían noticias sobre los trabajos de Lobachevski debido, principalmente, a que fueron publicados en ruso en la revista “El Mensajero de Kazán”, editada de manera local por una universidad. El intento de Lobachevski por alcanzar una audiencia más grande no tuvo éxito cuando su trabajo fue rechazado por Ostrogradski. La exposición más completa del trabajo de Lobachevski se publicó bajo el título “Investigaciones Geométricas Sobre el Problema de las Paralelas”, la publicación de una versión de este trabajo en francés en la revista Crelle, en 1837, permitió que las revolucionarias ideas de Lobachevski fueran conocidas por una amplia audiencia.

(...) sin embargo, el mérito de tal descubrimiento recae sobre Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), quien el 11 de Febrero del año 1826 en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán expuso su obra con una conferencia y por primera vez informó de los resultados de sus investigaciones sobre la teoría de las paralelas, bajo el nombre de “Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas”, este día se puede considerar como el certificado de nacimiento de las Geometrías No-Euclidianas (Ivorra, 2010: 53)

En síntesis, los resultados obtenidos por Lobachevski pueden resumirse de la siguiente forma (Sigarreta y Ruesca; 2004):

- El axioma de las paralelas no es una consecuencia de los restantes axiomas de la Geometría Euclidiana, o sea, es independiente de ellos.
- Al lado de la Geometría de Euclides donde sí se cumple el axioma de las paralelas, existe otra, la Geometría No-Euclidiana en la cual no se cumple.

Fermat y Descartes descubrieron que la geometría como teoría lógica es equivalente a una estructura algebraica; así surgió la llamada geometría analítica y con ella la clave para una comprensión mucho más profunda de la geometría en general (Ivorra, 2014).

Es claro que el espacio tridimensional nada tiene que ver con el espacio real pero esta abstracción del espacio donde se vive y se mueve la personas, ha permitido grandes avances científicos. “En realidad no existen objetos naturales cuyas propiedades

correspondan exactamente a los conceptos fundamentales de la geometría euclidiana. El cuerpo sólido no es rígido, y el rayo de luz no representa con justeza la línea recta...” (Einstein, 2005: 680)

Así a lo largo de la historia, a partir de este punto, se fueron desarrollando las geometrías, cada una de ellas llevándonos a universos con características propias. Lo mas maravilloso es que como es arriba es abajo, como el macromundo lo encontramos en una partícula, así como la realidad supera a la ficción, así podemos aterrizar lo abstracto en algo concreto, gracias a esta revolución del pensamiento ahora podemos estudiar la geometría de una lechuga gracias a la geometría hiperbólica.

III.1.3 La Topología

La Topología es una rama muy reciente en el desarrollo teórico de las matemáticas. Para llegar a la abstracción y conceptualización de su contenido los matemáticos han tenido que pasar por mucha historia, mientras que sus nociones más básicas son adquiridas en los primeros meses de vida.

Originalmente la topología se conoció como ***Analysis Situs***, nombre dado por Wilhem Leibniz (1646-1716). La idea de la topología la encontramos en el siguiente párrafo escrito por Leonard Euler (1707-1783):

Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue W. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición (...) (Ivorra, 2010: 55).

El párrafo anterior es la introducción del artículo en el que se da la solución del famoso problema de los Puentes de Königsberg en 1726, que es cuando se marca el inicio de la Topología

La topología por tanto, hay que indicar que es la rama de las matemáticas que se ocupa de los objetos geométricos atendiendo a la forma, tamaño o posición, y en general a sus propiedades cualitativas, dado que no requería la determinación de magnitud alguna. Abarcaba propiedades que no varían.

Lo que más nos llama la atención es que dentro del desarrollo histórico lo general y primario, cognoscitivamente hablando, como puede ser la topología comparándola con la geometría se desarrolla en sentido inverso. Esto sucede porque los conceptos aunque perezcan fáciles e intuitivos son muy complejos al momento de querer generarles una estructura que permita su análisis. El hecho es que si permitiéramos en el momento del aprendizaje la comprensión no sólo analítica, sino también estética, tal vez llegaríamos más rápido a su entendimiento y generaríamos más vínculos potencializando la ciencia.

El énfasis que ponemos al abrir un espacio para la topología es porque forma parte del aprendizaje desde nuestra primera infancia, este momento que Piaget describe como el pensamiento sensorio-motriz lo que nos enseña, además de muchas más cosas, es como es el espacio (cualitativamente hablando) en el que vivimos. Por ello al desarrollar formas de enseñanza tenemos que buscar formas de aproximación no necesariamente desde lo teórico. Las experiencias estéticas nos dan una gran oportunidad para la enseñanza de la topología desde una aproximación sensorial más que teórica.

III.2 La relevancia del desarrollo de las habilidades geométricas

Y a todo esto ¿Por qué es importante estudiar Geometría? ¿Qué aporta su estudio?

La ciencia del espacio vista como una herramienta para describir y medir figuras y espacios, es una base para construir y estudiar modelos del mundo físico, fenómenos del mundo real. La geometría ayuda al individuo a entender, describir e interactuar con el espacio que lo rodea. Promueve el razonamiento deductivo y es fuente de modelos.

Cada área de la Matemática requiere de un tipo de razonamiento distinto para su estudio debido a las notables diferencias que existen entre ellas. Por ejemplo, al pensar en una fórmula podemos tener dos vertientes: lo algebraico y lo geométrico. Por un lado que tanto podemos hacer y deshacer la fórmula y teoremas que de ella se desprenden. Por otro es ¿Cómo se ve? ¿Dónde vive o puede vivir esta formula? Esta segunda fase es del tipo al que el razonamiento geométrico conlleva.

La Geometría es formadora de razonamiento lógico y desarrolla habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica.

El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia.

Frecuentemente se observa que los contenidos geométricos se presentan mecánicamente mediante un enfoque axiomático o algebraico en el que se enfatiza desde un primer momento el desarrollo de habilidades para hacer demostraciones formales, dentro de las cuales exigen que la comprensión del individuo se ubique en un nivel de desarrollo mental

el cual no siempre ha sido alcanzado desde todos los aspectos (algebraica y geoméricamente hablando). La falla estriba en la forma abstracta de demostrar las propiedades geométricas (Viedman, 1992). Tales metodologías de enseñanza carecen de actividades destinadas a la construcción del conocimiento geométrico.

La enseñanza de las Matemáticas se encuadra en actividades que enfatizan la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, lo que trae como consecuencia que procesos de visualización, argumentación y justificación no tengan un papel preponderante en la disciplina. La Geometría es la más afectada ya que se presenta como un conjunto de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejados de la realidad.

Camargo y Acosta (2004) señalan que el desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con el desarrollo cognitivo, actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Esta visión contextualizada puede utilizarse para justificar un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro donde la geometría ayude a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida.

Por ejemplo, se puede profundizar y sintetizar los aspectos geométricos al trabajar problemas y situaciones concretas que tienen que ver con la comprensión del espacio a partir de sus relaciones como la simetría, la forma y la dimensión. También se puede integrar la historia de la geometría en su enseñanza, para permitir al alumnado tener la noción de la existencia de otras geometrías, o buscar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas como el arte y promover su aplicabilidad en contextos reales.

Según Gamboa y Ballesterro (2010) en términos más generales los principios didácticos que se desarrollan y es importante integrar al momento de su enseñanza son:

- *Principio globalizador o interdisciplinar*: Consiste en un acercamiento consciente a la realidad, donde todos los elementos están estrechamente relacionados entre sí.

- *Integración del conocimiento:* El conocimiento no está fragmentado, sino que representa un saber integrado, lo que implica también una integración de los objetivos, contenidos, metodología y la evaluación.
- *Contextualización del conocimiento:* Los conocimientos son adaptados a las necesidades y características de las estudiantes y los estudiantes, a partir del uso de hechos concretos.
- *Principio de flexibilidad:* La organización y administración del proceso educativo debe ser adaptable a las necesidades del alumnado, sin perder de vista el logro de los objetivos propuestos.
- *Aprendizaje por descubrimiento:* Todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiantado, de manera que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
- *Innovación de estrategias metodológicas:* El grupo docente debe buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.

La Geometría es el lenguaje de la vida; mas allá de las metodologías o de buscar una aplicación práctica de lo que nos aporta su estudio, la pregunta no es para qué nos sirve, si no que se transforma dentro de la persona, en su evolución, en la evolución de lo humano con una comprensión sensorial de la geometría, cómo incide en el ser, pero también como incido el ser en ella, como crea geometría. Tal vez la geometría se vuelva una inspiración si se obtiene esta capacidad de crearla, de sentirla, de vivirla y no sólo se impone como un deber ser. La Geometría no es producto acabado, es un lugar en el que se puede y debe desarrollar la creatividad.

Capítulo cuatro

PROPUESTA DIDÁCTICA

“Lo único que interfiere en el aprendizaje es la manera de enseñar”

A. Einstein

En este capítulo desarrollamos algunas estrategias didácticas para llevar a la práctica el uso de las experiencias estéticas en la enseñanza de la geometría.

Partimos del principio de que todos somos inteligentes. La inteligencia implica el desarrollo de potenciales humanos que todos tienen y que son desarrollados a diferentes niveles dependiendo de la complejidad de la vida que cada persona; por ejemplo, no es lo mismo un adolescente que vive en el campo que ayuda a su familia en la siembra, que otro que vive en la ciudad y que está en contacto con la tecnología de manera cotidiana, el desarrollo de sus potenciales será distinto aunque igualmente válido. Dentro del ámbito de la educación, interesan los procesos de aprendizaje y los caminos de desarrollo de éste a partir de la inteligencia⁹, dado que utilizan experiencias estéticas en los diversos escenarios donde está se desarrolla; para esta tesis en particular nos enfocaremos en los procesos de desarrollo del pensamiento geométrico tratando de aportar riqueza a su enseñanza si éstos son trabajados con experiencias estéticas.

Para un didacta una pregunta eje es: ¿Cómo se logra el conocimiento a partir de un proceso de enseñanza?, planteada de una mejor manera: ¿Qué procesos desarrollan la inteligencia o las distintas formas de pensamiento en un proceso de enseñanza?

⁹ Existe una sola inteligencia que implica la capacidad de resolver problemas, comprender: entender, abrazar, penetrar, rodear la realidad con el conocimiento generado; es la capacidad de ordenar pensamientos y coordinarlos con acciones; esta se divide en una diversidad de inteligencias según los potenciales desarrollados.

En este ámbito Howard Gardner¹⁰ (1994) maduró la teoría de las inteligencias múltiples donde postula “la existencia de muchas y distintas facultades intelectuales o competencias, cada una de las cuales puede tener su propia historia de desarrollo” en lo individual o lo social. El desarrollo cognitivo o de las inteligencias tiene factores tanto biológicos como sociales de diferente índole, es un proceso complejo donde actúa una diversidad de variables.

Haciendo referencia a lo que se buscaba en el desarrollo de la Teoría de las Inteligencias Múltiples, hay que reconocer que Gardner buscó identificar las habilidades intelectuales medulares, dado que cumplen con ciertas características o “signos”; ante esto, no hay que dejar de aclarar puntualmente lo que señalaba: “no existe, y jamás puede existir, una sola lista irrefutable y aceptada en forma universal de las inteligencias humanas”, pues depende del nivel de análisis que se esté utilizando, la neurofisiología, por ejemplo.

De estas inteligencias específicas, la denominada *inteligencia logicomatemática* requiere una capacidad de abstracción a partir de la realidad circundante de la persona, por ello es que se da por evidente la importancia del estudio de las matemáticas para la vida, pero más allá de llevar nuestros pensamientos a la importancia de su estudio para el futuro individual y de relevancia social, la propuesta que aquí se desarrolla intenta crear momentos vividos y presentes de satisfacción, llenos de ¡eureka!¹¹

Investigaciones recientes sugieren un ir y venir en el proceso cognitivo dado entre el individuo y el ambiente donde éste se desarrolla y se propone la extensión del cerebro más allá del cuerpo, más allá de la piel, habla de la mente enraizada o “embebida” en el ambiente y la sociedad donde se desarrolla el individuo. Generalmente ante lo propuesto, cabe indicar que estamos acostumbrados a una visión mecanicista donde describimos el

¹⁰ Howard Gardner (1943) es conocido en el ámbito de la ciencia y la educación por sus investigaciones en el análisis de las capacidades cognitivas y por su teoría de las inteligencias múltiples; realizó estudios en psicología y neuropsicología en la Universidad de Harvard, donde actualmente es profesor e investigador. (Gardner, 1994)

¹¹ Es decir, satisfacciones por el conocimiento y el gusto por trabajarlo.

proceso intelectual linealmente: los sentidos leen, adquieren información que llega a nuestro cerebro y éste la procesa. Esta nueva visión habla de un cerebro compartido donde la información va de ida y vuelta entre el sujeto y el ambiente, y ambos se transforman (plasticidad del cerebro y de la memoria celular o ADN) por este intercambio.

Hay que recordar que coloquialmente se dice que las matemáticas son una ciencia exacta que se dedica al estudio de la abstracción o de entes abstractos, es decir que extraer de los objetos sus propiedades primarias o esenciales, al punto de excluir al objeto inicial y sus relaciones.

Con base en mi experiencia y en relación a mis estudios, puedo señalar que las matemáticas son esta posibilidad de abstracción de las características básicas del entorno que permiten a la persona convivir y “jugar” con ellas. Vivir en la abstracción. No sólo implica capacidad de abstracción en un sentido, sino que implica el ir de lo concreto a lo abstracto, pero también de lo abstracto a lo concreto.

La matemática es inherente al desarrollo del pensamiento de todos los seres humanos. Por ello, considero que es importante mencionar que este proceso de abstracción es de la misma índole que se vive durante los procesos artísticos o intelectuales creativos, a los que he denominado en el contexto de la enseñanza de las matemáticas como experiencias estéticas, por ello es que para mí, las matemáticas no es ni una ciencia, ni un arte, sino todo lo contrario, una simbiosis que resulta en algo más grande y abarcador.

La propuesta didáctica que en este capítulo se presenta, implica entender la complejidad del proceso de desarrollo del pensamiento matemático desde o con ayuda de esta simbiosis, que además de ampliar el entendimiento, permite apreciar la maravilla de la precisión y armonía que se genera.

La **geometría**, que es una rama de las matemáticas, consiste en vivir esta abstracción pero relacionándola con el espacio, los objetos que viven dentro de él, sus propiedades y

sus relaciones. Aquí no sólo se desarrolla la capacidad de la abstracción si no también la de la visualización, ésta nos permite formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto

Recordando hay que señalar lo estudiado en esta tesis, que la geometría es una rama de las matemáticas y es de las más antiguas, debido a que aparece con el “*homo sapiens*”, pues una de sus características de racionalidad, es su habilidad de medir y clasificar, particularmente el espacio donde vive y sus componentes.

El termino geometría proviene del griego “*geo*” tierra y “*metrein*” medir, evocando siempre la imagen de la regla y el compás. Cabe indicar que se desarrolló en la antigüedad de manera muy práctica y empírica junto con la arquitectura, la navegación, la astronomía, pasando después a campos menos prácticos y más abstractos.

Dentro de la geometría, se da el proceso de desarrollo topológico, el cual se conoció como ***Analysis Situs***, nombre dado por Leibniz (1646-1716); la topología es por tanto, dentro de la geometría, una rama de las matemáticas que se ocupa de los objetos geométricos atendiendo a la forma, tamaño o posición, en general a sus propiedades cualitativas, pues no requiere la determinación de magnitud alguna.

En el **desarrollo del pensamiento geométrico** se hace referencia a cómo es que las personas desarrollan su pensamiento con nociones geométricas, es decir espaciales y abstractas, en acciones cotidianas. El desarrollo de este tipo de habilidades y pensamientos matemáticos es un proceso que va adquiriendo a lo largo de la vida y los ámbitos en donde se desarrolla son de diversas índoles y que no están enraizado exclusivamente en los fundamentos de la matemática, ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir y tratar con ideas matemáticas incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana: al observar la naturaleza, clasificar objetos, medir superficies, contar, pesar, ordenar secuenciar, comparar.

Así podemos decir que la construcción del pensamiento matemático posee niveles y profundidades, que por un lado se ubica el pensamiento sobre tópicos matemáticos y por el otro, en los procesos del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento.

Se entiende entonces que el pensamiento matemático opera sobre una red que es tejida con conceptos desde los elementales hasta los más complejos, la cual se va construyendo poco a poco a lo largo de la vida. Factores como la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos o de representación y la metacognición juegan un papel fundamental en este tejido, que ayuda a la aglutinación de los conceptos.

Lo que nos interesa de este proceso son las maneras en que los alumnos se vinculan, relacionan y apropian de los conceptos y procesos matemáticos, nos interesa entender los caminos que se construyen para llegar a apropiarse de un concepto, las razones de ellos, los procedimientos, las explicaciones, los argumentos, las escrituras, formulaciones verbales, entre otros, que se desarrollan y que después intervienen en modelar estos procesos, por ello es que la propuesta que se presenta busca proveer andamiajes diferentes a los tradicionales que aporten otros horizontes y maneras para la construcción del aprendizaje, centrados en la experiencia estética.

IV.1 Fundamentos de la propuesta

Si se reflexiona en los procesos que hoy atraviesa la enseñanza de las matemáticas, podemos apoyar las ideas que al respecto Farfán aporta (2012: 16):

Aunque esos hallazgos han jugado un papel fundamental en el terreno de la investigación contemporánea, las curriculas matemáticas y los métodos de enseñanza han sido inspirados durante mucho tiempo sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente

apoyados en la memoria o en el empleo de algoritmos, donde con frecuencia el estudiante se encuentra imposibilitado de percibir las relaciones que existen entre sí, los diversos procedimientos con las aplicaciones más cercanas de su vida cotidiana y se priva entonces de experimentar en carne propia sus aprendizajes en escenarios distintos a los que le proveen en el salón de clase.

He percibido varios errores dentro del proceso de enseñanza que además dan pauta a la propuesta aquí formulada, algunos tienen que ver con la falta de perspectiva de los que en esencia las matemáticas son, algunos otros parten de una falta de entendimiento del desarrollo cognoscitivo y otros con la falta de promoción de los procesos metacognitivos.

Uno de los principales “errores” en la enseñanza ordinaria de la geometría es que se prosigue el orden lógico histórico y no el orden del desarrollo cognitivo natural que atraviesan las personas, recordando lo que vimos en los dos capítulos anteriores dentro del ámbito del desarrollo cognitivo primero se desarrollan el entendimiento de las propiedades cualitativas y después las cuantitativas (en términos geométricos primero la topología antes que geometría), cuando dentro de la currícula de la educación básica no se ven las nociones de ésta, es hasta que se llega a la universidad y sólo si se estudia matemáticas que se puede tener una aproximación a estos conceptos. ¿Por qué sucede esto? Por el desarrollo histórico y los conceptos tan complicados que han tenido que desarrollar los matemáticos para poder abarcar este tema. Porque al enseñarlo no se piensa en enseñar lo intuitivo para después pasar a lo complejo y formal y se enseña desde lo formal desde el inicio, entonces para poder acceder a ideas topológicas, por ejemplo, se tiene que tener un bagaje matemático formal muy amplio, cuando se podría acceder a estos conceptos desde ámbitos más primarios que se desarrollan en la infancia de manera natural.

Una de las propuestas que se hacen en este capítulo es el del acercamiento a estos conceptos desde la experiencia estética y que desde hay definiciones fácilmente abarcables sin necesidad de llegar a la complejidad de las formulas.

Otro error también de índole cognitiva es que dentro de la enseñanza se produce una fractura del continuum en este proceso de apropiación, debido a que en un momento de la formación se determina que a partir de cierta edad la razón es la principal vía de conocimiento, quitando la vía de la experiencia estética (perceptiva y cualitativa), lo que produce que la mayoría de las personas en un punto del proceso de abstracción dejan de entender lo que es y lo que están haciendo, y comienzan a trabajar con fórmulas que no tienen ningún sentido.

La propuesta que hacemos solventa de una u otra manera estos “errores”, se intentan diversos estímulos y andamios para mejorar estos procesos de aprendizaje, no dejándole todo al lado cognitivo, sino también generando otros estímulos sensibles y de sociabilización para potencializar los momentos didácticos por medio de las experiencias estéticas como un canal relevante en los procesos de aprendizaje y como fundamento y estructura del conocimiento a través de la razón¹².

Así proponemos un momento que se detiene en el tiempo donde se puede oler, ver, oír, probar, jugar y disfrutar por todos los medios posibles de la Geometría.

Algo que generalmente no se muestra en el ámbito educativo formal es la belleza y la diversión que se pueden encontrar en las matemáticas al ser entendidas o descubiertas. Para sensibilizar a los niños con estos momentos estéticos donde se despiertan los sentidos a través del juego; se propone generar un taller que puede ser llevado a diferentes escuelas y donde las actividades pueden ser adecuadas según la edad de los participantes.

¹² El trabajo no sólo en lo perceptivo hacia afuera sino también de lo somático o la percepción interior y metacognición.

IV.2 La propuesta:

FESTIVAL MATEMÁTICO

*“La ciencia y el arte son parte de lo mismo,
son avatares de la creatividad humana.
Son parte del intento humano de crear entendimiento del universo,
del mundo a nuestro alrededor.
Es nuestro intento por influenciar las cosas,
nuestro universo interno y nuestro universo externo.
La ciencia proporciona un entendimiento de una experiencia universal
y las artes proporcionan un entendimiento universal de una experiencia personal. Son parte
de nosotros, son parte de un continuo.”*

Mae Jemison

Astronauta, médico, coleccionista de arte y bailarina

El Festival matemático permite al estudiante generar experiencias estéticas para sensibilizar acerca de lo que las matemáticas y en especial la geometría pueden llegar a ser; este festival parte de talleres lúdicos donde se adapten diversos espacios para convertirlos en espacios educativos.

La palabra taller tiene una condición polisémica, de múltiples sentidos, hay talleres de teatros, literarios, talleres de capacitación, de carpintería. También dentro de la educación se suele usar el termino a reuniones de características muy diferentes entre sí.

En lo que se refiere a la etimología del término (Cano, 2012: 25), el termino taller proviene de la palabra francesa “*atelier*”, que refiere al lugar donde trabaja un artista plástico o escultor, y que reúne a artistas conocedores de determinada técnica u obra con el fin de

compartir o aprender del maestro. A su vez, el “*atelier*” provienen de “*astelle*” (“astilla”), en referencia los astilleros, lugares donde se construyen o arreglan barcos.

Para este trabajo definimos **un taller educativo** como: un dispositivo de trabajo con grupos, que es limitado en el tiempo y se realiza con determinados particulares, permitiendo la activación de un proceso didáctico sustentado en la integración de teoría y práctica, el protagonismo de los participantes, el diálogo de saberes, y la producción colectiva de aprendizajes, operando una transformación de las personas participantes (Cano, 2012: 26)

El trabajo por talleres es una estrategia pedagógica que además de abordar el contenido de una asignatura, enfoca sus acciones hacia el saber hacer, es decir, hacia la práctica de una actividad teniendo como fin la elaboración de un producto tangible. En esencia el taller “se organiza con un enfoque interdisciplinario y globalizador, donde el profesor ya no enseña en el sentido tradicional; sino que es un asistente técnico que ayuda a aprender” (Maya, 2007: 17)

IV.2.1 Justificación

La mayor parte de las personas piensan que las matemáticas son algo aburrido, complicado o simplemente inasequible, que están llenas de extraños símbolos que sólo ahuyentan; somos pocos a los que nos parecen fascinantes. Creo que la diferencia entre unos y otros radica básicamente en si éstas han sido contextualizadas en una vivencia, o no; es decir si al momento de su enseñanza sólo se enfocaron en aburridas formulas a repetir, o se permitió al alumno relacionarlo con algo tangible, agradable, maravilloso y/o útil.

IV.2.2 Objetivo general

El Festival Matemático busca sensibilizar a alumnos, maestros e instituciones educativas sobre el potencial de belleza y diversión que se puede encontrar dentro de la enseñanza de las matemáticas en especial de la geometría. Es importante proponer diferentes miradas al proceso del aprendizaje de la matemáticas.

IV.2.3 Objetivos específicos

- La propuesta es un festival que opere a través de talleres que ayuden a dar una mejor idea de lo que la geometría es o pueden llegar a ser, hasta el punto de convertirse en algo apasionante cuando se captan.
- Utilizar diferentes recursos como los sentidos, el reciclaje, el arte, la creación y el análisis para acercar a esta rama de las matemáticas desde diferentes perspectivas y profundizar su entendimiento.
- Concebir que la geometría son el lenguaje de la naturaleza.

IV.2.4 Temas selectos

Se hará un recorrido a través de distintos temas que van de lo simple a lo complejo; tomando en cuenta el desarrollo cognoscitivo del individuo. Se abarcarán diferentes temas: números y sus relaciones, factores de cambio y espacios, privilegiando todo el tiempo su visualización. Estos elementos serán abordados desde distintos ángulos donde se promoverá la participación de los alumnos a través de la discusión, exposiciones y la construcción de objetos.

En general las acciones que permitirán desarrollar las experiencias estéticas en la propuesta parten de relacionar el entorno geométrico con la persona a partir del manejo de:

- Burbujas. Propiedades topológicas
- Origami y papiroflexia. Simetrías y propiedades de los polígonos regulares
- Sensorama matemático. Fracciones
- Conceptos que se pueden entender desde la corporeidad. Como gravedad y quinto postulado.
- Quipu. El tiempo cero. Logaritmos
- Fibonacci. Sucesiones
- Esferas de Dandelin. Cónicas
- Planilandia. Espacios topológicos
- Corales. Espacio hiperbólico
- Doodling. Reforzar conceptos en general

La Educación Secundaria forma parte del nivel básico, esta propuesta didáctica se centran en estudiantes que están en este nivel y que por diversas circunstancias no tienen los elementos para acercarse a los contenidos matemáticos desde esta perspectiva, la propuesta con adaptaciones puede ser llevada a distintos ámbitos, campos de conocimiento o edades.

IV.3 Un ejemplo: Geometría de papel

*“Euclides no tenía para sus clases en Alejandría
la abundancia de papel que nosotros hoy disfrutamos.
Pero seguro que de haber dispuesto de papel lo hubiera utilizado a fondo
¿Qué hacer doblando papel?
¡Infinidad de cosas!”
Miguel Guzmán*

Taller 1: Geometría de papel

Temas: Papiroflexia, sólidos platónicos, módulos de Sonobè

Objetivo: Realizar uno de los sólido platónico (polígonos regulares en R3) con módulos de Sonobè.

Material: Hojas de papel de colores, tijeras.

Duración: 1h

Entorno: Festival matemático.

Contexto:

La papiroflexia, cuya raíces provienen del latín *papiro* (papel) y *flectere* (doblar), es el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado sin usar tijeras ni pegamento. Su origen esta situado en Japón donde para nombrarlo se utiliza la palabra *origami* (conformada por dos caracteres *ori* doblar y *kami* seda o papel).

Es en China donde se inventa el papel en los primeros siglos de la era cristiana y llega a Japón en el siglo VI d.C.; con el papel hizo su aparición la papiroflexia, a la que podemos considerar como un arte, una ciencia y un entretenimiento a la que Miguel de Unamuno llamaba cocotología. Es a Akira Yoshizawa, una leyenda viva del Origami, a quién le debemos la simbología actual de las instrucciones de plegado de modelos que ha permitido la difusión internacional.

La belleza de la papiroflexia esta en su simple geometría. En cada trozo de papel hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas. La mejor manera de observar esta relación es desplegar un modelo y observar: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices donde intuitivamente hay unas “matemáticas” funcionando.

Su **importancia en el aprendizaje de las matemáticas**: como estimulante de la actividad cerebral, permite desarrollar diferentes contenidos, desarrollo psicomotricidad fina y percepción espacial, desarrolla los procesos de visualización, relaciona a las matemáticas con el arte, genera creatividad.

Los **sólidos platónicos** son los poliedros más famosos, aunque en su momento Platón en su momento les atribuyo muchas propiedades algunas de ellas un tanto mágicas su verdadero poder es que son los cinco poliedros regulares que existen en R^3 , es decir el espacio Euclideo de tercera dimensión: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro.

Un poliedro se puede definir como un conjunto conexo (es decir, es aquel cuyos planos que contienen a una cara no penetran en otra parte a el poliedro) de R^3 formado por un número finito de polígonos planos que se juntan de manera que cada lado del un polígono pertenece exactamente a otro polígono del poliedro. Los polígonos se llaman caras y sus lados aristas. Dividen al espacio en dos partes, una no acotada y otra acotada a la que llamamos interior.

Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de aristas. En R3 sólo existen 5.

Dentro de la papiroflexia hay dos corrientes en general: la que busca plasmar animales con toda exactitud a partir de la observación y por otro se han desarrollado métodos matemáticos para buscar la precisión. Surge otra rama que se llama papiroflexia modular o "*unit origami*" en el cual se pliegan varias piezas sencillas independientes que se acaban encajando para formar un modelo. Quién más ha impulsado esta modalidad es la japonesa Tomoko Fusé.

Los módulos de Sonobè es un de las muchas unidades que se usa para hacer origami modular, con ellos se pueden hacer los 5 sólidos platónicos de una manera más sencilla que si intentáramos hacerlos desde una hoja simple de papel. Son muy populares dentro de la papiroflexia porque desde formas muy simples de doblado se consiguen gran cantidad de formas sólidas, fáciles de ensamblar y con sistemas muy flexibles.

No se conoce con claridad el origen de los modulos de Sonobè, su nombre es dado gracias a varios libro sobre origami modular que escribieron juntos dos reconocidos creadores de origami: Toshie Takahama and Mitsunobu Sonobé

Breve descripción:

Se hará una breve semblanza a los participantes del taller de cuales son los sólidos platónicos, se les enseñaran ejemplo de ellos y de derivaciones mas complicadas hechas a base de los módulos de Sonobè. Cada participante elegirá uno de los 5 que quiera realizar. Se mostrara como se realiza el modulo Sonobé correspondiente y se les dará tiempo para hacer los que requiera su figura. Mientras tanto se platica la historia de la papiroflexia y particularmente la de los módulos que están desarrollando. Al final se les guía en el proceso de ensamblaje.

Este ejemplo es uno de los tantos ejemplos que se desarrollan para la totalidad del Festival donde la idea es crear una inmersión de los participantes en la belleza de las matemáticas.

Cuando me preguntan sobre mi tesis uno de los ejemplos que más utilizo para tratar de describir y ejemplificar la propuesta es la manera en la que dentro de las escuelas francesas enseñan a contar, sumar y restar en sus primeros años a los niños de maternal, básicamente es a través de todas las posibilidades que tienen los niños con los dedos de sus manos. Es este tipo de aprendizaje básico y sensorial al que queremos remitirnos, nuevamente, para dar sentido a algo que para muchos no tiene.

Consideraciones finales

La educación es un proceso evolutivo inherente a todo ser vivo, el aprendizaje es aquello que ha sido organizado en nosotros para capacitarnos a adaptar el ambiente a nuestras necesidades y a nuestros fines y deseos a la situación que vivimos.

Este aprendizaje nos es dado a través de experiencias. La experiencia según Dewey ocurre continuamente porque la interacción de la criatura viviente y las condiciones que la rodean está implicada en el proceso mismo de la vida, pero hay que diferenciar que uno es la capacidad de ser experimentadas y otra es que articulen *una* experiencia. La experiencia incluye un elemento pasivo y otro activo. El elemento activo remite al término *experimento* y el pasivo a *sufrir o padecer* (en el sentido amplio de las palabras); entre estas dos cualidades hay una organización dinámica que marca un ciclo: experimentar algo y después padecer las consecuencias de eso que se ha experimentado. La mera actividad no constituye una experiencia, cuando una actividad se continua en el sufrir la consecuencias se carga de sentido, aprendemos algo.

Podemos empujar a propósito (o con un propósito, didáctico en este caso) la experiencia hacia alguna cualidad. Al empujar una experiencia a su cualidad estética, con la atención dirigida hacia los sentidos, generamos una experiencia rica en apertura y sensibilidad. Guiada por este propósito la expresión de este tipo de experiencias es emocional y sensible, de tal manera que opera una criatura viviente, totalmente activa y en movimiento. La experiencia estética brinda conocimiento desde un lugar muy primario del ser y nos completa el entendimiento. En palabras de Dewey (2008):

La relación de la experiencia predominantemente intelectual y práctica que se ha hecho, intenta mostrar que tener una experiencia no implica tal contraste, al contrario, ninguna experiencia, de cualquier clase que sea, es una unidad, a menos que tenga cualidad estética.

Así, es la cualidad estética la que redondea la experiencia hasta completarla y darle unidad en términos emocionales.

Al referirnos a las experiencias estéticas, en las tendencias actuales, estos dos factores, la experiencia y lo estético, son un contraste con la educación tradicional, por un lado el de aprender por medio de experiencia y por el otro ir mas allá de la razón y volver a los sentidos, a lo estético. Por ello al plantear la experiencia estética como eje educativo estamos generando un vuelco, pero este nos lleva al origen del hombre y a su naturaleza de aprendizaje.

El reto queda para nosotros es salir de lo teórico y generar propuestas didácticas consistentes desde esta perspectiva.

Durante el periodo de la primera impronta y todo el periodo sensorio-motriz el aprendizaje es, en su mayoría, adquirido a través de experiencias estéticas, y en fases posteriores del desarrollo cognitivo quedan latentes estas primeras formas en las que aprendimos. Nuestra propuesta plantea que al volverlas a utilizar creamos aprendizajes más completos, y de cierta manera mas sencillos para el individuo ya que así es como primero aprendió a aprender.

Una etapa no se termina tajantemente, dice Piaget (2007) “cada periodo de desarrollo informa, en parte, a los siguientes”, y plantea que el sistema de los esquemas de asimilación desemboca en una especie de lógica de la acción, es decir una estructuras de orden constituyen la subestructura de las futuras operaciones del pensamiento.

La inteligencia senso-motora adquirida en los primeros años de vida, conduce a un resultado muy importante en lo que concierne a la estructuración del universo que el sujeto organiza desde lo real, construyendo las grandes categorías de la acción que son: los esquemas de lo permanente, espacio, tiempo y causalidad. En este periodo también el

individuo sufre una transformación copernicana que se basa básicamente en las “descentralización del yo” , el punto aquí es que la educación tiende a subrayar esta descentralización y no vuelve a nuestros sistemas primarios de inteligencia.

La didáctica de la Matemática es una disciplina joven. Su estado científico se alcanzó a mediados de la década de los sesenta. En particular, los albores de la Didáctica de la Geometría se ubica por la misma época y los trabajos de Piaget marcan buena parte de este comienzo.

El conocimiento del espacio se desarrolla primero en la etapa sensorio motriz, posteriormente a nivel representativo se irá flexibilizando, coordinando y haciendo reversibles las imágenes espaciales para convertirlas en operaciones. Tal conocimiento conforma el producto de una larga y compleja construcción.

Piaget establece que existen tres tipos de relaciones espaciales, que evolucionan de manera muy diferente a lo largo de la historia que a lo largo del desarrollo cognoscitivo ontogenético. Estas relaciones son topológicas, proyectivas y euclidianas.

Las relaciones topológicas tienen en cuenta las características de los objetos y sus propiedades cualitativas, que conforman los conceptos de límite, proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad. La visión que tienen los niños permite desarrollar estos conceptos y otros tales como topología, velocidad, tiempo y causalidad, así como algo acerca de la naturaleza de las ideas en sí mismas, desde experiencias estéticas.

Cabe señalar que el desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con desarrollo cognitivo, actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Esta visión contextualizada puede utilizarse para justificar un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro, donde la geometría ayude a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida.

La ciencia del espacio (la geometría) vista como una herramienta para describir y medir figuras y espacios, es una base para construir y estudiar modelos del mundo físico y fenómenos del mundo real. La geometría ayuda al individuo a entender, describir e interactuar con el espacio que lo rodea. Promueve el razonamiento deductivo y es fuente de modelos.

Para ser coherentes con lo geométrico, es importante crear espacios se conciba a la Geometría como el lenguaje de la vida, mas allá de las metodologías o de buscar una aplicación práctica del qué nos aporta su estudio, que sea un espacio donde se cree Geometría, y tal vez la geometría se vuelva una inspiración si se obtiene esta capacidad de crearla, de sentirla, de vivirla y no sólo se impone como un deber ser. La Geometría no es producto acabado es un lugar en el que se puede desarrollar la creatividad.

Fuentes de consulta

- Alsina, C., (2008). *El club de la hipotenusa*. 5ª edición. Barcelona: Editorial Ariel.
- Ander Egg, E. (1999). *El taller: una alternativa de renovación pedagógica*. Buenos Aires: Magisterio Río de La Plata. p. 5
- Camargo, L. (2011). *El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría*. Reflexiones, Revista Colombiana de Educación, N. 60. Bogotá, Colombia.
- Cano, A. (2012). *La metodología de taller en procesos de educación popular*. Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales, 2 (2), 22-51. En Memoria Académica. Disponible en:
http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.5653/pr.5653.pdf
- Chavarría, M., Villalobos, M., (2004). *Metodología para la elaboración de tesis*. Segunda Edición. México: Trillas.
- Devlin, K., (2002). *El lenguaje de la Matemáticas*. Edición en español. Barcelona: Editorial Robinbook.
- Dewey, J., (2008). *El arte como experiencia*. Edición en castellano. Barcelona: Paidós.
- Dewey, J., (2004). *Democracia y educación*. Sexta edición. Madrid: Morata.
- Eco, U., (1977). *Cómo se hace una tesis*. Barcelona: Gedisa.

- Einstein, A., (1926). *Geometría no euclídea y física*. Scienti & studia, Sao Paulo, v. 3, n. 4, p. 677-681, 2005.
- Gardner, H., (1994). *Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples*. Segunda edición en español. México: FCE.
- García, M. G., (2002). *El Siglo de la Geometría. Apuntes de la Historia de las Matemáticas*, Vol. 1, No. 2, p. 5-15. Universidad de Sonora, división de ciencias exactas y naturales.
- Gamboa Araya, R., Ballesterio Alfaro, E., (2010) . *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista Electrónica Educare, vol. XIV, núm. 2, julio-diciembre, pp.125-142. Universidad Nacional Heredia , Costa Rica.
- Hanna, T., (1986). *What is Somatics?*. Somatics: Magazine-Journal of the Bodily Arts and Sciences. Disponible en: <http://somatics.org/library/htl-wis1> [consultado el 27 de febrero del 2015].
- Ivorra, C., (2010). *Geometría*. Disponible en: <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm> (consultado el 21 de Octubre de 2014)
- Kant, I., (2005). *Crítica a la razón pura*. Quinta edición. Madrid: Taurus.
- Kanz, H. (1993). *Immanuel Kant (1724-1804)*. Perspectivas: revista trimestral de educación comparada. París, UNESCO: Oficina Internacional de Educación, vol. XXIII, núm. 3-4.

- Landsheere, Gilbert de, (1996). *La investigación educativa en el mundo: con un capítulo especial sobre México*. Primera edición en español. México: FCE.
- Léveque, J. (2002). *Estética o ciencia de lo bello*. España: Maxtor.
- López Quintas, A., (2010). *La experiencia estética y su poder formativo*. Segunda edición. Bilbao: Deusto
- Lobo, N., (2004) *Aplicación del modelo propuesto en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría*. Multiciencias, 04, núm. 1. Universidad del Zulia, Punto Fijo, Venezuela.
- Lovell (1961). *The growth of Basic Matematical and Scientific concepts in children*. Inglaterra: Univesity on London
- Moliner, M., (2007). *Diccionario de Uso del español*. Madrid: Gredos.
- Marcelo y Vaillant. (2009). *Desarrollo profesional docente. ¿Cómo se aprende a enseñar?*. España: Narcea.
- Maya Betancourt, A., (2007). *El taller educativo, ¿Qué es? Fundamentos, cómo organizarlo y dirigirlo, cómo evaluarlo*. Segunda edición. Cooperativa editorial magisterio, Bogotá, Colombia. p. 17
- Munari, A., (1994). “*Jean Piaget (1896-1980)*”. *Perspectivas: revista trimestral de educación comparada*. París, UNESCO: Oficina Internacional de Educación, vol. XXIV, núm. 1-2, págs. 315-332.

- Ochaíta, E., (1983). *La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial*. Estudios de Psicología nº 14/15, Universidad Autónoma de Madrid (p. p. 93 -108)
- Pansza, M., Pérez, E., Morán, P. (2013). *Operatividad de la didáctica*. Decimo tercera edición. México: Ediciones Gernika.
- Piaget, J., Inhelder (2007). *Psicología del niño*. Decimoséptima edición. España: Ediciones Morata.
- Piaget, J. (1972). *El Mundo Físico del Niño*. Physics Today (p. 23). Traducción: Juana Gonzales Hernández. Revista Elementos (p. p. 58-61)
- Richmond, P. G., (1993). *Introducción a Piaget*. 15ª edición. Madrid: Editorial Fundamentos, Colección Ciencia.
- Sigarreta, J. M., Ruesca, P., (2004). *Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No. 1, 85-101. Universidad de Moa, Cuba.
- Tatarkiewicz, W., (2001). *Historia de seis ideas: Arte, belleza, creatividad, mimesis, experiencia estética*. Sexta edición. España. Edigrafos.
- Westbrook, R., (1993). *John Dewey (1859-1952)*. Perspectivas: revista trimestral de educación comparada. París, UNESCO: Oficina Internacional de Educación, vol. XXIII, núm. 1-2, págs. 289-305.
- Blanco, C., Otero, T. (2005) *Geometría con papel (papiroflexia matemática)*. SCTM05 sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas. Universidad da Coruña, Santiago de Compostela

- T. Fusé: *Unit origami: Multidimensional transformations*. Japan Publications, Tokyo, 2000
- Royo, J., (2007) *Matemáticas y papiroflexia*. Revista Sigma nº21. central de Publicaciones del Gobierno Vasco