UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ECEE

MAESTRÍA EN GESTIÓN DE RIESGO

INCORPORADA A LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA RVOE 2007252

"SELECCIÓN DE CARTERA Y GESTION DE RIESGO PARA UNA SOCIEDAD DE INVERSION CON FONDOS COTIZADOS Y SU APLICACIÓN AL MERCADO FINANCIERO MEXICANO"

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN GESTIÓN DE RIESGO

PRESENTA:

ARTURO JOSÉ DEL MORAL MUNGUIA

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. FRANCISCO ORTÍZ ARANGO

MÉXICO, D.F. 2013

I N D I C E

INDICE DE TABLAS E ILUSTRACIONES

TABLAS

ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

Al decidir sobre la asignación eficiente del capital entre diversas alternativas para obtener la mayor rentabilidad, un inversionista debe considerar tres factores básicos: los rendimientos esperados, la liquidez y el riesgo asociados. Resulta claro que el primer factor tendrá mayor relevancia en el proceso de decisión, de modo que el inversionista buscará obtener el mayor rendimiento con un nivel de liquidez razonable, y sobre todo, con el menor riesgo posible.

Por definición, los individuos son aversos al riesgo, de forma que estarán dispuestos a intercambiar una inversión por otra más riesgosa, si y solo si, esta les proporciona mayor rentabilidad, y en grado suficiente para compensar la incertidumbre sobre los rendimientos futuros.

En este sentido, dentro de las estrategas para la gestión del riesgo, el concepto de diversificación no es nuevo y resulta casi intuitivo. Es evidente que la asignación de recursos entre varias alternativas es generalmente menos riesgosa que la selección de una única opción, de suerte que no es accidental que esta haya sido la estrategia más utilizada para la administración de riesgos a lo largo de la historia. Sin embargo, no fue sino hasta la mitad del siglo XX que se dio inicio al estudio sistemático de la diversificación a partir del celebre trabajo de Harry Markowitz, que resulta fundamental para la construcción de portafolios de inversión mediante el criterio de media-varianza y el concepto de frontera eficiente.

El citado modelo, que supera ya los cincuenta años, no fue utilizado de manera regular por los administradores de activos de todo el mundo sino hasta hace relativamente poco, pues no se contaba con la tecnología adecuada para el manejo de la información. Actualmente, las herramientas informáticas están disponibles, y su fácil acceso y bajo costo han permitido la implementación y desarrollo de diversos modelos de selección de carteras diversificadas de inversión; sin embargo, dada su simplicidad, el modelo de media-varianza continúa siendo el estándar en la industria de fondos de inversión en todo el mundo.

Pese a su popularidad, el enfoque de media-varianza está basado en una gran cantidad de supuestos, y simplifica extremadamente la realidad, y ha resultado insuficiente ante la complejidad y diversidad de alternativas de inversión actuales. La principal debilidad del modelo radica en el supuesto de normalidad de la distribución de rendimientos para todos los activos financieros, lo que lleva a desestimar los eventos extremos para instrumentos no lineales o cuando los rendimientos no siguen una distribución gaussiana.

Eventos como las crisis mexicana, rusa y asiática en los noventas, los atentados terroristas del 11 de septiembre de 2001, y más recientemente las crisis hipotecaria de los Estados Unidos, o la crisis de deuda soberana en Europa, han puesto de manifiesto la necesidad de contar con metodologías más robustas para la selección de carteras de inversión, que consideren el comportamiento de los mercados ante condiciones extremas como las citadas. Es importante señalar que ante la globalización de los mercados financieros, estos eventos poco frecuentes, también llamados “cisnes negros”[(*)], tienen un mayor impacto y persistencia.

De esta manera, ante la necesidad de incorporar nuevos y mejores enfoques, investigadores a lo largo del mundo han desarrollado diversos modelos de selección de cartera, que aunque se basan en el esquema básico de media-varianza, ha tratado de fortalecerlo, en la búsqueda de metodologías acordes a la complejidad actual de los mercados financieros.

La lista de modelos es larga. Los hay bajo consideraciones de uno o varios periodos,

---

(*) La metáfora “Cisne Negro” se usa para referirse a eventos altamente improbables pero con alto impacto, y fue popularizada por Nassim Nicholas Taleb, quien desarrolla toda una teoría a propósito de este tipo de incidencias.

en tiempo continuo o discreto, y otros que incorporan medidas de riesgo adicionales, o incluyen costos de transacción, entre otros enfoques. El objetivo siempre es el mismo: encontrar la mezcla de activos que proporcione el mayor rendimiento esperado, con el menor riesgo posible y un gado de liquidez razonable.

La mayoría de los modelos utilizan a la varianza, la volatilidad o al popular valor en riesgo como medidas de dispersión, lo que presenta serias deficiencias desde el punto de vista teórico, pues dichos parámetros no cumplen con las condiciones necesarias para ser consideradas medidas coherentes de riesgo. Concretamente, las medidas de riesgo mencionadas no son subaditivas, lo que implica que el riesgo total de un portafolio podría ser mayor que la suma de los riesgos de sus componentes considerados individualmente.

Dado lo anterior, un modelo de selección de cartera idóneo debería estar basado en alguna medida coherente de riesgo, tal como el valor en riesgo condicional, que representa la pérdida esperada más allá del valor en riesgo. Esta medida de riesgo además, permite captar eventos de pérdida extremos, presentes en situaciones atípicas de los mercados financieros

Desgraciadamente, la mayoría de los modelos que incorporan el concepto de coherencia de riesgo, resultan difíciles de implementar, a la vez que su fuerte carga teórica evita que sean adoptados por la industria de administradores de carteras, por lo que en la práctica, el estándar continúa siendo el modelo de media-varianza, que ha resultado insuficiente en nuestros días.

De esta forma, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal el de seleccionar e implementar un modelo de portafolio que, incorporando el concepto de coherencia de riesgo, sea capaz de detectar situaciones de asimetría o baja curtosis en las distribuciones de rendimientos, haciendo posible el diseño de carteras de inversión estables bajo condiciones extremas de los mercados financieros. Para esto, se ha realizado la investigación documental necesaria a fin de describir y analizar los modelos existentes para elegir el que resulte idóneo por su base teórica y facilidad de implementación, y que pueda ser aplicado en la construcción de carteras de un modo práctico y recurrente por la industria de administradores de activos.

El modelo propuesto, cuyo fundamento teórico se desarrolla como parte de esta investigación, opera a partir de escenarios en tiempo discreto, utilizando dos medidas de riesgo, a saber, la varianza y el valor en riesgo condicional para asegurar la coherencia del mismo, y ha sido denominado como “Modelo MVC”[(*)].

Así mismo, para la validación del modelo sugerido, es necesario trabajar con series de precios suficientes para captar el comportamiento de los activos seleccionados y asegurar la confianza estadística requerida, lo que implica el manejo de grandes volúmenes de información, dificultando su implementación, de modo que el planteamiento matemático ha sido programado sobre una base informática sólida y capaz de ejecutar de una forma simple el modelo de optimización, permitiendo realizar la experimentación correspondiente.

Resulta fundamental señalar que la poca vinculación entre el quehacer académico y los administradores de fondos ha generado un rezago respecto a los modelos utilizados por los gestores de inversiones y los desarrollados por los diversos investigadores en la materia, de modo que un modelo con un planteamiento simple y de fácil implementación sería bien acogido por la industria financiera. Es fundamental para la presente investigación, que el modelo pueda ser entendido, y asimilado para su aplicación regular entre los administradores de inversiones.

Con el objeto de fortalecer el planteamiento, el modelo coherente seleccionado es utilizado para proponer carteras diversificada para distintos perfiles de riesgo a partir de los llamados fondos cotizados o títulos referenciados a acciones (“Tracs”)[(**)], que son portafolios que cotizan en las bolsas de valores de la misma forma que una acción, y cuyo objetivo fundamental es el de reproducir el comportamiento de un determinado índice de mercado,

(*) El acrónimo MVC proviene de las medidas de dispersión consideradas en el modelo de selección de cartera: Media, Varianza y valor en riesgo Condicional.

(**) También conocidos con las siglas de ETF por su denominación en inglés: *Exchange Traded Funds*.

pudiendo incluir valores de deuda, capital, materias primas o inversiones alternativas como la volatilidad.

La oferta de estos instrumentos es grande, y mediante ellos es posible descomponer el mercado de inversiones a partir de sus factores de riesgo, construyendo portafolios eficientes con pocos activos, de tal suerte que el modelo elegido será probado experimentalmente utilizando fondos cotizados emitidos en México con el objetivo de proponer un portafolio que pueda ser comercializado en nuestro país a manera de una sociedad de inversión ente el gran público inversionista.

Así pues, el primer capítulo de este documento, se enfoca en describir el estado del conocimiento en relación a la llamada teoría de inversiones y de manera particular en lo que hace a los modelos de selección de cartera, incluyendo el marco teórico requerido para comprender el modelo.

En el segundo capítulo, se profundiza sobre el concepto de coherencia de riesgo y se fundamenta teóricamente el modelo "MVC", indicando los elementos necesarios para su validación y las características de la base informática utilizada para la experimentación.

Dado que la investigación en materia de portafolios es extensa, para el desarrollo de los dos primeros capítulos se ha realizado la investigación documental necesaria para soportar debidamente el modelo propuesto.

En la tercera parte de la investigación se describirán los fondos cotizados o "tracs", sus características y ventajas sobre instrumentos convencionales, y la rápida evolución de este mercado, así como la oferta disponible a nivel global y de manera particular en nuestro país. Así mismo, se justifica el uso de estos instrumentos, especificando aquellos que se utilizarán como insumo para la validación del modelo en orden a proponer estrategias específicas para el mercado mexicano.

En la cuarta sección, se realiza la experimentación necesaria para la validación del modelo "MVC" utilizando los tracs definidos en el capítulo previo. Para ello se utiliza el sistema programado específicamente para este motivo, contrastando el modelo contra el de media–varianza bajo distintas condiciones y niveles de riesgo, obteniendo fronteras eficientes en cada caso. Así mismo, se propone, como resultado de la investigación, un portafolio específico susceptible de ser distribuido en el mercado mexicano, realizando las pruebas retrospectivas y de estrés, necesarias para confirmar los resultados arrojados por el modelo.

Finalmente se muestran las conclusiones de la investigación que confirman tanto el modelo de selección de carteras como el uso de fondos cotizados a fin de proponer y dar mantenimiento a portafolios de inversión distribuidos a manera de una sociedad de inversión en nuestro país.

C A P I T U L O 1

FUNDAMENTOS DE TEORIA DE INVERSIONES

La Teoría Moderna de Portafolios tiene su origen formal en el trabajo seminal de H. Markowitz (1952), donde se plantea que es posible para un inversionista, construir una cartera diversificada óptima mediante la selección cuidadosa de ciertos activos cuyos rendimientos son inciertos, y la proporción que debe adquirir de cada uno de ellos, de modo que debe existir un portafolio que le proporcione el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado, definiendo así, el concepto de frontera eficiente como el conjunto de carteras óptimas bajo distintos valores de riesgo(1).

Así mismo, mediante este modelo se establece que es posible disminuir considerablemente el riesgo total a través de las correlaciones entre los rendimientos de estos activos mediante lo que hoy conocemos como el modelo de media-varianza.

Dadas sus características, y las limitaciones técnicas de la época, el modelo de media-varianza y la frontera eficiente no fueron incorporados a los métodos de análisis que de manera regular utiliza la industria financiera sino hasta finales de los años ochenta, y continúan siendo ampliamente utilizados por la gran mayoría de los gestores de activos. Hoy sabemos que el modelo es incompleto, pues simplifica extremadamente la realidad, de modo que bajo ciertas condiciones lleva a resultados no óptimos. Su popularidad radica en la sencillez del planteamiento y su facilidad de implementación utilizando herramientas informáticas comunes.

El trabajo de Markowitz, constituye la base de la mayoría de los modelos de selección

---

(1) *Cfr*., MARKOWITZ, H., *Portfolio Selection*. pp. 77-91.

de cartera y de otros modelos como el de Fijación de Precios de Activos de Capital o CAPM por sus siglas en inglés (*Capital Asset Pricing Model*), haciendo acreedor a su autor al premio Nobel de Economía por sus contribuciones en la materia en el año de 1990, junto con William Sharpe y Merton Miller.

Por otra parte, la globalización, las tecnologías actuales, y la disponibilidad de instrumentos financieros cada vez más complejos, hacen necesario el uso de nuevas y mejores metodologías en la selección de carteras de inversión, acordes a la dinámica actual de los mercados y capaces de ser asimiladas e implementadas por la industria en el diseño de portafolios diversificados de inversión.

Así mismo, pese a que se han verificado grandes avances posteriores al enfoque original, ya sea por su complejidad, o bien por la dificultad técnica de su implementación, éstos no han sido incorporados comercialmente al diseño de estrategias de inversión, adecuadas a los nuevos tiempos y las necesidades cada vez más sofisticadas de una mayor base de inversionistas.

El modelo de Markowitz, bajo el supuesto de normalidad en la distribución de los rendimientos esperados, y utilizando a la varianza única medida de dispersión bajo un enfoque estático de un solo periodo; continúa utilizándose comúnmente, tal y como fue definido en su concepción original. Sin embargo, como se asentó anteriormente, hoy sabemos que el modelo tiene varios puntos débiles, que dificultan el hacer predicciones bajo ciertas circunstancias; situación que se confirma cada vez que se presentan condiciones “desordenadas” en los mercados financieros. Eventos como las crisis mexicana y la asiática de 1995 y 1997, respectivamente; o bien la crisis hipotecaria en los Estados Unidos en 2008, y de manera más reciente la crisis de la deuda soberana de la zona del euro en 2011, iniciaron de manera local y rápidamente se contagiaron al resto del mundo, como efecto de la globalización, que favorece una mayor correlación entre las variables económicas, y por ende una nueva mecánica de los mercados financieros. Dichos eventos, que generaron pérdidas millonarias a diversos inversionistas a lo largo del mundo, no fueron previstos por los modelos de riesgo tradicionales, lo que ha puesto de manifiesto la necesidad de contar con modelos más robustos para la gestión de riesgos y la selección de carteras de inversión.

De esta forma, el modelo original de media-varianza ha sido severamente criticado, lo que hace necesaria la incorporación de otras medidas de riesgo, que puedan captar situaciones de asimetría o de alta curtosis en la distribución de utilidades, o bien predecir el impacto de eventos extremos con el objeto de replantear estrategias de inversión y evitar pérdidas de capital excesivas ante situaciones atípicas de los mercados financieros.

Adicionalmente, es importante reconocer que si bien se han presentado considerables avances en el estado del conocimiento gracias a la investigación, existe una importante brecha entre el trabajo científico y la industria de fondos de inversión. Por una parte, muchos de los modelos hacen planteamientos teóricos que son aún difíciles de replicar con la tecnología disponible, y por otra, no existe una adecuada vinculación entre el quehacer académico y los administradores de activos.

Dado lo anterior, resulta fundamental conocer las diversas teorías y avances disponibles en relación a la selección de carteras de inversión óptimas, en orden a proponer una metodología mejorada que cumpla con dos requisitos básicos: un sólido fundamento teórico y que resulte sencilla de implementar dentro de un contexto dinámico de las variables de riesgo de mercado.

1.1. Desarrollo de la Teoría de Portafolios

No es difícil para un inversionista comprender empíricamente que al diversificar correctamente sus inversiones entre distintos activos, cuyos comportamientos sean claramente diferenciados, disminuye su riesgo total, a la vez que puede acceder a rendimientos competitivos, y eventualmente mejores, que invirtiendo en una sola alternativa.

Concretamente, dados un capital inicial y un horizonte temporal definido, el inversionista debe decidir en qué activos precisos, y en qué proporciones deberá asignar sus recursos para maximizar la utilidad esperada. Esto se complica seriamente si se trata de activos altamente riesgosos cuyos rendimientos resultan especialmente inciertos.

Al conjunto de activos financieros en los que se invierte, se le conoce como una cartera, estrategia o portafolio de inversión, que se considera diversificado cuando se mezclan instrumentos de distintas clases.

El objetivo principal de la teoría de portafolios es el desarrollar modelos o representaciones matemáticas que proporcionen soluciones a dicho problema, mismo que ha tomado mayor relevancia en el tiempo, dada la importancia y dinámica actuales de los mercados financieros.

La inquietud por diseñar modelos que permitan predecir el comportamiento de los activos financieros, y por ende, construir estrategias de inversión óptimas es tan vieja como los mercados mismos. El primer modelo conocido para explicar el comportamiento de los activos financieros, fue planteado en 1900 por Louis Ferdinand Bachelier en su disertación sobre la "Teoría de la Especulación", donde plantea que los rendimientos de los activos siguen un proceso estocástico conocido como movimiento Browniano. Aunque dicha tesis fue rechazada en su momento, es hoy la piedra angular para los desarrollos en tiempo continuo, donde destaca el célebre trabajo de Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton para la valuación de opciones, y por el cual, los dos últimos se hicieron acreedores al premio nobel de economía en 1997[*].

Sin embargo, el primer enfoque formal para resolver el problema del portafolio es el llamado modelo de media-varianza formulado por H. Markowitz (1952), dando origen a lo que conocemos hoy como la Teoría Moderna de Portafolios (TMP), haciendo un planteamiento matemático al concepto de diversificación, para seleccionar los activos y proporciones específicas, que en conjunto, maximicen el rendimiento esperado con el menor riesgo posible. El concepto, casi intuitivo, es que la mezcla de diversos activos, debe ser

---

(*) Fisher Black no recibió el Premio Nobel, pues falleció en 1995, y dicho reconocimiento no puede ser otorgado de manera póstuma.

menos riesgosa que la inversión en uno sólo en particular, siempre que los rendimientos de estos tengan comportamientos claramente diferenciados.

Es importante señalar que, antes de este planteamiento, los inversionistas construían sus estrategias basándose en los riesgos y rendimientos individuales de los activos y no considerándolos como un todo, esto es, como una cartera diversificada de inversión.

Así mismo, no existía un consenso respecto de las medidas de riesgo que debían ser utilizadas. En este contexto, los primeros esfuerzos se encuentran en los trabajos de F.R. Macaulay (1938), donde se asocia el riesgo a la sensibilidad del precio de un instrumento ante las variaciones en las tasas de mercado(2).

Esencialmente, el modelo de Markowitz establece que los activos en un portafolio no deben ser elegidos arbitrariamente, ni únicamente por sus rendimientos esperados, sino por las covarianzas entre los mismos y su contribución al rendimiento esperado total, de modo que un inversionista típico estaría dispuesto a cambiar una cartera de inversión por otra más riesgosa, siempre y cuando le proporcione un mayor rendimiento esperado; lo que se conoce como aversión al riesgo. Así mismo, utiliza como medida del riesgo de un activo financiero a la varianza de su rendimiento esperado, lo que introduce el concepto de volatilidad como la desviación estándar del mismo.

Bajo este enfoque, Markowitz define el concepto de frontera eficiente como el conjunto de portafolios, únicos, que con los activos disponibles para un inversionista, proporcionan el mayor rendimiento esperado para cada nivel de riesgo, o en sus propias palabras: “La regla de media-varianza establece que un inversionista podría (o debería) seleccionar aquellas

---

(2) MACAULAY, F.R.,*Some Theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yield and stock prices in the United States since 1856*. pp. 5-7.

carteras con menor varianza para un rendimiento dado o mayor, o el máximo rendimiento para una varianza dada o menor”[(3)].

Este modelo modificó completamente la percepción que hasta entonces se tenía sobre el concepto de selección de carteras, y de las inversiones en general, cuando los mercados financieros operaban de una forma relativamente simple. Por restricciones de tipo tecnológico, no fue posible aplicarlo de manera regular y a carteras con un gran número de activos, sino hasta muchos años después. Sin embargo, continúa siendo utilizado de acuerdo a su planteamiento original por un sinnúmero de gestores de activos a lo largo del mundo, aún y cuando ha pasado más de medio siglo desde su concepción.

Esta popularidad radica en lo simple de su formulación y en la facilidad de implementación con los recursos informáticos disponibles en la actualidad. Sin embargo, el modelo está basado en múltiples supuestos, que si bien en su momento parecían no afectar sensiblemente las conclusiones, hoy deben ser considerados en la selección de carteras. Aunque el modelo es ciertamente simple, dada su trascendencia y relevancia para el sustento del presente documento, merece una explicación detallada, que se presentará posteriormente.

Con el tiempo, el enfoque original de la Teoría de Portafolios de Markowitz se ha enriquecido con la aparición de nuevos modelos que han cubierto algunas de las deficiencias del planteamiento básico que, aunque resulta correcto desde el punto de vista teórico, su debilidad radica en que está basado en una gran cantidad de supuestos que simplifican enormemente la realidad.

James Tobin (1958), expandió el modelo original incluyendo un activo libre de riesgo en el análisis, lo que hizo posible el apalancamiento de los portafolios especificados en la frontera eficiente, y permitió el desarrollo del concepto de carteras super-eficientes y la línea

(3) MARKOWITZ, H.. Ibidem, p. 82. “*The mean-variance rule states that the investor would (or should) want to select one of those portfolios with minimum variance for given mean or more and maximum mean for given variance or less*”.

del mercado de capitales, planteada por William Sharpe (1964)(4), formalizando su modelo de fijación de precios de activos de capital, mejor conocido como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), por sus siglas en inglés.

Estas contribuciones, ciertamente mejoraron el modelo, aunque no modificaron en lo absoluto su concepción básica.

Una de las limitaciones del modelo de Markowitz tiene que ver con el planteamiento de soluciones óptimas para un solo periodo de inversión, de modo que el inversionista debe seleccionar una cartera al inicio de cada periodo, sin la posibilidad de poder hacer ningún tipo de rebalanceo hasta el final del mismo. Ante esta limitación, los primeros esfuerzos por encontrar un modelo completo para solucionar el problema del portafolio fueron los desarrollos en tiempo continuo, donde se busca primordialmente el planteamiento de soluciones óptimas no limitadas a un periodo de inversión.

Los trabajos en este sentido sostienen que el tiempo debe ser considerado como una variable continua para así poder plantear soluciones optimas estables con un horizonte de largo plazo. De hecho, las soluciones de los modelos de mercado en tiempo discreto, como el de Markowitz, deben de converger a las soluciones en tiempo continuo cuando el tamaño de los periodos es lo suficientemente pequeño (tendencia a cero) y el horizonte de inversión lo suficientemente grande (tendencia a infinito).

Dentro de este tipo de modelos destacan los enfoques de control estocástico basados en los desarrollos de Robert Merton (1971) y los modelos de martingala como los de Pliska (1986), y Karatzas, Lehoczky y Shreve (1986), entre otros(5).

El trabajo de Merton resulta especialmente importante y debe ser considerado como el

---

(4) SHARPE, W., *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk.* pp. 435-442.

(5)) KORN, R. *Optimal Portfolios, Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*. pp. 37-45.

punto de partida para la teoría de portafolios en tiempo continuo. Aplicando métodos estándar y resultados de la teoría de control estocástico al problema del portafolio, fue capaz de obtener soluciones explícitas para algunos casos, incluyendo el modelo de Black-Scholes. Sin embargo, el punto fundamental de este enfoque es que el problema completo se reduce a la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) de programación dinámica[*]. Esto reduce el planteamiento a una ecuación diferencial parcial que puede ser resuelta por métodos numéricos. Con ciertas limitaciones, el enfoque de Merton ha sido implementado de manera práctica por algunos gestores de carteras, incluso bajo consideraciones de costos de transacción e imperfecciones en el mercado[6].

Con la adopción cada vez más frecuente del cálculo estocástico en aplicaciones financieras en los ochentas, surgieron modelos más elegantes a partir de la aplicación del teorema de la representación martingala a la optimización de portafolios. Diversos modelos fueron desarrollados con base en este enfoque, como el de Karatzas *et al.* (1987) o el de Cox y Huang (1989).

Bajo estos enfoques, el problema se divide en dos partes: un problema de optimización estático, para encontrar la riqueza terminal y el proceso óptimo que lleva a ella; y un problema de representación para plantear la estrategia correspondiente. Esencialmente, estos modelos difieren en muy poco del planteamiento de Merton, pero en vez de utilizar el control estocástico para su solución, se valen del teorema de la representación martingala[*], llegando a resultados similares.

(*) La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) es una ecuación diferencial parcial, fundamental para la teoría de control óptimo, planteada por Richard Bellman (1950) como pionero en la programación dinámica a partir de sus trabajos sobre la ecuación de Hamilton-Jacobi. La solución de la ecuación de HJB es la función de valor que proporciona la trayectoria óptima para un sistema dinámico dado con una función de costo determinada.

(6) KORN, R. *op. cit.*

(*) El teorema de la representación martingala establece que el estado de una variable aleatoria que es medible con respecto a una filtración generada por un movimiento browniano, puede escribirse en términos de una integral de Itô con respecto a dicho movimiento browniano.

Trabajos más recientes, y complementarios a los anteriores, han tratado el problema del portafolio desde un punto de vista más realista, incluyendo restricciones adicionales y costos de transacción, tales como los modelos de Cvitanic y Karatzas (1992) o Xu y Shreve (1992)[(7)].

Desgraciadamente, y pese a su sólido fundamento teórico, los modelos en tiempo continuo no son fáciles de implementar, y tienen el grave problema de que en la realidad, los precios de los activos financieros, necesarios para el análisis, son observados en forma discreta y no continuamente, a la vez que no todos los instrumentos poseen la misma liquidez, lo que distorsiona el proceso de formación de precios, de manera que no es siempre posible aplicarlos de manera práctica.

Adicionalmente, estos planteamientos no son simples, y muchas veces no poseen soluciones cerradas, por lo que es necesario utilizar métodos numéricos, sobre todo cuando los rendimientos esperados de los activos considerados no están normalmente distribuidos, o no se conoce con precisión su distribución de probabilidad.

Por otra parte, el rebalanceo de carteras es una acción esencial para la solución al problema del portafolio, por lo que su impacto sobre la estrategia óptima no puede ser ignorado, al igual que los costos de transacción. En este sentido, los modelos en tiempo continuo consideran la recomposición de carteras en cualquier instante, lo que resulta difícil de plantear ante la presencia de comisiones y diferenciales por compraventa. Soluciones limitadas a esta situación fueron formuladas por Magill y Constantinides (1976) y posteriormente por Davis y Norman (1990) o Soner y Shreve (1994). Mediante estos modelos, que poseen pequeñas diferencias entre sí, ha sido posible llegar a algunas soluciones considerando costos de transacción proporcionales (porcentaje fijo sobre el volumen operado)[(8)].

---

(7) KORN, R. *Ibidem*. p. 101-150.

(8) KORN, R. *Idem*. p. 155-170.

Si bien los planteamientos en tiempo continuo resultan ciertamente más elegantes y sofisticados desde el punto de vista matemático, su implementación no resulta simple, y mucho menos su comprensión por quien no tiene sólidos conocimientos de cálculo estocástico, razón por la cual no han sido adoptados de manera regular por la industria de administradores de activos.

Ante estas complejidades, las limitaciones propias de los mercados, y conveniencias de tipo computacional, la mayoría de los modelos utilizados por los administradores de activos en la actualidad, están construidos sobre el planteamiento de media-varianza de Markowitz a partir de la distribución de rendimientos utilizando el valor esperado de dicha variable y alguna medida de riesgo. El uso de tan solo dos parámetros es insuficiente cuando los rendimientos de los activos involucrados no se distribuyen normalmente, lo que ocurre con relativa frecuencia en mercados que carecen de profundidad o de instrumentos que no cuentan con la suficiente liquidez.

Como se asentó anteriormente, la varianza es el punto de partida para todos los modelos basados en la media, y aún y cuando se han propuesto otras medidas de riesgo alternativas (Fishburn 1977, Oryczak y Ruszczynski 1999, Rockafellar y Uryasev 2000), la varianza es aún utilizada mundialmente en la selección de carteras y para efectos regulatorios(9).

Dentro de las medidas de riesgo basadas en la varianza, además de la propia volatilidad, la más popular es el valor en riesgo o VaR por sus siglas en inglés (V*alue-at-Risk*), propuesta por primera vez en 1989 para resolver un problema de reporte interno acerca de la exposición a riesgo de los portafolios de J.P. Morgan, y cuya metodología fue publicada algunos años más tarde junto con la agencia Reuters (1996) en un documento técnico bajo el nombre de *Riskmetrics*.

En dicho documento se define al VaR como “la medida del máximo cambio potencial

(9) *Cfr.* ROMAN, D., *et. al.. Mean-Risk models using two risk measures: a multi-objective approach.* p. 444.

en el valor de un portafolio de instrumentos financieros con una probabilidad dada en un horizonte de tiempo definido"[(10)]. La popularidad de esta medida de riesgo se basa en su sencillez, por lo que puede ser fácilmente entendida por cualquier inversionista al responder la pregunta sobre cual sería la pérdida máxima que puede experimentar su inversión con un nivel de confianza y un horizonte temporal dados; lo que equivale a encontrar el percentil correspondiente en la distribución de probabilidad del rendimiento esperado.

Si bien existen diferentes metodologías para el cálculo del valor en riesgo, el supuesto de normalidad en la distribución de los rendimientos esperados de los activos considerados, y por ende del portafolio, simplifica considerablemente los cálculos; de ahí que administradores de inversiones a lo largo del mundo utilicen al VaR calculado por el enfoque delta-normal o paramétrico[(*)] como parte de sus metodologías de gestión de riesgos, y de manera específica en la selección de carteras.

Diversos modelos de selección de cartera bajo el enfoque de media-valor en riesgo han sido planteados en los últimos años, tales como los de Basak y Shapiro (2001), o el de Berkeleaar, Cumperayot y Kouwenberg (2002), donde en ambos casos se agrega al modelo básico de media-varianza una restricción sobre el valor en riesgo permitido para el portafolio requerido utilizando distribuciones paramétricas. Así mismo, Tsao (2010), además de plantear una solución para el VaR paramétrico, construye la frontera eficiente a partir de escenarios discretos utilizando el valor en riesgo por simulación histórica y por el método Montecarlo aplicando algoritmos genéticos de optimización.

Con reserva a definir con mayor profundidad esta y otras medidas de riesgo, ser dirá que pese a ser utilizado en prácticamente todo el mundo como metodología de referencia, sobre todo para efectos regulatorios, el VaR posee características teóricas no deseables. Por

(10) J. P. MORGAN. *Riskmetrics – Technical Document*. p. 6.

(*) La metodología de cálculo del valor en riesgo por el método paramétrico asume una distribución de probabilidad dada para el rendimiento esperado, por lo que resulta sencillo obtener la pérdida esperada para un nivel de confianza específico basándose en los parámetros de dicha distribución. La mayoría de los administradores de riesgos utilizan típicamente a la distribución normal.

una parte esta medida no es sub-aditiva, por lo que bajo ciertas circunstancias, la suma de los valores en riesgo de los activos seleccionados, puede ser menor a la del portafolio, de modo que no necesariamente premia la diversificación. Dada esta situación, el VaR, al igual que la volatilidad no son consideradas medidas coherentes de riesgo de acuerdo a la definición dada por Atzner, Delbaen, Eber y Heath (1999)(11).

Así mismo, el VaR y la varianza misma, bajo el supuesto de normalidad, sugieren simetría en la distribución de rendimientos de un portafolio, lo que lleva a ignorar situaciones de asimetría o de alta curtosis y por ende, desestimar los eventos extremos. Este punto resulta especialmente importante, ante la presencia de mayores volatilidades y correlaciones entre los mercados financieros.

Por esta razón, otra medida de riesgo basada en la cola izquierda de la distribución de rendimientos, conocida como Valor en Riesgo Condicional o CVaR(*), por sus siglas en inglés, está ganando popularidad. El CVaR posee mejores propiedades teóricas, al ser una medida coherente de riesgo y controlar las pérdidas extremas, más allá del VaR como lo establecen Artzner (1999), Pflug (2000), Acervi y Tashe (2002) o Rockafellar y Uryasev (2002)(12).

El CVaR se define como la pérdida esperada, una vez que el VaR ha sido excedido; es decir, el valor esperado de la cola izquierda de la distribución de utilidades más allá del VaR, de manera que se centra únicamente en las pérdidas esperadas no consideradas por el valor en riesgo. La varianza o el VaR, y el CVaR cuantifican el riesgo desde diferentes perspectivas. Mientras que los primeros miden la desviación alrededor de la media de una variable aleatoria, el CVaR mide la pérdida esperada para los casos extremos dependiendo del nivel

---

(11) cfr. ARTZNER, et.al.. *Coherent Measures of Risk.* pp. 204 – 207.

(*) En ingles, "*Conditional Value-at-Risk*" o también conocido como pérdida esperada o "*Expected Shortfall*".

(12) ROMAN, D., et. al. *Mean-Risk models using two risk measures: a multi-objetive approach*. p. 443.

de confianza establecido para medir el valor en riesgo.

Además de las citadas propiedades teóricas del CVaR, esta medida de riesgo resulta fácil de optimizar como un problema de programación convexa en tiempo continuo. Sin embargo, si se considera la distribución discreta de la variable aleatoria, con un número finito de escenarios, la optimización del CVaR lleva a un problema de programación lineal de dimensión finita como lo establecen Rockafellar y Uryasev (2000)[(13)].

Existen diversos modelos de selección de cartera de media-CVaR, tanto en tiempo continuo como en discreto, siendo los segundos más populares al ser más fáciles de implementar, a la vez que los precios de mercado son regularmente observados en forma discreta, como se anotó anteriormente. Pueden encontrarse referencias a dichos modelos en los artículos publicados por Alexander y Baptista (2004), Roman, Darby-Dowman y Mitra (2007), o Cox, Ruilin Tian y Zuluaga (2009), entre otros.

Por sus características, estos últimos desarrollos son los que mayor interés han despertado dentro de la industria de administradores de portafolios y sobre los que se centra el presente trabajo de investigación, por lo se hará un análisis detallado de los mismos y del concepto de administración coherente de riesgo más adelante.

Como consecuencia de la administración coherente de riesgo aplicada al problema del portafolio se han sugerido modelos multiobjetivo de selección de cartera. En dichos planteamientos es utilizada más de una medida de riesgo, analizando la dispersión de la distribución de utilidades desde diferentes perspectivas.

Diversos planteamientos en este sentido han sido publicados, como el propuesto por Konno *et al*. (1993), en el modelo de optimización de media-desviación absoluta-simetría, en

---

(13) ROCKAFELLER, R.T. et. al. *Conditional value-at-risk for general loss distribution*. p 21.

el que son consideradas restricciones en tres momentos muestrales[(14)].

Así mismo es importante considerar el modelos de Wang (2000), con restricciones sobre la varianza y el valor en riesgo; o bien el de Jorion (2003), que incluye restricciones sobre la varianza del portafolio y sus deviaciones contra un índice de referencia[(15)].

Finalmente, los planteamientos más recientes sobre la selección de carteras y la teoría de portafolios incorporan el concepto de volatilidad estocástica. Prácticamente todos estas propuestas parten de los trabajos de Merton para portafolios en tiempo continuo, entre los que se encuentran los modelos de Chacko y Viceira (2002), Liu (2005), Pham (2002) y Fleming y Hernández-Hernández (2003).

Si bien estos modelos explican el mercado de una forma más completa, la mayoría de ellos no presenta soluciones explícitas, razón por la que estos esfuerzos permanecen en un plano meramente teórico.

Una mención especial merecen los trabajos basados en el modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993) como el propuesto por H. Kraft (2005), que fue capaz de demostrar que para este enfoque existe una solución única y finita bajo condiciones de equilibrio parcial de los mercados, y mediante el cual se han obtenido algunas soluciones explicitas [(16)].

Aunque los esfuerzos por resolver el problema del portafolio continúan, aún no ha sido posible plantear un modelo integral que describa completamente la realidad de los mercados incorporando los avances teóricos disponibles en la materia, y que pueda ser adoptado fácilmente por la industria de administradores de activos para el diseño de carteras

---

(14) KHONO, H., *et. al. A Mean Absolute Deviation Skewness Portfolio Optimization Model*. pp.205-220.

(15) JORION, P. *Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints*. pp. 70-82.

(16) KRAFT, H. *Optimal Portfolios and Heston´s Volatility Model: an explicit solution for power utility*. pp. 303-313.

diversificadas de inversión y su distribución comercial entre el gran público inversionista.

1.2. El problema de selección de cartera

El objetivo de los modelos de selección de carteras radica en elegir entre los activos disponibles, cuales y en que proporciones se deben asignar los recursos con los que cuenta un inversionista de manera que se obtenga un beneficio máximo con el menor riesgo posible.

Como se ha asentado, existen diversos enfoques para el logro de este objetivo, que si bien difieren en la forma de aproximarse al mismo, comparten un punto de partida, por lo que resulta esencial comprender el problema del portafolio.

Consideremos el conjunto de n activos, y sean $S_j(t)$ y $S_j(T)$, con $j = \{1, \dots, n\}$, los precios de estos activos para los tiempos t y T, donde $t < T$. El mercado es tal que, los precios en t son perfectamente conocidos por todos los agentes, mientras que los precios en T, sólo serán conocidos una vez que se llegue a dicho momento.

Lo anterior supone que se trata de activos riesgosos, por lo que los precios de mercado son variables aleatorias regidas por algún proceso estocástico.

Así mismo, consideremos que ningún agente puede distorsionar el proceso de formación de precios, y que la información sobre el mercado está disponible para todos los participantes, y que se incorpora de manera inmediata a los precios, por lo que el mercado se considera eficiente. Consideremos también que existe liquidez para todos los instrumentos disponibles en el mercado y que los activos son infinitamente divisibles, por lo que pueden comprarse y venderse en cualquier momento y en cualquier cantidad.

Por último, consideremos, por simplicidad, que los inversionistas invierten totalmente sus recursos, y que no les es posible tomar posiciones en corto(*).

Consecuentemente, el rendimiento a fin de periodo para un activo, R_j, también es una variable aleatoria que depende de $S_j(t)$ y $S_j(T)$, toda vez que el rendimiento futuro resulta desconocido. El rendimiento, entre los tiempos t y T para el activo j, puede calcularse como(**):

$$R_j = R_j(t,T) = \frac{S_j(T)-S_j(t)}{S_j(t)} = \frac{S_j(T)}{S_j(t)} - 1 \qquad (1)$$

Sea w_j la cantidad de capital invertido en el activo j, donde $j = 1 \ldots n$, y w el capital total disponible al tiempo t, de modo que $w = \sum_{j=1}^{n} w_j$, con lo que podemos definir a x_j como la proporción de capital invertida en el activo j, con $x_j = {}^{w_j}/_{w}$, y a $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ como la estrategia o portafolio asociado.

Si los rendimientos $R_j\colon \Omega_j \to \mathbb{R}$ para los n activos disponibles son variables aleatorias definidas sobre n espacios muestrales, entonces el rendimiento del portafolio en el periodo (t,T), es por tanto, también una variable aleatoria asociada al cambio de valor del portafolio definida como:

$$R_x = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \cdots + x_n R_n = \sum_{j=1}^{n} x_j R_j \qquad (2)$$

con función de distribución $F(r) = P(R_x \leq r)$ que dependerá de la estrategia $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ elejida.

(*) Para simplificar el análisis se supone que no es posible construir portafolios apalancados y que el mercado prohíbe las operaciones en corto, por lo que la suma de las proporciones de los activos que integran un portafolio debe sumar el cien porciento. Sin embargo, dicho supuesto puede eliminarse fácilmente de cualquier modelo.

(**) En sentido estricto el rendimiento del activo $R_j(t,T)$ es referido al periodo comprendido entre los tiempos t y T, aunque para simplificar la notación nos referimos a él simplemente como R_j. Así mismo, si el rendimiento se considera en tiempo continuo, la ecuación (1) puede ser representada como $R_j = ln\left[S_j(T)/S_j(t)\right]$.

Para representar un portafolio, se requieren restricciones sobre la estrategia $(x_1, x_2, \dots x_n)$, de modo que, por sencillez, se supondrá únicamente que la suma de los pesos es igual a uno ($\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$) y que las operaciones en corto no están permitidas. De esta forma, podemos definir al conjunto de soluciones factibles $\mathcal{A}$ como:

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\} \right\} \tag{3}$$

Ahora bien, consideremos además del portafolio anterior, a otro portafolio distinto, dado por la estrategia $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathcal{A}$, donde y_n es la proporción de capital invertida en el activo *j*, con *j=1,…,n*. El rendimiento esperado de este nuevo portafolio, estará dado, de manera similar por $R_y = \sum_{j=1}^{n} y_j R_j$.

Para seleccionar entre estos dos portafolios, $(x_1, \dots x_n)$ y $(y_1, \dots y_n)$, hay que elegir entre las dos variables aleatorias R_x y R_y. por lo que es necesario definir un criterio bajo el cual una estrategia pueda ser considerada mejor que otra, especificando una relación que permita establecer la dominancia, y por tanto la preferencia de una estrategia concreta.

Para definir el señalado criterio, antes es necesario contar con una representación de estas variables aleatorias para obtener los rendimientos de cada portafolio, y por ende de cada activo disponible. Para lo cual se trataran como variables discretas, y descritas como realizaciones bajo *M* distintos escenarios o estados de la naturaleza obtenidos de una muestra finita de escenarios históricos, o bien a partir de un generador de escenarios.

De esta forma, contamos con el espacio muestral Ω consistente en un número finito de escenarios ω_ι, para toda $i \epsilon 1, \dots, M$, donde cada escenario o estado ocurre con una probabilidad p_i, con $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$. Así mismo, los rendimientos aleatorios están definidos el espacio de probabilidad discreto $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathcal{F}$ una σ–álgebra sobre Ω, y una medida de probabilidad $p(\omega_i) = p_i$.

Ahora bien, sea r_{ij} el retorno esperado del activo j bajo el escenario i, con $i \in \{1, \dots, M\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, la variable aleatoria R_j representa el rendimiento esperado del activo j que es finitamente distribuido sobre $\{r_{ij}, \dots, r_{Mj}\}$ con probabilidades $p_1, \dots, p_M$.

Así, la variable aleatoria R_x representa el rendimiento del portafolio $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ finitamente distribuido sobre $\{R_{x1}, \dots, R_{xM}\}$, donde el rendimiento para cada escenario está dado por:

$$R_{xi} = x_1 r_{i1} + \cdots + x_n r_{in} \ \forall\ i \in \{1, \dots, M\} \tag{4}$$

y el rendimiento esperado del portafolio con base en los M escenarios, por:

$$R_x = \sum_{i=1}^{M} R_{xi} \cdot p_i \tag{5}$$

1.3. <u>El modelo de media - varianza</u>

Como se asentó anteriormente, el primer modelo para resolver el problema del portafolio, fue el enfoque de media-varianza fue propuesto por Markowitz (1952), en el que introduce dos conceptos fundamentales: el uso de la varianza como medida de riesgo del portafolio, dada por las covarianzas entre todos los activos involucrados y las proporciones de cada uno dentro de la cartera; y, la definición del concepto de frontera eficiente como el conjunto de portafolios óptimos para distintos niveles de riesgo. A partir de este trabajo fundamental, otros modelos han sido construidos, utilizando medidas alternativas de riesgo; sin embargo, el planteamiento básico sigue vigente, por lo que resulta necesario comprender la esencia de dicho modelo.

El supuesto fundamental de este y prácticamente todos los modelos de selección de cartera, es que los inversionistas, o al menos la mayoría de ellos son aversos al riesgo. Esto es, que para tomar una decisión de inversión, un inversionista hace un continuo balance entre el rendimiento que espera obtener por la compra de un activo, y el riesgo asociado al mismo, de modo que estaría dispuesto a cambiar una inversión por otra más riesgosa siempre que esta le proporcione un mayor rendimiento.

Para modelar lo anterior, el enfoque de media-varianza, como su nombre lo indica, se basa en dos parámetros fundamentales de la variable aleatoria: el rendimiento esperado $E(R)$ y alguna medida de riesgo, que denotaremos como $\rho(R)$[(*)].

Dado lo anterior, podemos expresar el criterio de preferencia de una alternativa de inversión como una comparación de ambos parámetros: "una variable aleatoria R_x domina a otra variable aleatoria R_y, si y solo si, $E(R_x) \geq E(R_y)$ y $\rho(R_x) \leq \rho(R_y)$ con al menos una estricta desigualdad"[(17)]. Lo anterior implica que el portafolio *X* domina al portafolio *Y*.

De esta forma, podríamos comparar la variable aleatoria R_x con distintas estrategias de inversión definidas en los mismos términos que R_y , de modo que el portafolio *X* se considera eficiente, únicamente si, no existe ningún otro portafolio que proporcione un rendimiento esperado mayor para el mismo nivel de riesgo, y que a la vez, no exista otro portafolio de menor riesgo para el mismo rendimiento esperado.

Al conjunto de portafolios, que cumplen con las características anteriores, Markowitz los denomina la frontera eficiente (1952)[(18)].

Desde un punto de vista económico, la frontera eficiente puede ser expresada en términos de la dominancia o eficiencia de Pareto para un problema de optimización multi-objetivo, según la cual, una solución es pareto-óptima si no existe otra solución tal que

---

(∗) En el trabajo de Markowitz se utiliza de manera específica a la varianza como medida de riesgo. Sin embargo es posible utilizar medidas alternativas.

(17) ROMAN, D., *et. al.*, *op.cit*. p. 445.

(18) MARKOWITZ, H., *op. cit*. pp. 83.

mejore un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros (1967)[19]. En el caso del problema del portafolio se busca un doble objetivo: maximizar el rendimiento a la vez que se minimiza la varianza, o alguna medida de riesgo basada en ella, o bien, $\max_{x\in\mathcal{A}}[E(R_x) - \rho(R_x)]$.

Según el criterio de eficiencia de Pareto, para un problema multi-objetivo de la forma $\max_{x\in\mathcal{A}}\left[f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_n(x)\right)\right]$, una solución factible x_1 domina a otra solución x_2 si $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$ para toda i con al menos una estricta desigualdad[20]. De esta manera, un portafolio x se considera eficiente, siempre que no exista otro portafolio que proporcione un mayor rendimiento con un menor nivel de riesgo.

En la figura 1.1., se muestra como, para el universo de inversiones factibles, solo se consideran como eficientes aquellas que no son superadas por ninguna otra alternativa en los términos descritos anteriormente.

Robert Merton (1972) presenta un derivación analítica de la frontera eficiente, sin embargo, lo esencial anotar que es una función estrictamente convexa para todos los valores de $E(R_x)$, lo que resulta importante pues garantiza la existencia de soluciones al problema de optimización.

Ahora bien, para encontrar un portafolio específico sobre la frontera eficiente es necesario resolver un problema de optimización sobre las variables de decisión $\{x_1, \dots, x_n\}$, lo que puede lograrse encontrando la estrategia que minimice el riesgo $\rho(R_x)$ para un rendimiento esperado específico; o bien, la cartera de inversión que proporcione el máximo rendimiento dado un nivel de riesgo.

En el primer caso, el problema de optimización se puede plantear como:

---

(19) SAMUELSON, PAUL. *Eficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments*. pp. 107-122.

(20) GERARD, J. *Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz Techniques*. p. 137.

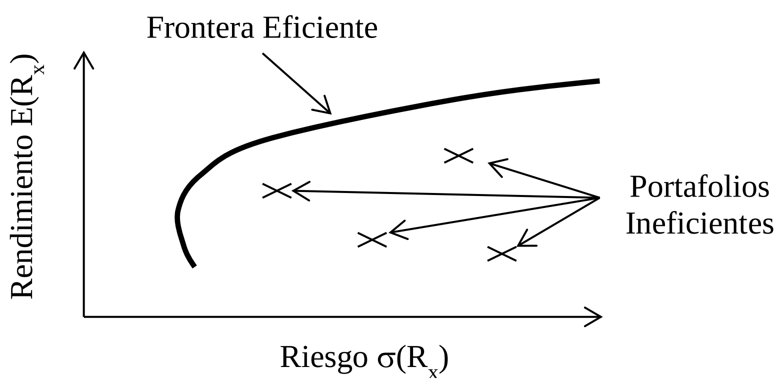


Figura 1.1. La Frontera Eficiente.

Minimizar $\rho(R_x)$ (6)

Sujeto a $E(R_x) \geq d$ y $(x_1, \ldots x_n) \in \mathcal{A}$

donde d representa el valor específico del rendimiento esperado para esa estrategia, por lo que es posible encontrar portafolios óptimos para distintos niveles del rendimiento esperado, y por lo tanto, la frontera eficiente.

Una manera alternativa consiste en plantear el problema de manera inversa, sobre las mismas variables de decisión:

Maximizar $E(R_x) - \tau\rho(R_x)$ con $\tau \geq 0$ (7)

Sujeto a:$(x_1, \ldots x_n) \in \mathcal{A}$

donde τ es un coeficiente positivo que aumenta o disminuye la escala de la medida de riesgo utilizada, de manera que utilizando diferentes valores para esta variable, es también posible construir la frontera eficiente.

Hasta este punto no se ha especificado una medida de riesgo concreta. Si bien el enfoque original de Markowitz utiliza a la varianza del rendimiento, otros modelos incorporan otras medidas de dispersión a partir de ella, tales como la volatilidad o bien el valor en riesgo para distribuciones paramétricas.

La varianza o segundo momento muestral de una variable aleatoria, en este caso R_x, se define como:

$$\sigma^2(R_x) = E\left[\left(R_x - E(R_x)\right)^2\right] \tag{8}$$

por lo que, de acuerdo a la ecuación (2), el rendimiento esperado de una estrategia de inversión X con n activos, $(x_1, \dots x_n)$, esta dada por $R_x = x_1R_1 + x_2R_2 + \cdots + x_nR_n = \sum_{j=1}^{n} x_jR_j$, de modo que la ecuación (8) puede expresarse como:

$$\sigma^2(R_x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \sigma_{jk}, \tag{9}$$

donde x_j y x_k , representan las proporciones invertidas en cada uno de los n activos, y σ_{jk} la covarianza del rendimiento entre activo j y el activo k, con $j = 1,2 \dots n$ y $k = 1,2 \dots n$.

Dado lo anterior, el problema de optimización expresado en (6), para un nivel de riesgo objetivo d, utilizando a loa varianza como medida de riesgo, y bajo el supuesto de que se invierte todo el capital y que están prohibidas las operaciones en corto, puede expresarse como sigue:

Minimizar

$$\sigma^2(R_x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \sigma_{jk}$$

Sujeto a

$$R_x = \sum_{j=1}^{n} x_jR_j \geq d$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \qquad \forall j = 1, \dots, n \tag{10}$$

Para utilizar la volatilidad o desviación estándar del rendimiento esperado, hay que hacer el ajuste necesario sobre la función objetivo sin que esto afecte la solución.

Para efectos de simplificar lo anterior, y facilitar la solución, el problema puede ser planteado en forma matricial al definir la matriz de covarianzas de los rendimientos esperados (R_i) de los n activos disponibles. Para ello es necesario considerar nuevamente las ecuaciones (4) y (5), donde se definió a r_{ij} como el retorno esperado del activo j bajo el escenario i, con $i \in \{1, \dots, M\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, de modo que R_j representa el rendimiento esperado del activo j; y R_x como el rendimiento esperado del portafolio bajo los M escenarios.

Utilizando notación matricial, se definen los vectores columna $\boldsymbol{R}_j$, de los rendimientos observados bajo los M escenarios para cada activo, y la matriz de rendimientos $\boldsymbol{R}$ formada por los n vectores:

$$\boldsymbol{R}_j = \begin{bmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{Mj} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{1j} & \dots & r_{nj} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{Mj} & \dots & r_{Mn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Si estos vectores son variables aleatorias con varianza finita, entonces la matriz de covarianzas Σ es una matriz semidefinida positiva cuyos elementos (i, j) son las covarianzas entre cada par de activos:

$$\sigma_{ij} = E\left[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\right] \tag{12}$$

donde:

$\mu_j = E\left[R_j\right]$, es el valor esperado del rendimiento del activo j, con $i, j \in [1, n]$

Así mismo, el vector de rendimientos esperados para cada activo,

$$\overline{\boldsymbol{R}} = [E(R_1), \quad \dots \quad E(R_n)] \tag{13}$$

Dado lo anterior, la matriz de covarianzas se define como (Weisstein)[21]:

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(\boldsymbol{R} - \overline{\boldsymbol{R}})(\boldsymbol{R} - \overline{\boldsymbol{R}})^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{14}$$

donde cada σ_{ij} con $i, j \in [1, n]$ representa la covarianza del rendimiento de los activos i y j.

Es importante señalar que la matriz de covarianzas Σ es una matriz cuadrada de magnitud *n x n*, que contiene a las varianzas de los rendimientos de los activos considerados en la diagonal, y las covarianzas de los mismos en el resto de la matriz, siendo simétrica respecto a la diagonal.

Adicionalmente, si expresamos nuestra estrategia de manera matricial, definiremos el vector columna de pesos $\boldsymbol{X}$, como:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

Con lo que el rendimiento esperado $E[\boldsymbol{Rx}]$, para una estrategia especifica puede escribirse matricialmente como:

$$\boldsymbol{R_x} = E[\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R} \tag{16}$$

y el problema de optimización (10) como:

Minimizar

(21) WEISSTEIN, E. "*Covariance Matrix*" de MathWorld – A Wolfram Web Resource. *http://mathworld.wolfram.com/CovarianceMatrix.html*

$$\sigma^2(R_x) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}$$

Sujeto a

$$E[\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{X}^T\overline{\boldsymbol{R}} \geq d$$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{1} = 1 \tag{17}$$

donde d es el valor del rendimiento esperado mínimo del portafolio, de manera que puede construirse la frontera eficiente resolviendo el problema de optimización para distintos valores de d, de modo que cada punto (σ^2, d) representa un portafolio eficiente. Para ello pueden utilizarse métodos de solución para problemas de programación cuadrática, o bien valerse de algún sistema capaz de obtener la cartera óptima para cada valor de d por aproximaciones sucesivas sobre los valores de $(x_1, \dots, x_n)$.

1.4. El modelo media-valor en riesgo

Como se indicó anteriormente, el modelo general de media-varianza se basa en una gran cantidad de supuestos, que si bien resultan perfectamente válidos en un contexto teórico, simplifican la dinámica real de los mercados financieros, lo que tiene serias implicaciones en la toma de decisiones.

Como su nombre lo indica, estos modelos utilizan a la varianza, o de manera más específica, a la volatilidad, como medida de riesgo. Como se sabe, este parámetro mide la dispersión media del rendimiento del portafolio respecto de su valor esperado. Así mismo, en la mayoría de los casos, se supone que dichos rendimientos siguen una distribución normal, por lo que el riesgo se considera como simétrico, asignando un peso similar a la probabilidad de obtener rendimientos por arriba o por debajo de la media, lo que subestima aquellos escenarios extremos donde las pérdidas van más allá de la dispersión media para distribuciones no paramétricas.

En virtud de lo anterior, se han planteado modelos de selección de portafolios basados en el VaR como medida del riesgo, permitiendo modelar carteras en función de sus pérdidas esperadas; lo que resulta especialmente relevante dada la popularidad del valor en riesgo para la medición de riesgos de mercado.

Como se indicó anteriormente, el VaR se define como la pérdida máxima que puede experimentar una inversión con un nivel de confianza dado, y fue sugerido por J.P. Morgan (1996), e instituido como estándar para la medición de riesgos, y para el cálculo de los requerimientos de capital para las instituciones financieras por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (1996), lo que ha acelerado su difusión por el mundo.

La literatura en la materia reconoce tres metodologías para el cálculo del VaR: el llamado método paramétrico, el de simulación histórica y el método Montecarlo. El uso de uno u otro enfoque depende de las características de los activos involucrados y de los recursos técnicos e información disponibles, buscando en todo momento que las predicciones respecto a las pérdidas esperadas se ajusten la realidad de la mejor manera posible.

Continuando con la notación del apartado anterior, el VaR expresado como la mayor pérdida contra el rendimiento esperado que puede experimentar un portafolio con un nivel de confianza $(1-\alpha)$, para la estrategia $X=(x_1,\ldots,x_n)$; de modo que el $VaR^R_{1-\alpha}$ se define como aquel valor donde la probabilidad de que el rendimiento observado sea menor al valor en riesgo es igual a α, y puede expresarse como sigue:

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R} \leq -VaR^R_{1-\alpha}) = \alpha, \tag{18}$$

para toda $\alpha \in (0,1)$. Nótese que el $VaR^R_{1-\alpha}$ no es más que el rendimiento negativo correspondiente al α percentil en el contexto de la distribución de probabilidad del rendimiento.

En la figura 1.2., se ilustra el concepto anterior para el caso de un portafolio cuyos rendimientos están normalmente distribuidos.

Así mismo, la frontera eficiente media-valor en riesgo puede obtenerse de manera similar al modelo de media-varianza, como lo sugiere Chueh-Yung (2010) mediante la solución de :

Maximizar $R_x = \boldsymbol{X}^T \mathbf{R}$

Minimizar $VaR_{1-\alpha}^{R_x}$

Sujeto a $\boldsymbol{X}^T \mathbf{1} = 1$ (19)

donde cada pareja (VaR, R_x) corresponde a un portafolio óptimo situado sobre la frontera eficiente. El sistema planteado puede ser resuelto de dos maneras: encontrando la estrategia $(x_1, \dots x_n)$ dada por el vector $\boldsymbol{X}$ que minimice el valor en riesgo para un nivel de rendimiento R_x dado, o bien; encontrar la estrategia que maximice el rendimiento esperado dado un nivel de VaR. Sin embargo, la complejidad de este tratamiento dependerá del método utilizado para el cálculo del valor en riesgo.

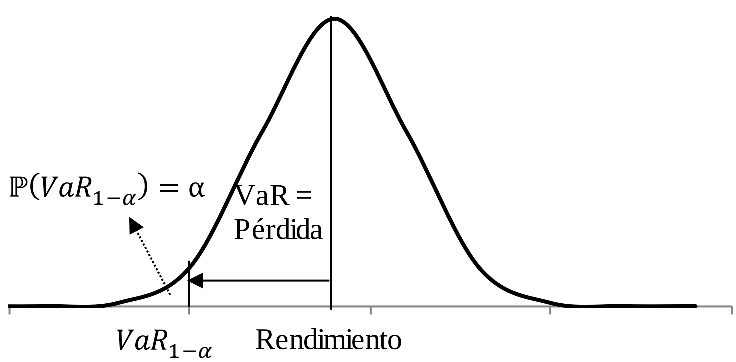


Figura 1.2. Valor en Riesgo para un portafolio con un nivel de confianza (1-α)

Entre las metodologías para el cálculo del VaR, la más popular, dada su sencillez, es el método paramétrico, que asume que los rendimientos de los activos riesgosos siguen una distribución normal, lo que no siempre se cumple, pero que simplifica enormemente los cálculos. En este caso, el retorno del portafolio óptimo también se distribuirá normalmente y el VaR con un nivel de confianza $(1-\alpha)$ equivale a encontrar el percentil α con la relación(22):

$$VaR_{1-\alpha}^{R_x} = -\left[\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R} - z_\alpha(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X})^{1/2}\right] \qquad (20)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ representa la matriz de covarianzas definida en la ecuación (14), y z_α es el valor correspondiente al percentil α para una distribución normal estándar.

Bajo esta metodología, el cálculo de la frontera eficiente resulta sencillo; sin embargo, solo es posible aplicarlo si existe evidencia de normalidad en la distribución de los rendimientos, lo que restringe el campo de aplicación de este modelo a portafolios en mercados con gran profundidad y liquidez.

Ante esta problemática, los administradores de riesgos optan por el uso de las otras dos metodologías mencionadas anteriormente. Bajo el método de simulación histórica se supone que la distribución futura de los rendimientos es exactamente la misma que la de la muestra obtenida, de manera que es deseable contar con un número de escenarios históricos grande para aumentar la confianza, de modo que dada una muestra de con M escenarios de rendimiento para n activos, habrá que calcular el rendimiento del portafolio para cada escenario, y el VaR con un nivel de confianza $(1-\alpha)$ será la cantidad negativa correspondiente al valor αM más pequeño de la distribución empírica.

El método Monte Carlo es similar al anterior; sin embargo, en vez de utilizar escenarios históricos, se eligen procesos que capturen adecuadamente la distribución de las posibles variaciones en los precios de los activos. Utilizando un generador de números pseudo aleatorios, se obtienen M escenarios de precios hipotéticos para los n activos considerados, y del portafolio. Al igual que en el método anterior, el VaR con un nivel de confianza $(1-\alpha)$ será la cantidad negativa correspondiente al valor αM más pequeño.

---

(22) CHUEH-YUNG, T. *Portfolio Selection based on the mean-VaR efficient frontier*. p. 934.

Es importante señalar que, para que los escenarios obtenidos con esta metodología puedan ser utilizados, se requiere captar adecuadamente la correlación entre los activos considerados, de manera que los escenarios aleatorios deben estar correlacionados, para lo cual se utilizan técnicas que aseguren este comportamiento[*].

Bajo estas dos metodologías, la solución del problema de optimización con dos objetivos planteado en (17) requiere de técnicas adicionales. La función objetivo no puede ser formulada como una expresión cuadrática única para utilizar enfoques de optimización tradicionales. El problema puede ser resuelto a través de sistemas iterativos de aproximaciones sucesivas, lo que dependerá ante todo de los recursos informáticos disponibles, o bien mediante algoritmos específicos como método genético NSGA-II planteado pro C.Y. Tsao[23].

Hasta aquí al respecto de los enfoques basados en el modelo de media-varianza. La siguiente generación de este tipo de metodologías corresponde a aquellas que utilizan medidas coherentes de riesgo, y que se abordarán en el siguiente capítulo, y que constituyen el objeto del presente trabajo de investigación. Así mismo, se planteará un algoritmo para la solución de problemas basados en el VaR Histórico o por el método Monte Carlo.

(*) Por ejemplo, aplicando la factorización de Cholesky a la matriz covarianzas para obtener salidas correlacionadas. André-Louis Cholesky, que demostró que una matriz simétrica definida positiva ($\boldsymbol{\Sigma}$) puede ser descompuesta como el producto de una matriz triangular inferior (**A**) y la transpuesta de esta matriz, de modo que $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}$. Multiplicando la matriz Cholesky (**A**) a una matriz de números aleatorios no correlacionados, se obtiene otra de números pseudo-aleatorios correlacionados.

(23) CHUEH-YUNG, T. *idem.* pp. 934-936.

C A P I T U L O 2

LA ADMINISTRACIÓN COHERENTE DE RIESGO Y EL MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERA

Como se describió ampliamente en el capítulo anterior, se ha recorrido ya un largo camino en la búsqueda de nuevos y mejores modelos para la selección y optimización de carteras desde que Markowitz introdujo su celebre modelo de media-varianza.

El planteamiento original, basado en la varianza como medida de riesgo, se ha robustecido en el tiempo al incorporar otras medidas, dirigidas a modelar de mejor forma los escenarios de pérdida, como el Valor en Riesgo (VaR); o bien las pérdidas extremas como el Valor en Riesgo Condicional (CVaR).

Mención especial merece el Valor en Riesgo, que debe su popularidad a la simplicidad de su cálculo para portafolios con instrumentos convencionales, y sobre todo, a que es de fácil comprensión para quienes no tienen amplios conocimientos en materia de gestión de riesgos.

El valor en riesgo de un portafolio puede ser estimado eficientemente cuando los rendimientos de los activos que lo componen tienen una distribución conocida, y especialmente si están normalmente distribuidos (lo que supone que los precios tienen una distribución log-normal), pero desgraciadamente, esto no ocurre para todos los instrumentos en la mayoría de los mercados financieros modernos. Sin embargo, dada su simpleza, los gestores de activos han abusado del supuesto de normalidad, lo que eventualmente conlleva la toma de decisiones de inversión incorrectas. Existe extensa bibliografía al respecto del cálculo del valor en riesgo para portafolios como lo sugieren algunos autores como Jorion

(2007)[1], o bien el documento técnico de Riskmetrics (1996) donde se acuñó el término de valor en riesgo.

Por desgracia, para distribuciones no normales, la volatilidad, e incluso el el VaR tienen características no deseables como la falta de subaditividad, como lo muestran Artzner *et al*. (1999) en su documento seminal sobre la coherencia de riesgo, lo que implica que el riesgo de un portafolio puede ser mayor que la suma de los riesgos individuales de los activos que lo componen, situación que resulta antagónica al concepto de diversificación. Dentro de este contexto, la volatilidad y el VaR no se consideran como medidas coherentes de riesgo en los términos de los axiomas definidos por Artzner *et al.* (1999) como se verá más adelante.

Adicionalmente, para distribuciones discretas, cuando no es posible observar los precios en forma continua, el valor en riesgo no siempre es convexo de acuerdo a la definición de Rockafellar (1970), a la vez que su control resulta complejo cuando se calcula mediante metodologías basadas en escenarios, como el método de Monte Carlo o simulación histórica.

Dado lo anterior, se han planteado diversos modelos utilizando medidas de riesgo alternativas a la volatilidad y el VaR, entre las que destaca el valor en riesgo condicional o CVaR por sus siglas en inglés[(*)]. Esta medida corresponde a la esperanza condicional de la pérdida una vez que se ha excedido el VaR para distribuciones continuas, o bien, el promedio ponderado de los escenarios de pérdidas mayores al VaR para distribuciones discretas como lo definen Rockafellar y Uryasev (2000) o Acerbi y Tacsche (2002).

Como se analizará, la esperanza condicional del VaR posee propiedades más atractivas que otras medidas del riesgo al considerarse una medida coherente, por lo que en el presente capítulo se planteará un modelo general para la selección de carteras eficientes basadas en

---

(1) JORION, P. *Value at Risk.* p 245-333.

(*) CVaR o *Conditional Value at Risk*. También conocido como "*expected shortfall*".

esta medida, como complemento al planteamiento básico de Markowitz, a partir de observaciones discretas y no dependiente de distribuciones paramétricas de los rendimientos de los activos considerados.

2.1. La coherencia de riesgo

Aunque el desarrollo de modelos para cuantificar el riesgo no es un asunto reciente, no es sino hasta la publicación del trabajo de Artzner *et al*. (1999)[2] que se expresan las características fundamentales deseables en una medida de riesgo para que pueda ser considerada como coherente. En este sentido, muchas de las medidas tradicionalmente utilizadas desestiman las pérdidas potenciales bajo ciertas condiciones, o bien, no reflejan adecuadamente la reducción del riesgo a través de la diversificación.

Así pues, para entender en que consiste una medida coherente de riesgo, consideremos la variable aleatoria R_x, definida como el rendimiento esperado del portafolio correspondiente a la estrategia $X = (x_1, \dots, x_n)$ en el conjunto de soluciones factibles $\mathcal{A} = \left\{(x_1, \dots, x_n)/\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}\right\}$, de acuerdo a la definición del capítulo anterior.

Así mismo, consideremos cualquier medida de riesgo $\rho(R_x)$, sobre dicha variable aleatoria.

Es importante establecer que R_x representa la variación porcentual del portafolio entre dos fechas, en el intervalo (t,T), y que $\rho(R_x)$ es cualquier medida del riesgo o dispersión de dicha variable aleatoria en el mismo intervalo.

Dado lo anterior, las propiedades deseables de dicha medida de riesgo de acuerdo a la

(2) ARTZNER *et al*., *Coherent measures of Risk*, p. 203-228.

definición de Artzner *et al*. se mencionan a continuación[3].

2.1.1. Monotonía no creciente.

Si dos estrategias $X, Y \epsilon \mathcal{A}$ y R_x, R_y son tales que $R_x \leq R_y$, entonces,

$$\rho(R_x) \geq \rho(R_y) \tag{21}$$

Esto es, que si el rendimiento de un portafolio X, es menor que el rendimiento de otro portafolio Y, entonces la por la pérdida de valor de X, el riesgo de X deberá ser mayor que el de Y.

2.1.2. Subaditividad

Si $X, Y \epsilon \mathcal{A}$ entonces

$$\rho(R_x + R_y) \leq \rho(R_x) + \rho(R_y) \tag{22}$$

Lo anterior implica que la diversificación reduce el riesgo, o bien, que la fusión de portafolios no crea riesgo adicional.

Esta propiedad resulta esencial en la optimización de portafolios y obtención de carteras eficientes, ya que de ella se desprende la convexidad en una superficie de riesgo, lo que asegura portafolios óptimos únicos para cada nivel de riesgo.

2.1.3. Homogeneidad positiva

Si $\boldsymbol{\varphi} \geq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, se tiene que

$$\rho(\varphi R_x) = \varphi\rho(R_x) \tag{23}$$

(3) VENEGAS, F.. *Administración Coherente de Riesgos con Futuros del MexDeR*. p. 4-5.

Lo que supone que el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo. La magnitud del riesgo monetario de un agente que invierte mil de unidades en una cartera, es mil veces mayor que aquel que tan sólo invierte una unidad monetaria.

2.1.4. Invarianza bajo traslaciones

Si $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\rho(R_x + \varphi) = \rho(R_x) - \varphi \tag{24}$$

Para explicar esta propiedad, consideremos un sistema financiero en el que es posible prestar y pedir prestado a una tasa libre de riesgo, r. Si rescribimos la relación anterior,

$$\rho(R_x + \varphi) = \rho\left(R_x + \frac{\varphi}{r}\right)r,$$

entonces podemos interpretar a φ como el interés, libre de riesgo que se paga sobre una inversión de φ/r, de modo que la propiedad de invarianza monetaria expresa que el riesgo disminuye en dichos intereses. Si φ fuera negativa, se interpretaría como una deuda, lo que incrementaría el riesgo del portafolio. Además, si se escribe $\varphi = \rho(R_x)$, entonces $\rho\big(R_x + \rho(R_x)\big) = \rho(R_x) - \rho(R_x) = 0$, podemos interpretar a φ como la cantidad necesaria para eliminar el riesgo de R_x, con lo que $\rho(R_x)$ actuaría como cobertura de la estrategia $X = (x_1, \dots, x_n)$[(4)].

De los axiomas anteriores sobre la función ρ, Venegas (2005) menciona algunas propiedades adicionales para las medidas de riesgo, tales como[(5)]:

i. La función ρ es convexa. Esto es, si $X, Y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces

---

(4) VENEGAS, F., *op. cit*. p. 6. Existen otras propiedades adicionales, que se desprenden de los axiomas fundamentales, y que pueden ser revisadas en el documento de referencia.

(5) VENEGAS, F., *op. cit*.

$\rho\left(\lambda R_x + (1-\lambda)R_y\right) \leq \lambda\rho(R_x) + (1-\lambda)\rho\left(R_y\right)$

La propiedad de convexidad se sigue de los axiomas de subaditividad y homegeneidad positiva y resulta una propiedad esencial en los problemas de optimización de cartera, pues esta, junto con otras condiciones, garantiza la existencia de soluciones.

ii. La función ρ es continua. Este resultado se desprende de la característica de convexidad, e implica que pequeños cambios en R_x conducen a cambios también pequeños en la medida de riesgo $\rho(R_x)$.

2.2. Medidas de Riesgo y su coherencia matemática

Una vez definido el concepto de coherencia de riesgo, procederemos a analizar las medidas de riesgo más usuales en términos de este concepto fundamental, previo a plantear un modelo de selección de carteras que asegure el cumplimiento de los axiomas descritos en la sección anterior.

2.2.1. La Varianza y la volatilidad

La varianza de R_x se define como:

$$\rho(R_x) \coloneqq Var[R_x] = E[R_x - E[R_x]^2] \qquad (25)$$

y la volatilidad $\sigma(R_x)$ se define como la raíz cuadrada de la varianza.

Pese a que la varianza es una de las formas más populares para la medición de riesgos, dicha medida no satisface ninguna de los axiomas de coherencia.

No satisface la propiedad de homogeneidad positiva ya que las constantes salen al cuadrado. Así mismo, no es invariante bajo traslaciones, pues la varianza de una variable más una constante es igual a la varianza de la variable. Finalmente, si R_x y R_y son variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces:

$$\rho(R_x + R_y) = Var[R_x + R_y] = Var[R_x] + Var[R_y] + 2Cov(R_x, R_y)],$$

por lo que el cumplimiento de la propiedad de subaditividad dependerá de que $Cov(R_x, R_y) \leq 0$, lo que solo se verifica si las variables son independientes o si están correlacionadas negativamente.

La única propiedad que satisface la volatilidad, $\sigma(R_x) = \sqrt{Var(R_x)}$, es la homogeneidad positiva, dado que $\sigma(\varphi R_x) = \varphi\sigma(R_x)$.

Podrá notarse que bajo las afirmaciones anteriores, el uso de esta medida de riesgo puede llevar a conclusiones que no satisfacen los axiomas, y que por lo tanto no son óptimas.

2.2.2. El Valor en Riesgo

Ampliando lo visto en el capítulo anterior, el valor en riesgo (VaR) con un nivel de confianza $1 - \alpha$, con $0 < \alpha < 1$ se define como como:

$$\rho(R_x) := VaR_{1-\alpha}^{R_x} = -inf\{VaR \in \mathbb{R} \;/\; \mathbb{P}(R_x \leq VaR) \geq \alpha\} \tag{26}$$

Esto es, que con una probabilidad igual a $(1 - \alpha)$, el rendimiento de un portafolio durante un intervalo de tiempo dado, no será menor a $VaR_{1-\alpha}^{R_x}$.

Al igual que la varianza y la volatilidad, el valor en riesgo no es una medida coherente de riesgo, pues aunque satisface las propiedades de monotonía no creciente, homogeneidad positiva e invarianza bajo traslaciones, no satisface la propiedad de subaditividad, de modo que resulta una medida de riesgo, razonablemente mejor que las dos anteriores.

A continuación, se ofrecen las pruebas sobre el cumplimiento, o no de dichas características. Para mayor detalle sobre el particular, pueden consultarse diversas fuentes, en particular el texto de F. Venegas (2005)[6].

a. El VaR satisface la propiedad de monotonía no creciente

Si R_x y R_y son variables aleatorias, tales que $R_x \leq R_y$, se tiene que

$$F_{R_y}(z) = \mathbb{P}\left(R_y \leq z\right) \leq \mathbb{P}(R_x \leq z) = F_{R_x}(z),$$

para toda $z \in \mathbb{R}$, ya que si $\omega \in \Omega$ es tal que $R_y(\omega) \leq z$, entonces $R_x(\omega) \leq R_y(\omega) \leq z$, es decir, que $R_x(\omega) \leq z$. Por lo tanto, si z es tal que $\alpha \leq F_{R_y}(z)$, como $\alpha \leq F_{R_y}(z) \leq F_{R_x}(z)$, se sigue que $\alpha \leq F_{R_x}(z)$, de modo que,

$$\left\{y \in \mathbb{R} \,/\, F_{R_y}(y) \geq \alpha\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x} \geq \alpha\right\},$$

por lo que,

$$inf\left\{y \in \mathbb{R} \,/\, F_{R_y}(y) \geq \alpha\right\} \geq \left\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\right\},$$

esto es,

$$VaR_{1-\alpha}^{R_y} = -inf\left\{y \in \mathbb{R}/F_{R_y}(y) \geq \alpha\right\} \leq -inf\left\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\right\} = VaR_{1-\alpha}^{R_x}$$

ó como se esperaba,

$$\rho\left(R_y\right) \leq \rho(R_x)$$

b. El VaR satisface la propiedad de homogeneidad positiva

Sean, $\varphi > 0$ y $R_y = \varphi R_x$, entonces,

---

(6) VENEGAS, F., o*p. cit*. pp. 54-60.

$$F_{R_y}(y) = \mathbb{P}\big(R_y \leq y\big) = \mathbb{P}(\varphi R_x \leq y) = \mathbb{P}\left(R_x \leq \frac{y}{\varphi}\right) = F_{R_x}\left(\frac{y}{\varphi}\right),$$

de donde se obtiene

$$VaR_{1-\alpha}^{R_y} = -inf\left\{y \in \mathbb{R}/F_{R_y}(y) \geq \alpha\right\} = -inf\left\{\varphi x \in \mathbb{R} \,/\, F_{R_y}(\varphi x) \geq \alpha\right\}$$

$$= -inf\left\{\varphi x \in \mathbb{R}/F_{R_x}\left(\frac{\varphi x}{\varphi}\right) \geq \alpha\right\} = -inf\{\varphi x \in \mathbb{R} \,/\, F_{R_x}(x) \geq \alpha\}$$

$$= -\varphi inf\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\} = \varphi VaR_{1-\alpha}^{R_x}$$

ó bien,

$$\rho(\varphi R_x) = \varphi\rho(R_x)$$

c. El VaR satisface la propiedad de invarianza bajo traslaciones

Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y $R_y = R_x + \varphi$, entonces,

$$F_{R_y}(y) = \mathbb{P}\big(R_y \leq y\big) = \mathbb{P}(R_x + \varphi \leq y) = \mathbb{P}(R_x \leq y - \varphi) = F_{R_x}(y - \varphi)$$

Por lo tanto,

$$VaR_{1-\alpha}^{R_y} = -inf\left\{y \in \mathbb{R}/F_{R_y}(y) \geq \alpha\right\} = -inf\left\{x + \varphi \in \mathbb{R} \,/\, F_{R_y}(x + \varphi) \geq \alpha\right\}$$

$$= -inf\{x + \varphi \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\} = -\big(inf\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\} + \varphi\big)$$

$$= -inf\{x \in \mathbb{R}/F_{R_x}(x) \geq \alpha\} - \varphi = VaR_{1-\alpha}^{R_x} - \varphi$$

ó bien,

$$\rho(R_x + \varphi) = \rho(R_x) - \varphi$$

d. El VaR no satisface la propiedad de subaditividad

Hasta este punto, el VaR ha cumplido con todas las propiedades deseables en una medida coherente de riesgo; sin embargo, como se dijo anteriormente, esta medida no es subaditiva. Para demostrar esta afirmación, utilizará el planteamiento hecho por Venegas (2005)[7] donde se muestra una situación en la que no se cumple con esta propiedad, en el entendido de que al encontrar a menos un ejemplo con estas características, la subaditividad no puede generalizarse para el VaR como medida de riesgo. .

Sean R_x y R_y, dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente función de densidad:

$$f_{R_x}(x) = \begin{cases} 0.9, & x \in (0,1] \\ 0.05, & x \in [-2,0] \\ 0, & otro\ lugar \end{cases}$$

La función de distribución F_x correspondiente, evaluada en 0 satisface

$$F_{R_x}(0) = \mathbb{P}\{R_x \leq 0\} = \int_{-2}^{0} 0.05dx = 0.1$$

De modo que los valores en riesgo correspondientes a las dos variables aleatorias, con un nivel de confianza $1 - \alpha = 90\%$, satisfacen la relación,

$$VaR_{0.9}^{R_x} = VaR_{0.9}^{R_y} = 0$$

Así mismo,

$$\mathbb{P}\{R_x + R_y \geq 0\} = \iint\limits_{R_x+R_y \geq 0} f_{R_x R_y}(x,y)dxdy$$

(7) VENEGAS, F., *Op. Cit*. pp.56-57.

Dada la independencia de las dos variables, la función de densidad conjunta está dada por el producto de las distribuciones marginales, por lo que,

$$f_{R_xR_y}(x,y) = \begin{cases} 0.05^2, & si - 2 \leq x \leq 0 \; y - 2 \leq y < 0 \\ (0.05)(0.9), & si - 2 \leq x \leq 0 \; y \; 0 < y \leq 1 \\ (0.9)((0.05), & si \; 0 < x \leq 1 \; y - 2 \leq y \leq 0 \\ 0.9^2, & si \; 0 < x \leq 1 \; y 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Lo anterior puede observarse en la figura 2.1., donde se muestra la función de densidad conjunta para las dos variables aleatorias definidas en el intervalo (-2,1), así como la región $x + y \geq 0$ a la derecha de la recta $x + y = 0$, necesaria para obtener $\mathbb{P}\{X + Y\} \geq 0$.

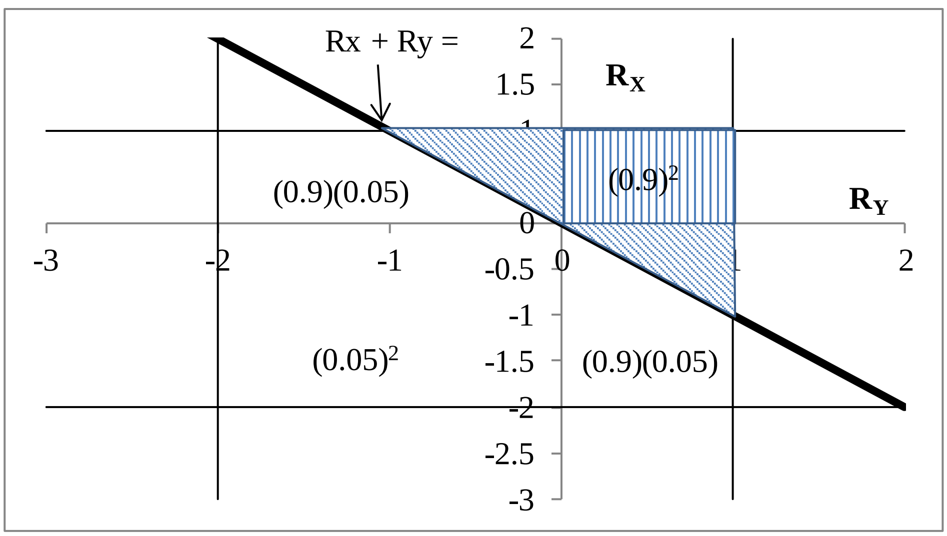


Figura 2.1. Densidad conjunta para las variables aleatorias X y Y.

De la figura anterior se obtiene,

$$\mathbb{P}\{R_x + R_y \geq 0\} = (0.9)^2 + \int_0^1 \int_{-R_y}^0 (0.9)(0.05) dR_x dR_y$$

$$= (0.9)^2 + 2(0.9)(0.05)\left(\frac{1}{2}\right) = 0.855$$

De modo que,

$$\mathbb{P}\left\{R_x + R_y \leq 0\right\} = 0.145$$

Inicialmente sabíamos que $\mathbb{P}\{R_x \leq 0\} = \mathbb{P}\left\{R_y \leq 0\right\} = 0.05$, por lo que $\mathbb{P}\{R\_x \leq 0\} + \mathbb{P}\{R\_y \leq 0\} = 0.1$, que es menor que $\mathbb{P}\{R\_x + R\_y \leq 0\}$.

o bien,

$$0 > inf\left\{z \,/\, F_{R_x+R_y}(z) \geq 0.1\right\} = -VaR_{0.9}^{R_x+R_y},$$

de donde se sigue que

$$VaR_{0.9}^{R_x+R_y} > VaR_{0.9}^{R_x} + VaR_{0.9}^{R_y}$$

Por lo que en este caso, no se cumple la propiedad de subaditividad para el valor en riesgo. El cumplimiento de esta propiedad dependerá de la distribución de probabilidad de los rendimientos de los activos involucrados, de manera que no es posible afirmar que el VaR es una medida de riesgo subaditiva.

2.2.3. <u>El Valor en Riesgo Condicional</u>

Se define el valor en riesgo condicional (CVaR) o esperanza condicional de la cola del VaR para $0 < \alpha < 1$ como:

$$\rho(R_x) \coloneqq CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = -E\left[R_x / R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] = E\left[-R_x \,/\, -R_x > VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] \qquad (27)^{(8)}$$

El CVaR si es una medida coherente de riesgo al cumplir con las cuatro propiedades requeridas como se verá más adelante. Así mismo, es importante señalar que el VaR no proporciona información alguna cuando las pérdidas de un portafolio exceden e umbral $-VaR_{1-\alpha}^{R_x}$, por lo que la esperanza condicional de la cola del VaR capta de una mejor manera

(8) VENEGAS, F. *Ibidem*.

el riesgo asociado a una inversión. En la figura 2.2. se muestra el concepto del valor en riesgo condicional.

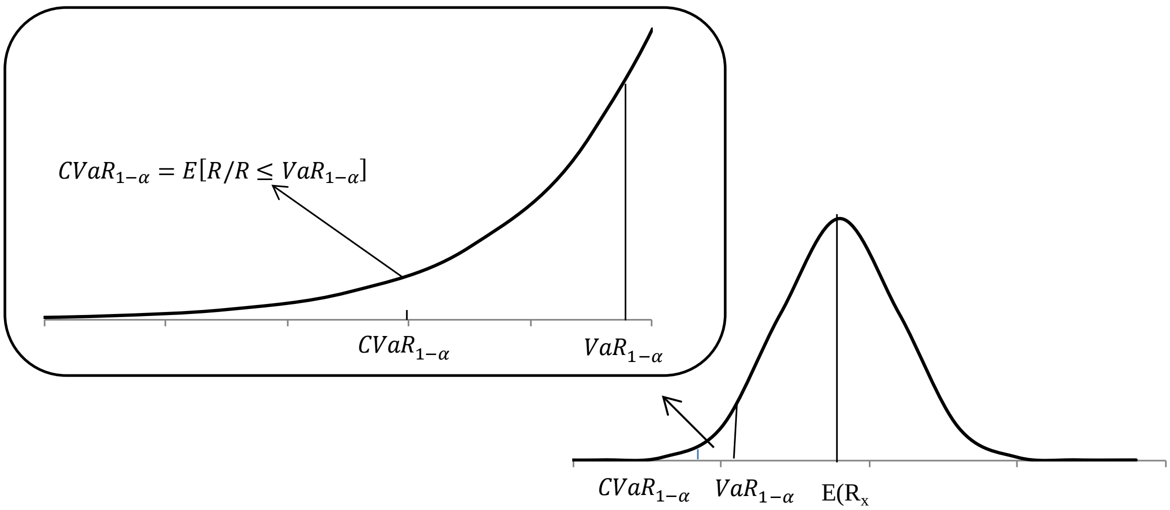


Figura 2.2. Valor en Riesgo Condicional

A continuación se presentan demostraciones sobre la coherencia de esta medida de riesgo en términos de los axiomas definidos por Artzner *et al*. (1999), en este caso recopiladas por Venegas (2005).

a. El CVaR satisface la propiedad de monotonía no creciente

Si R_xy $R_y$son variables aleatorias, tales que$R_x \geq R_y$, entonces(*)

$$E\left[R_y/R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right] = -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + E\left[R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y} \;/\; R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right]$$

(*) Dado un evento A en un espacio muestral S, la función indicadora de A (denotada con1A) es la función definida en *S* con valores en el conjunto {0,1} y tiene la siguiente regla de correspondencia: IA (x)=1 , si x pertenece al evento A; es cero, en cualquier otro caso (es decir, es cero si x pertenece al evento complementario A'). El valor esperado de una función indicadora es igual a la probabilidad de que ocurra el evento A.

$$= -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + \frac{E\left[\left(R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right)1_{\left\{R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right\}}$$

$$= -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + \frac{E\left[\left(R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right)1_{\left\{R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right\}}1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}\right]}{\alpha}$$

$$+ \frac{E\left[\left(R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right)1_{\left\{R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y} < 0\right\}}1_{\left\{R_x \geq -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}\right]}{\alpha}$$

$$\leq -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + \frac{E\left[\left(R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right)1_{\left\{R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right\}}1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}\right]}{\alpha}$$

$$\leq -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + \frac{E\left[\left(R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right)1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}$$

$$= -VaR_{1-\alpha}^{R_y} + E\left[R_y + VaR_{1-\alpha}^{R_y} \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= E\left[R_y/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] \leq E\left[R_x/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

La primera desigualdad se debe al hecho de que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. La segunda desigualdad se sigue de que la intersección de dos eventos está contenida en cada uno de los eventos. De modo que,

$$-E\left[R_x/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] = -E\left[R_y/R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right],$$

o como se esperaba, el CVaR cumple con la propiedad de monotonía no creciente, $\rho\left(R_y\right) \leq \rho(R_x)$.

b. El CVaR satisface la propiedad de homogeneidad positiva

Sean, $\varphi > 0$ y $R_y = \varphi R_x$, entonces,

$$CVaR_{1-\alpha}^{R_y} = E\left[-R_y/R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right] = E\left[-\varphi R_x \,/\, \varphi R_x < -VaR_{1-\alpha}^{\varphi R_x}\right]$$

$$= E\left[-\varphi R_x \,/\, \varphi R_x < -\varphi VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] = E\left[-\varphi R_x \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= \varphi E\left[-R_x \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= \varphi CVaR_{1-\alpha}^{R_x},$$

o como se esperaba, el CVaR satisface el axioma de homogeneidad positiva, $\rho(\varphi R_x) \leq \varphi\rho(R_x)$.

c. El CVaR satisface la propiedad de invarianza bajo traslaciones

Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y $R_y = R_x + \varphi$, entonces,

$$CVaR_{1-\alpha}^{R_y} = E\left[-R_y/R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right] = E\left[-R_x - \varphi/R_x + \varphi < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+\phi}\right]$$

$$= E\left[-R_x - \varphi/R_x + \varphi < -\left(VaR_{1-\alpha}^{R_x} - \varphi\right)\right] = E\left[-R_x - \varphi/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= E\left[-R_x \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] - E\left[-\varphi \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= E\left[-R_x \,/\, R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] - \varphi = CVaR_{1-\alpha}^{R_y} - \varphi$$

Por lo que el CVaR es invariante bajo traslaciones, y $\rho(R_x + \varphi) \leq \rho(R_x) - \varphi$.

d. El CVaR es una medida de riesgo subaditiva

Para demostrar que la esperanza condicional de la cola del VaR, o CVaR es una medida subaditiva, consideremos las estrategias $X, Y \in \mathcal{A}$, y sus correspondientes rendimientos esperados R_x y R_y; entonces,

$$E\left[R_x/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] = -VaR_{1-\alpha}^{R_x} + E\left[R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x}/R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$$

$$= -VaR_{1-\alpha}^{R_x} + \frac{E\left[\left(R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right)1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}$$

$$= -VaR_{1-\alpha}^{R_x} + \frac{E\left[\left(R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right)1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}1_{\left\{R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}$$

$$+ \frac{E\left[\left(R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right)1_{\left\{R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x} < 0\right\}}1_{\left\{R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right\}}\right]}{\mathbb{P}\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}$$

$$\leq -VaR_{1-\alpha}^{R_x} + \frac{E\left[\left(R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right)1_{\left\{R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right\}}1_{\left\{R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right\}}\right]}{\alpha}$$

$$\leq -VaR_{1-\alpha}^{R_x} + E\left[R_x + VaR_{1-\alpha}^{R_x} / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right]$$

$$= E\left[R_x / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right]$$

Dado que R_x y R_y están idénticamente distribuidos, por simetría en los cálculos, sabemos que

$$E\left[R_y / R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right] \leq E\left[R_y / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right],$$

por lo tanto,

$$CVaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y} = -E\left[R_x + R_y / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right]$$

$$= -E\left[R_x / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right] - E\left[R_y / R_x + R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_x+R_y}\right]$$

$$\leq -E\left[R_x / R_x < -VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right] - E\left[R_y / R_y < -VaR_{1-\alpha}^{R_y}\right]$$

$$= CVaR_{1-\alpha}^{R_x} + CVaR_{1-\alpha}^{R_y}$$

En consecuencia, el CVaR es subaditivo pues cumple con la propiedad $\rho(R_x + R_y) \leq \rho(R_x) + \rho(R_y)$.

Se ha demostrado que el valor en riesgo condicional cumple con todas las propiedades deseables de una medida de riesgo para considerarse coherente, de modo que el uso de dicha medida para la selección de carteras, a diferencia de la volatilidad y el valor en riesgo, proporcionará portafolios eficientes en términos del planteamiento de Markowitz construidos sobre una base coherente en términos matemáticos.

2.3. El modelo media–valor en riesgo condicional (MC)

Una vez que se ha definido el concepto de coherencia de riesgo, y que se ha demostrado que el llamado valor en riesgo condicional es una medida teóricamente coherente, e idónea para sustentar un modelo de selección de cartera, se cuenta con los elementos necesarios para la definición del planteamiento objeto de la presente investigación.

Es importante señalar que el uso de métodos alternativos no necesariamente lleva a conclusiones distintas de las obtenidas mediante el método de media-varianza, pues una inversión eficiente debe serlo bajo distintos criterios de selección de portafolios. Sin embargo, el uso de medidas de riesgo más robustas generalmente reduce la región factible al incorporar mayor rigor en las restricciones que la determinan.

Así mismo, se pretende que el modelo planteado sea simple en su concepción, y sobre todo, fácil de implementar con información y herramientas computacionales comunes para que pueda ser asimilado y utilizado de manera regular por la industria de administradores de activos.

Lo anterior supone la construcción de un modelo de optimización de cartera planteado sobre escenarios en tiempo discreto, por lo que será necesario hacer algunas adecuaciones a la representación del valor en riesgo condicional para lograr este objetivo.

La esperanza condicional de la cola del VaR se definió como $CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = E\left[-R_x \, / -R_x > VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]$, lo que puede expresarse de manera discreta, como el promedio de los A% peores escenarios cuando se ha excedido el umbral del VaR.

Es importante señalar que, como lo afirman Acerbi y Tasche (2002) o Rackafellar y Uryasev (2002), al trabajar con distribuciones con discontinuidades, puede haber diferencias entre los conceptos del valor esperado de las pérdidas que exceden al VaR con un nivel de confianza α (tiempo continuo) y el promedio de los A% peores escenarios (distribuciones discretas), aunque estas no resultan relevantes para el análisis. Donde1-A representa el nivel de confianza en tiempo discreto.

Para discretizar el problema de optimización, se utilizará la definición de CVaR dada por Rockafellar y Uryasev (2000) y (2000), para proceder a plantear un modelo de cartera en términos del rendimiento esperado y el valor en riesgo condicional. Reescalando la distribución de la cola del VaR, es decir, la región donde $-R_x \leq VaR_{1-\alpha}^{R_x}$, dentro del intervalo $[0,1]$ podemos representar el CVaR como[9]:

$$CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = -\frac{1}{\alpha}\left[E\left[R_x 1_{\left[R_x \leq VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right]}\right] - VaR_{1-\alpha}^{R_x}\left[\mathbb{P}\left(R_x \leq VaR_{1-\alpha}^{R_x}\right)\right] - \alpha\right] \tag{28}$$

Un importante resultado proporcionado por Rockafellar y Uryasev (2002) es que el valor en riesgo condicional de una variable aleatoria puede ser minimizado dentro del universo de soluciones factibles mediante la solución de un problema de optimización

(9) ROMAN, D., *et al*. *Mean-risk models using two risk reassures: a multi-objetive approach*. pp. 446.

convexa. Los resultados, de acuerdo a dicho planteamiento se muestran a continuación(10):

Sea R_x una variable aleatoria dependiente del vector de decisión $X = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{A}$. Adicionalmente, consideremos la función:

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} E[(-R_x + v)^+] - v \tag{29}$$

donde

$(u)^+ = u$ para $u \geq 0$,

$(u)^+ = 0$ para $u < 0$

entonces:

i. Como función de v, F_α es finita, continua y convexa, y

$$CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = \min_{v \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, v) \tag{30}$$

Además, el conjunto de valores de v para los cuales se alcanza el mínimo, denotado por $A_\alpha(x)$, es no vacío, cerrado y acotado, formado posiblemente por un solo punto.

ii. Minimizar $CVaR_{1-\alpha}^{R_x}$ con respecto a $x \in \mathcal{A}$ es equivalente a minimizar F_α con respecto a $(x, v) \in \mathcal{A}$, de modo que:

$$\min_{x \in \mathcal{A}} CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = \min_{(x,v) \in \mathcal{A}, \mathbb{R}} F_\alpha(x, v) \tag{31}$$

Adicionalmente, el punto (x^*, v^*) minimiza el lado derecho de la distribución, si y solo si, x^* minimiza el lado izquierdo y $v^* \in A_\alpha(x^*)$.

iii. $CVaR_{1-\alpha}^{R_x}$ es convexo con respecto a x, como $F_\alpha(x, v)$ es convexo con respecto a (x, v). Así, el conjunto de soluciones factibles $\mathcal{A}$ es convexo, por lo que el problema de minimizar el valor en riesgo condicional se reduce a un problema de optimización convexa.

---

(10) ROMAN, D. *et al*. *op. cit*. pp. 447-449.

Para el caso específico del rendimiento del portafolio, R_x, considerado como variable discreta, el cálculo y optimización del valor en riesgo condicional puede ser solucionado como un problema de programación lineal. Consideremos que R_x, se distribuye en M posibles escenarios $R_{x1}, \dots, R_{xM}$, que pueden ocurrir con probabilidades $p_1, \dots, p_M$, respectivamente(*). Entonces, F_α en la ecuación (27) puede ser escrita como:

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{M} p_i [v - R_{xi}]^+ - v \tag{32}$$

Ahora bien, de acuerdo al portafolio con n activos, definido en el capítulo anterior, el rendimiento esperado bajo cada uno de los M escenarios estará dado por:

$$R_{Xi} = \sum_{j=1}^{n} x_j r_{ij} \tag{33}$$

Donde r_{ij}, representa el rendimiento del activo i bajo el escenario j; por lo que podemos rescribir la ecuación (32) como:

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{M} p_i \left[v - \sum_{j=1}^{n} x_j r_{ij}\right]^+ - v \tag{34}$$

Finalmente, podemos plantear un modelo de optimización, que denominaremos MC, para el VaR condicional mínimo de un portafolio con n activos bajo una muestra de M escenarios, y por ende, construir una frontera eficiente media-CVaR como:

(MC) Minimizar

$$-v + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{M} p_j y_j$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} -r_{ij} x_i + v \leq y_j \qquad \forall j = 1, \dots, M$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, M$$

(*) Los escenarios pueden ser históricos, o bien simulados aleatoriamente.

$x_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall j = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \geq d$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{35}$$

Donde μ_i, es el rendimiento esperado para el activo i; d, el rendimiento específico del portafolio para el cual se optimiza el problema, y las demás variables como han sido definidas.

Resolviendo para v, x_i y y_i puede obtenerse la estrategia óptima $x_1, \dots, x_n$ para diversos valores de d, e incluso construir la frontera eficiente.

Es importante señalar que, si los M escenarios ocurren con la misma probabilidad $1/_M$, la función objetivo del problema de optimización puede ser simplificada y escrita como $-v + \frac{1}{M\alpha} \sum_{j=1}^{M} y_j$, lo que simplifica considerablemente los cálculos.

2.4. El modelo media – varianza - valor en riesgo condicional (MVC)

El modelo de media–valor en riesgo condicional planteado en la sección anterior es ciertamente más robusto que sus predecesores al incorporar el concepto de coherencia de riesgo en el modelado de portafolios, sin embargo puede ser mejorado si se consideran tres, y no dos parámetros para la optimización. Esta propuesta tiene sentido en el caso de que un portafolio eficiente mediante el criterio de media-varianza con un valor en riesgo condicional excesivamente grande; o bien si un portafolio eficiente por el criterio media-CVaR tiene una varianza considerable.

Lo anterior permitirá captar información en la cola izquierda de la distribución de rendimientos y a la vez regular las pérdidas en condiciones estables de los mercados financieros.

La única forma de detectar las situaciones anteriores consiste en incorporar ambos criterios en la solución del problema de optimización de cartera. El concepto de utilizar más de una medida de riesgo no es nuevo, y ha sido considerado en varios modelos de selección de cartera como se mencionó anteriormente.

Es importante señalar que esta metodología restringe aún más la región factible para la frontera eficiente, y que si bien todos los portafolios eficientes mediante este enfoque resultan también eficientes bajo el modelo tradicional de media-varianza, la incorporación de restricciones sobre las pérdidas máximas en escenarios extremos captadas mediante el valor en riesgo condicional, llevan a un conjunto de soluciones ciertamente mejorado sobre el enfoque original.

Existen diversos antecedentes de modelos multi-objetivo utilizando más de una medida de riesgo. En este caso, se utilizará el modelo de media-varianza-CVaR propuesto por Roman *et al*. (2007). Este planteamiento, utiliza dos medidas y considera la coherencia de riesgo, mediante observaciones discretas de los precios de los activos, y no asume una distribución en particular para los rendimientos, lo que resulta conveniente para nuestro objetivo, permitiendo además una fácil implementación y comprensión del mismo.

Como punto de partida en la descripción de este modelo, y siguiendo con la notación y variables descritas hasta este punto, es necesario establecer el criterio de eficiencia para un portafolio bajo los dos criterios: encontrar una cartera que proporcione el máximo rendimiento con la menor volatilidad, y el menor CVaR simultáneamente.

Para ello, comparemos dos variables aleatorias, R_x y R_y que representan los rendimientos de dos estrategias $X, Y \in \mathcal{A}$. De manera similar a lo expuesto en el capítulo anterior al analizar el modelo de media-varianza, los criterios de eficiencia de tipo Pareto para este planteamiento, de acuerdo a la definición de Roman *et al*., son los siguientes:

"En un modelo media-varianza-CVaR, la variable aleatoria R_x será preferida sobre la variable R_y (o, el portafolio x será preferido sobre el portafolio y), si i solo si $E(R_x) \geq$

$E(R_y)$, $\sigma^2(R_x) \leq \sigma^2(R_y)$ y $CVaR_{1-\alpha}^{R_x} \leq CVaR_{1-\alpha}^{R_y}$, con al menos una estricta desigualdad”[11].

El problema de optimización multi-objetivo sobre estas tres variables, que denominaremos MVC[*], puede ser representado como:

$$\text{(MVC)} \quad \max_{x \in \mathcal{A}} \left(E(R_x), -\sigma^2(R_x), -CVaR_{1-\alpha}^{R_x} \right) \tag{36}$$

Aunque el objetivo es claro, es necesario establecer la metodología específica para la solución de este planteamiento. Roman *et al*., proponen el método de las ε-restricciones para la solución de problemas de optimización multi-objetivo. Esta técnica matemática, planteada originalmente por Haimes *et al*. (1971), convierte el problema original en uno con un solo objetivo, estableciendo límites sobre los objetivos subsidiarios a manera de restricciones. Para lograr esto, es necesario mostrar que la solución planteada al problema con un objetivo, es pareto-óptima al problema multi-objetivo.

Si bien esta metodología no es frecuentemente utilizada como herramienta de programación ya que no siempre lleva a un conjunto de soluciones factibles en una sola corrida[12], resulta de fácil implementación cuando se utiliza una plataforma computacional adecuada que permita la optimización a partir de métodos evolutivos como el Matlab o incluso el popular Solver del Excel. Sin embargo, este último caso se ve claramente restringido por la capacidad de cálculo de esta herramienta en cuanto al número de variables de decisión y restricciones involucradas.

---

(11) ROMAN, D. *et al*. *op. cit.* pp. 447-449.

(*) En este punto, se respeta la notación propuesta por Roman et. al. El acrónimo para designar al modelo, MVC proviene de Media-Varianza-valor en riesgo Condicional y puede ser usado indistintamente en inglés o en español.

(12) LANDA *et al*. *Solving Hard Multiobjetive Optimization Problems using ε-Constraint with Cultured Differential Evolution*. pp. 1-8.

Para la solución del modelo de optimización planteado, se selecciona minimizar la varianza, puesto que se trata de una función cuadrática, mientras que el rendimiento esperado y el CVaR son obtenidos a partir de relaciones lineales, por lo que resulta más simple fijar límites sobre estos últimos y resolver un problema de programación cuadrática que es más sencillo desde el punto de vista computacional. Así pues, el problema de optimización (PO) puede plantearse como sigue:

(PO) Minimizar $\sigma^2(R_x)$

Sujeto a: $CVaR_{1-\alpha}^{R_x} \leq z$

$$E(R_x) \geq d \tag{37}$$

donde *z* y *d* son números reales, y representan el CVaR máximo y el rendimiento mínimo requeridos, respectivamente, correspondientes a la varianza óptima del sistema.

Aunque el planteamiento resulta claro, en el sentido de que una estrategia óptima, x^* para planteamiento de MVC en (36), será también óptima en al problema de optimización PO descrito en (37) con $z = CVaR_{1-\alpha}^{R_x}$ y $d = E(R_x)$; sin embargo se presenta una contradicción en sentido inverso, pues una solución no óptima, pero factible en PO pudiera resultar óptima en MVC. Lo anterior hace necesario asegurar la unicidad de soluciones, y por ende la dominancia de Pareto en ambos sentidos como lo expresan Roman *et al*., mediante la siguiente proposición[13]:

Si la matriz de covarianzas es definida positiva[(*)], un punto X^* es una solución Pareto eficiente de MVC, si y solo sí x^* es una solución óptima del sistema descrito en PO con $z = CVaR_{1-\alpha}^{x^*}$ y $d = E(R_{X^*})$.

---

(13) ROMAN *et al. op. cit.* p. 447.

(*) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es definida positiva si $x^T A x > 0$ para todo x no nulo en $\mathbb{R}^{nx1}$.

Aunque la proposición anterior aplica siempre que la matriz de covarianzas sea definida positiva, es posible generalizarla para el caso de matrices semi-definidas positivas(*), como lo demuestran Roman *et al*. en el documento de referencia.

Ahora sabemos que al resolver el problema de optimización de acuerdo al planteamiento PO obtendremos la solución para MVC; sin embargo, es necesario plantear la restricción sobre el CVaR para poder realizar el cálculo, y para lo cual se utilizará el mismo planteamiento utilizado para la solución del sistema mostrado en (29), donde se establece que $CVaR_{1-\alpha}^{R_x} = \min_{v\in\mathbb{R}} F_\alpha(x,v)$ con $F_\alpha(x,v) = \frac{1}{\alpha}E[(-R_x+v)^+] - v$.

Dado lo anterior, podemos encontrar la estrategia óptima $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{A}$ para el problema:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & f(x) & \\
\text{Sujeto a:} & CVaR_{1-\alpha}^{R_x} \le z, & \forall x \in \mathcal{A}
\end{array}
\tag{38}
$$

Al resolver para:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & f(x) & \\
\text{Sujeto a:} & F_\alpha(x,v) \le z & \forall x \in \mathcal{A}, v \in \mathbb{R}
\end{array}
\tag{39}
$$

Ambos planteamientos tendrán el mismo valor óptimo $X^* \in \mathcal{A}$, siempre que exista un valor $v^* \in \mathbb{R}$, tal que (X^*, v^*) sea una solución óptima de (39). Además, de acuerdo a la definición, $CVaR_{1-\alpha}^{x^*} = \min_{v\in\mathbb{R}} F_\alpha(x^*, v^*)$ en $F_\alpha(x^*, v^*) = z$, si v^* existe, la solución asegura el valor en riesgo condicional deseado del sistema.

Así pues, podemos rescribir el problema de optimización planteado PO como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \sigma^2(R_x) \\
\text{Sujeto a:} & F_\alpha(x.v) \le z
\end{array}
$$

(*) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es semi-definida positiva si $x^T A x \ge 0$ para todo x no nulo en $\mathbb{R}^{nx1}$.

$$E(R_x) \geq d \tag{40}$$

De modo que una solución X^* será Pareto eficiente del sistema MVC, si y solo si existe $v \in \mathbb{R}$, tal que (x^*, v^*) es una solución óptima del problema de optimización (38) con $z = F_\alpha(X^*, v^*)$ y $d = E(R_{X^*})$.

Así pues, obteniendo soluciones para diferentes valores de z, el máximo valor en riesgo condicional, y d, el rendimiento esperado de cada portafolio, es posible obtener un conjunto de soluciones factibles; esto es, una frontera eficiente a partir del sistema planteado en (40).

Ahora bien, aún y cuando se ha planteado el problema de optimización en función de tres parámetros, todavía no resulta lo suficientemente explicito y simple para ser programado en la consideración de M escenarios, por lo que es necesario hacer algunas modificaciones.

Rescribiendo el sistema anterior, del mismo modo que se hizo con el modelo de media-valor en riesgo condicional presentado en (35), podemos expresar el modelo original de Media-Varianza-CVaR (MVC) como sigue:

Si $F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{M} p_i\left[v - \sum_{j=1}^{n} x_j\, R_{ij}\right]^+ - v$, como se expresó en la ecuación (34), donde:

α , es el nivel de confianza requerido;

M, el número de escenarios;

p_i, es la probabilidad correspondiente a cada escenario;

x_j , es la proporción a invertir en el activo “j”, con $j = 1, \ldots, n$;

R_{ij}, es el rendimiento esperado para el activo “j” en el escenario “i”;

Entonces, el sistema MVC puede escribirse como:

Minimizar (varianza del portafolio)

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a

$\sum_{j=1}^{n} x_i \mu_i \geq d$	Restricción de rendimiento mínimo
$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{M} p_i y_i - v \leq z$	Restricción CVaR máximo permitido para el portafolio
$y_i \geq v - \sum_{j=1}^{n} x_i R_{ij}$	Restricción CVaR por escenario
$\sum_{j=1}^{n} x_i = 1$	Restricción para la suma de posiciones(*)
$y_i \geq 0$ y $x_i \geq 0$	Restricciones de frontera

(41)

con

$$i \in 1, \dots, M \quad \text{y} \quad j \in 1, \dots, n$$

donde

μ_i, es el rendimiento esperado para el activo”i”,

d, es el rendimiento mínimo requerido para el portafolio óptimo, y

z, es el valor en riesgo condicional mínimo requerido para la solución óptima.

Resolviendo el modelo anterior para x_i, y_i y v, podemos encontrar la estrategia óptima que asegure la mínima varianza para niveles dados del rendimiento esperado del portafolio y el valor en riesgo condicional correspondiente.

(*) Para este trabajo de investigación se considera que no es posible apalancar el portafolio; sin embargo, es posible omitir o modificar esta restricción si fuere el caso.

El sistema anterior buscará la estrategia óptima correspondiente al portafolio de mínima varianza, tal que asegure un rendimiento mínimo "d", sin exceder un valor en riesgo condicional dado por el parámetro definido como "z". Esto se logrará encontrando el valor único de "v" y las y_i, tales que $y_i \geq v - R_i \geq 0$, con $i \in 1..M$, y donde cada R_i equivale al rendimiento esperado para cada escenario. Así pues, el modelo asignará valores a las y_i de manera que las diferencias entre v y los rendimientos para escenario R_i resulten mínimas.

Es importante señalar que para un rendimiento dado d, la variable z será en todo momento mayor o igual al valor en riesgo condicional correspondiente al portafolio óptimo para el modelo de media-varianza z_{min}, y menor o igual al valor en riesgo condicional z_{max}, del activo más riesgoso de la muestra considerada, de manera que z se mantendrá en el intervalo $[z_{min}, z_{max}]$.

El planteamiento descrito puede ser programado mediante herramientas computacionales a partir de escenarios históricos sobre los rendimientos de los activos considerados, o bien mediante la generación de escenarios generados aleatoriamente.

2.5. La Frontera Eficiente del Modelo MVC y su relación con el modelo de media-varianza

Las estrategias de inversión óptimas bajo distintos modelos de selección de activos deben coincidir, a menos que existan restricciones adicionales que limiten el conjunto de soluciones factibles.

El conjunto de carteras eficientes para distintos niveles de volatilidad y rendimiento que se obtienen mediante el modelo MVC, agregando restricciones sobre las pérdidas máximas superiores al umbral del valor en riesgo, supone en sí, una selección de aquellos portafolios que, sobre la frontera eficiente del tradicional modelo de media-varianza, cumplan con la condición específica para el valor en riesgo condicional, disminuyendo así, el número de soluciones factibles.

Con reserva a validar experimentalmente el modelo propuesto, las soluciones bajo el enfoque del modelo MVC dependen de las características específicas de la muestra de activos utilizados (media y varianza), y adicionalmente del valor en riesgo condicional calculado mediante un método no paramétrico, de modo que el incluir instrumentos con distribuciones de rendimientos con colas pesadas, tendrá un impacto significativo sobre la frontera eficiente.

El cálculo del VaR por simulación histórica, incorporado en el modelo MVC, equivalente al promedio de los A% peores escenarios de pérdida, puede ser distinto al obtenido bajo el supuesto de normalidad en la distribución de rendimientos, incidiendo directamente en la composición de las carteras eficientes, al discriminar aquellos activos con mayores pérdidas históricas.

Igualmente, factores como el nivel de confianza, el grado de precisión de la herramienta informática utilizada para el cálculo, y especialmente, el valor máximo de CVaR permitido, acotarán el conjunto de soluciones factibles.

Así pues, si la condición para el valor en riesgo condicional máximo no restringe la solución, y existe normalidad en la distribución de rendimientos de los instrumentos considerados, la frontera eficiente bajo el modelo MVC coincidirá perfectamente con la obtenida con el modelo de media-varianza.

A medida que el CVaR se va restringiendo, el conjunto de soluciones óptimas con el enfoque de media-varianza-valor en riesgo condicional irá excluyendo a aquellos portafolios que no cumplan con la condición Para valores pequeños de CVaR el número de soluciones disminuirá, y si este valor es menor al del activo menos riesgoso, no existirá solución.

Ahora bien, si la muestra de activos incluye instrumentos con comportamientos no normales, y especialmente aquellos con mucha información en la cola izquierda de la distribución de rendimientos, la solución del modelo MVC no coincidirá con la del de media-varianza, especialmente para los niveles más bajos de riesgo y rendimiento.

En la figura 2.3., se muestra como se comporta la frontera eficiente para la misma base de activos y diferentes niveles de restricción para el valor en riesgo condicional.

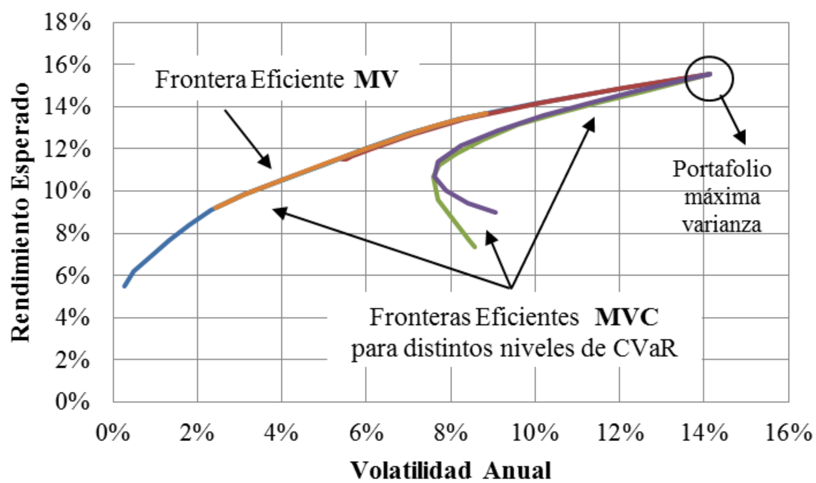


Figura 2.3. Relación entre las fronteras eficientes por los métodos MV y MCV.

Puede observarse como la región factible es limitada por el modelo de media-varianza tradicional (MV), y que se reduce a medida que se restringe el valor en riesgo condicional permitido, de suerte que el modelo MVC hace una selección de carteras sobre la frontera eficiente de media-varianza. Al incluir restricciones adicionales, necesariamente se reduce el conjunto de soluciones factibles bajo los dos criterios, reduciendo la exposición a aquellos activos cuyas distribuciones de rendimientos contribuyan con mayores pérdidas potenciales en situaciones extremas de los mercados, lo que resulta particularmente importante para instrumentos cuyos rendimientos no están normalmente distribuidos.

Así pues, las soluciones óptimas para el modelo MVC, generalmente se encuentran en el conjunto de soluciones factibles del modelo tradicional, aunque es posible que existan conjuntos solución por el modelo MVC, donde algunos valores no sean eficientes por el de media-varianza.

Lo anterior no implica que los resultados del modelo propuesto no sean óptimos, puesto que se trata de otro enfoque, y se consideran eficientes dada la restricción adicional sobre las pérdidas potenciales bajo condiciones extremas captadas por el CVaR histórico. También es posible encontrar soluciones equivalentes, que para los mismos niveles de volatilidad y rendimiento, requieran de una mezcla de activos diferente.

Las afirmaciones anteriores pueden llevar a pensar que el enfoque tradicional de media-varianza es superior al planteamiento con dos medidas de riesgo. Sin embargo, es importante considerar que al agregar un parámetro adicional se excluyen de la frontera eficiente todos aquellos portafolios con pérdidas extremas superiores a un límite previamente definido por el inversionista, cumpliendo así con sus objetivos de inversión, por lo que estas carteras se consideran óptimas bajo este criterio.

Esto supone que las estrategias eficientes del modelo MVC resulten más estables bajo escenarios de alta volatilidad, pues el modelo además de minimizar la varianza, controla las pérdidas más allá del umbral del valor en riesgo, lo que resulta de especial importancia en condiciones atípicas de los mercados, que son cada vez más frecuentes en virtud de la alta volatilidad propiciada por la globalización y la complejidad de instrumentos que en ellos cotizan.

Por otra parte, es importante señalar que para un nivel fijo del rendimiento esperado, el CVaR se comporta como una función decreciente de la volatilidad; o en otras palabras, a mayor volatilidad corresponderá un menor valor en riesgo condicional para valores similares de rendimiento. Esto resulta consistente, pues una mayor varianza implica un mayor valor en riesgo, y por ende, un menor valor esperado para las pérdidas mayores a dicho valor, como se observa en la figura 2.4.

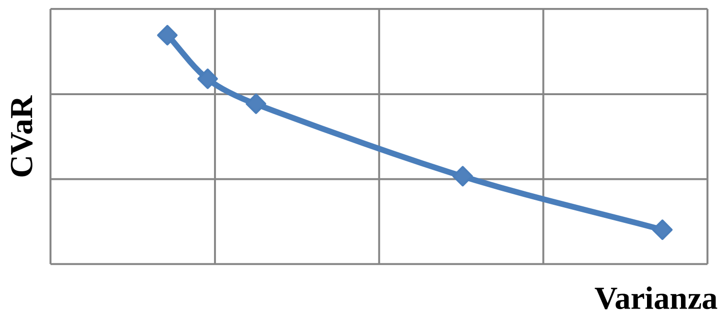


Figura 2.4. Relación entre la varianza y el valor en riesgo condicional par las soluciones eficientes del modelo MVC

Hasta aquí, se ha descrito el modelo de selección de cartera a utilizar, por lo que en los siguientes capítulos se presentarán los resultados obtenidos al aplicarlo sobre activos debidamente seleccionados y disponibles en el mercado nacional.

2.6. Rendimiento requerido y Aversión al Riesgo

El concepto de frontera eficiente resulta algo disperso al momento de elegir un portafolio específico. El presente trabajo, además de proponer y validar una metodología de selección de cartera, tiene por objeto la propuesta de estrategias concretas basadas en el modelo MVC. De esta manera resulta preciso elegir una cartera dentro del conjunto de soluciones factibles.

Conocemos por el modelo de fijación de precios de activos de capital o CAPM, por sus siglas en inglés ("*Capital Asset Pricing Model*") atribuido a William Sharpe (1964)(*), la relación entre el riesgo y rendimiento requerido de una inversión a través de su relación

---

(*) William Sharpe recibió el premio nobel de economía en 1990 por sus contribuciones en la materia, donde destaca el CAPM, presentado en su artículo "*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*" y publicado en 1964. Sin embargo, modelos similares fueron publicados en forma prácticamente simultánea por John Lintner, Jan Mossin y Jack Treynor, por lo que no existe un consenso sobre la autoría del mismo. La idea seminal en todos los casos fue el trabajo que H. Markowitz había hecho algunos años antes.

contra un índice de referencia, que teóricamente se encontrará sobre la frontera eficiente.

Sabemos también, según lo expresado hasta este punto, que todos los portafolios en la frontera eficiente resultan óptimos para distintos niveles de riesgo, y que a todo aumento en riesgo corresponde un aumento en la prima del rendimiento esperado. De acuerdo con el CAPM, dada la tasa de interés libre de riesgo, es posible seleccionar una cartera única sobre la frontera eficiente, conocida como el portafolio de mercado, obteniendo la llamada línea del mercado de capitales, y construir portafolios óptimos a partir de combinaciones entre dicha cartera y el activo libre de riesgo.

El CAPM es ampliamente conocido y utilizado para la determinación de los rendimientos requeridos de diferentes activos en términos de la rentabilidad esperada del mercado, a la vez que incorpora conceptos adicionales al trabajo de Markowitz, tales como la aversión al riesgo y su relación con la frontera eficiente, que utilizaremos para resolver el problema que nos ocupa, consistente en la selección de portafolios concretos mediante el modelo MVC, dada la expectativa de rendimiento y el perfil de riesgo de un inversionista.

La selección de una alternativa específica dentro de las incluidas en la frontera eficiente dependerá de cada inversionista, toda vez que la decisión implica un constante intercambio entre riesgo y rendimiento, como lo suponen todos los modelos de selección de cartera. De acuerdo a la definición de la frontera eficiente sabemos que un individuo elegirá aquel portafolio le que proporcione el mejor rendimiento para un nivel de riesgo dado, o bien, el que implique el menor riesgo para un nivel de rendimiento determinado.

Los niveles de riesgo y rendimiento a utilizar dependerán de la función de utilidad que defina a cada individuo, de forma que no existe una alternativa óptima en términos absolutos, por lo que resulta necesario definir un perfil específico para seleccionar una cartera con una relación riesgo-rendimiento que lo satisfaga.

En este contexto, debemos entender el concepto de aversión al riesgo, por el cual un individuo preferirá la certeza sobre la incertidumbre, de modo que si está expuesto a alternativas con diferentes niveles de riesgo, preferirá aquella con el riesgo más bajo(*). En este sentido, existe la tendencia natural por tomar el menor riesgo posible, a menos que otra alternativa con mayor riesgo otorgue un beneficio mayor y suficiente para preferirla sobre la menos riesgosa.

Como consecuencia de lo anterior, podemos construir la función de utilidad de un inversionista en particular (cuadrática o exponencial), de manera que existirá una curva formada por el conjunto de combinaciones riesgo–rendimiento que le proporcionen idéntica satisfacción. Dicha función, que denominaremos curva de indiferencia, es estrictamente convexa, toda vez que la relación riesgo-rendimiento es siempre positiva y creciente en la medida que aumenta la aversión al riesgo de cada individuo. Lo anterior implica que entre mayor será el riesgo de una inversión, mayor será también el rendimiento esperado requerido por el inversionista. En la figura 2.5. se muestran curvas de utilidad para diferentes niveles de aversión al riesgo.

Así pues, cada inversionista en el mercado tendrá una función de utilidad $U(x)$, tal que existirá una función de aversión al riesgo dada por $A(x) = -U''(x)/U'(x)$ a partir de la cual pueden ser obtenidos coeficientes para medir su grado de aversión al riesgo como lo sugiere S. Buccola (1982)(14).

Si el inversionista tiene una función de utilidad exponencial con parámetro λ, R.J. Freund (1956) muestra que la utilidad puede escribirse en términos del rendimiento esperado R_x y su varianza como $U(x) = E(R_x) - (\lambda/2)\sigma^2(R_x)$.

Es importante señalar, por lógico que parezca, que todas las inversiones cuyo retorno esperado esté por debajo de la tasa libre de riesgo resultan ineficientes, por lo que la aversión

---

(*) Esto aplica para la mayoría de los individuos; sin embargo existen personas que anteponen el riesgo sobre el beneficio, lo que se considera un comportamiento patológico.

(14) BUCCOLA, S.T., *Portfolio Selection under Exponential and Quadratic Utility*. pp. 43-51.

al riesgo tendrá sentido para activos con rendimientos esperados por arriba de dicha referencia. De esta forma, utilizaremos el concepto de rendimiento en exceso para referirnos al retorno adicional o premio que otorga una inversión por encima del interés libre de riesgo.

Es importante señalar, por lógico que parezca, que todas las inversiones cuyo retorno esperado esté por debajo de la tasa libre de riesgo resultan ineficientes, por lo que la aversión al riesgo tendrá sentido para activos con rendimientos esperados por arriba de dicha referencia. De esta forma, utilizaremos el concepto de rendimiento en exceso para referirnos al retorno adicional o premio que otorga una inversión por encima del interés libre de riesgo.

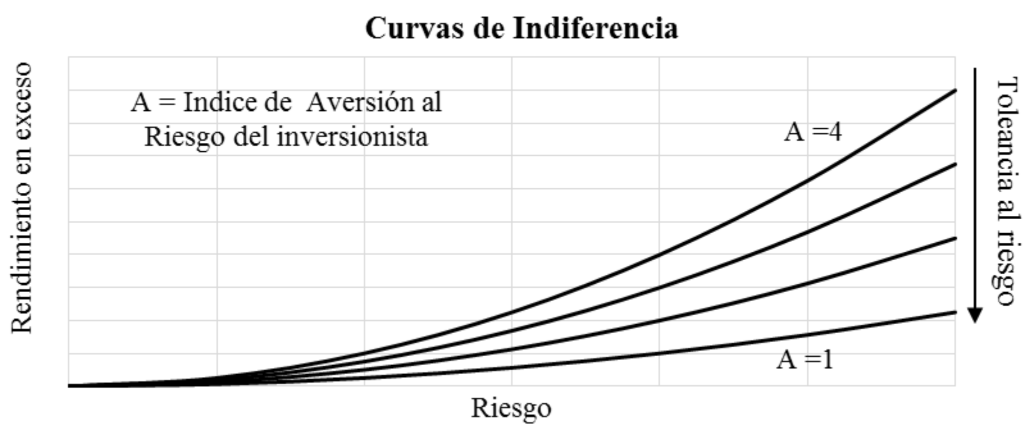


Figura 2.5. Curvas de indiferencia para distintos niveles de aversión al riesgo

En la función de utilidad anterior, el parámetro λ denota la tolerancia al riesgo. Para simplificar, algunos autores utilizan el índice de aversión al riesgo A, definido como $A = \lambda/2$, que aumentará en relación directa con la aversión al riesgo, por lo que la función de utilidad puede ser escrita como:

$$U = E(R_x) - A\sigma^2(R_x) \qquad (42)$$

La expresión anterior define la función de utilidad, donde U expresa la utilidad o rendimiento que un inversionista espera obtener de acuerdo al rendimiento esperado, $E(R_x)$, y varianza, $\sigma^2(R_x)$ de una inversión, dado su grado de aversión al riesgo, A.

De esta forma, un individuo estará dispuesto a intercambiar inversiones, siempre que le proporcionen utilidades equivalentes de acuerdo a dicha relación, que cuantifica la manera en que percibe el riesgo. Evaluando la ecuación (42) para distintos niveles de riesgo, rendimiento y coeficientes de aversión al riesgo, es posible construir una familia de curvas de indiferencia para cada inversionista como se presenta gráficamente en la figura 2.6.

Cada curva le proporcionará igual grado de satisfacción en cualquier punto, por lo que bastaría con encontrar el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de indiferencia de un inversionista para encontrar una cartera óptima acorde a las necesidades de un inversionista en particular.

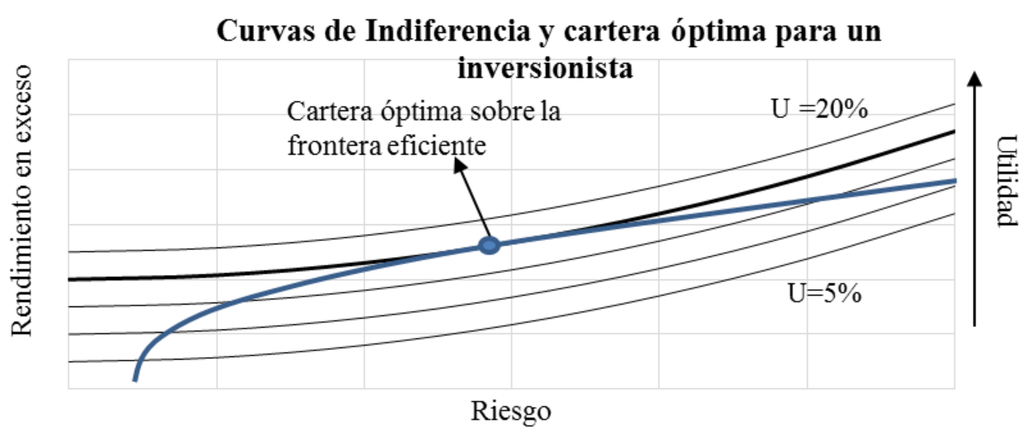


Figura 2.6. Familia de curvas de indiferencia y cartera óptima para un inversionista.

Ahora bien, de acuerdo a nuestro planteamiento, se requiere proponer una cartera eficiente, dado un rendimiento objetivo mínimo sobre el activo de referencia. Así pues, a partir de la ecuación (43), para una inversión libre de riesgo, con $\sigma^2(R_x) = 0$, un individuo esperará recibir una utilidad $U = E(R_x)$, que equivale al interés libre de riesgo, R_f. Consecuentemente, para cualquier otro valor de $\sigma^2(R_x)$ y un coeficiente de aversión al riesgo dado, este mismo inversionista requerirá un rendimiento esperado mínimo igual a:

$$E(R_x) = R_f + A\sigma^2(R_x). \tag{43}$$

Esta relación es similar a la propuesta por el modelo CAPM para la valuación de activos, y con ella basta conocer el coeficiente de aversión al riesgo de un individuo para determinar el rendimiento mínimo requerido para niveles de riesgo específicos. Adicionalmente, es posible comparar este rendimiento contra la frontera eficiente dada por el modelo para verificar si existen o no portafolios acordes a sus expectativas de rendimiento.

2.2. Medidas de eficiencia

Como complemento al modelo de selección de cartera, es necesario incorporar medidas de eficiencia que permitan validarlo, y eventualmente elegir portafolios para niveles de riesgo y rendimiento esperado concretos.

Dadas las características del modelo, y de los activos financieros sobre los que se aplicará, es necesario definir tres medidas frecuentemente utilizadas en la industria de fondos de inversión: la beta, el alfa de Jensen y el índice de Sharpe. Estas medidas de la eficiencia en el desempeño de una cartera, que serán utilizadas en los siguientes capítulos, se describen brevemente a continuación.

2.7.1. La Beta

La beta (β), definida como parte del modelo CAPM propuesto por William Sharpe, es utilizada para comparar la correlación de la volatilidad de un activo o cartera contra un índice, cartera o referencia de mercado.

Si el activo comparado forma parte del índice de referencia, la beta expresa también la parte de la varianza del activo que no puede ser removida vía diversificación, haciendo referencia a la elasticidad financiera o volatilidad relativa, pues indica también la sensibilidad de la volatilidad del activo a movimientos en la volatilidad de la referencia.

Existe extensa bibliografía al respecto de esta medida de riesgo, que en el planteamiento del CAPM, es utilizada para determinar la prima de rendimiento adicional que debe otorgar un activo sobre el interés libre de riesgo, en términos de su riesgo relativo contra el portafolio de mercado. Esta medida es también utilizada como indicador de la eficiencia de carteras en mercados específicos.

La beta β, entre un activo X un índice I, con distribuciones de rendimientos R_x y R_I, respectivamente, se define como[15]:

$$\beta_{X,I} = \frac{\sigma(R_X,R_I)}{\sigma^2(R_I)} \tag{44}$$

donde $\sigma_{X,I}$ es la correlación entre los rendimientos del activo y la referencia y $\sigma_I{}^2$ es la varianza de la referencia, de manera que $\beta_{X,I}$ representará el riesgo relativo del activo contra el índice de mercado, proporcionando también información al respecto del comportamiento entre los mismos.

Así pues, una beta menor a cero indica una correlación negativa entre el activo y el índice, a la vez que una beta igual a cero es indicador de independencia entre ellos. Una beta positiva representa el riesgo relativo del activo contra la referencia de mercado, de manera que un valor igual a uno, determina que ambos son igualmente riesgosos.

Generalmente, la beta es comparada con el coeficiente de correlación entre dos activos. Para entender esta relación, consideremos la correlación ρ como el cociente de la covarianza y las desviaciones estándar de la distribución de rendimientos como se ha definido, de manera que $\rho = \sigma_{X,I}/\sigma_X\sigma_I$, de manera que manipulando esta ecuación podemos llegar a:

$$\beta_{X,I} = \frac{\sigma(R_X)}{\sigma(R_I)}\rho_{X,I} \tag{45}$$

por lo que la beta puede interpretarse como el producto de la correlación y la la escala entre

---

(15) GRINOLD *et. al.*, *Active Portfolio Management*. pp. 75.

las desviaciones estándar de los activos.

2.7.2. El Alfa de Jensen

El alfa de Jensen (α_J), es utilizada para determinar el diferencial de la rentabilidad obtenida por un activo o portafolio y la de un índice de referencia de mercado con la misma cantidad de riesgo.

El multicitado modelo CAPM establece el rendimiento teórico requerido por un activo financiero dado su riesgo relativo contra un índice de mercado. El alfa de Jensen indica si el rendimiento observado es superior o inferior al predicho por este modelo, por lo que es ampliamente utilizada por los administradores de fondos de inversión para comparar el desempeño de un activo contra su referencia, siendo utilizada por primera vez por Michael Jensen en 1968.

Tiene su origen a partir del coeficiente alfa, que representa el intercepto de la línea del mercado de capitales en el modelo CAPM obtenida por regresión lineal. Jensen utilizó este concepto para comparar el rendimiento en exceso de una cartera contra una referencia de mercado como medida de eficiencia, y se define como[16]:

$$\alpha_J = R_x - \left[R_f + \beta_{X,I}\left(R_I - R_f\right)\right] \qquad (46)$$

Donde,

R_x, es el rendimiento del portafolio;

R_f, es la tasa libre de riesgo;

R_I, es el rendimiento del índice de mercado; y

(16) GRINOLD *et al. Ibidem*. pp. 89.

$\beta_{x,I}$, es la beta entre el portafolio y su referencia.

La relación anterior expresa el desempeño de una cartera de inversión, ajustado por riesgo, contra su rendimiento objetivo, dado por un índice de mercado, de manera que si $\alpha_J < 1$, el rendimiento del portafolio habrá sido menor al requerido, y si $\alpha_J > 1$, se habrá superado la expectativa.

Finalmente, si se compara el desempeño de un portafolio directamente contra un activo libre de riesgo, de modo que $R_I = R_f$, entonces la relación lineal $\alpha_J = R_x - R_f$ expresará el rendimiento adicional de una cartera sobre el interés libre de riesgo.

2.7.1. <u>El Índice de Sharpe</u>

Seguramente la medida de eficiencia más popular para medir el desempeño de portafolios de inversión es la propuesta por William Sharpe en 1966, originalmente conocida como "premio al riesgo", y que posteriormente comenzó a ser llamada simplemente índice de Sharpe (S) en referencia a su creador.

El índice de Sharpe es una medida del exceso de rendimiento por unidad de riesgo de una inversión, y se define como[17]:

$$S = \frac{E[R_x - R_f]}{\sigma_x} \tag{47}$$

Donde R_f es el interés libre de riesgo, y R_x el rendimiento del portafolio, cuya volatilidad es σ_x, de modo que S indicará el grado en que el retorno de la cartera compensa al inversionista el riesgo asumido. De esta manera, entre mayor sea el índice de Sharpe, mayor será también la eficiencia en la relación riesgo rendimiento de una inversión.

---

(17) GRINOLD *et al. Ibidem*. pp. 93.

Así pues, si bien todos los activos sobre la frontera eficiente implican alternativas de inversión óptimas para diversos niveles de riesgo y rendimiento, dada la convexidad de esta curva, el portafolio con el mayor índice de Sharpe será el que compensa de mejor forma el riesgo asociado.

2.3. Programación del modelo MVC

Se ha descrito y fundamentado el modelo de media-varianza-CVaR o MVC para la selección de carteras, pero aún no se ha resuelto el problema que implica su implementación. Si consideramos un sistema con n activos partiendo de M escenarios históricos, será necesario plantear un sistema de optimización con $(M+n+1)$ variables de decisión y $(M+3)$ restricciones, sin contar las de no negatividad. De ahí la complejidad en la implementación del modelo planteado.

Así mismo, es necesario tomar en cuenta que es necesario un tamaño de muestra de escenarios históricos tal, que asegure una confianza mínima, lo que dependerá de la volatilidad de los activos financieros involucrados; de ahí la relevancia de elegir una plataforma computacional lo suficientemente robusta que permita la validación del modelo que aquí se ha descrito.

Dado lo anterior, el uso de herramientas comunes como el Excel no resulta suficiente para la programación del modelo MVC, por lo que es necesario el uso de aplicaciones con mayor capacidad.

Para este proyecto de investigación se ha optado por el uso del Matlab(*), que es un programa de cálculo numérico desarrollado por la empresa Mathworks, orientado a matrices que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Esta plataforma posee una fuerte base matemática, y resulta más sencillo de

(*) El nombre de Matlab viene de MAtrix LABoratory.

utilizar que otros sistemas similares, por lo que ha alcanzado una fuerte popularidad entre los desarrolladores de soluciones a problemas numéricos (The MathWorks Inc., 2012).

Así mismo, Matlab cuenta con diversas cajas de herramientas que simplifican su uso para problemas específicos. En lo particular, cuenta con una utilería para la solución de problemas de optimización que permite la aplicación de distintos algoritmos sin otro límite de capacidad que la del procesador del equipo utilizado.

En virtud de lo anterior, se decidió por el uso de este programa para el desarrollo de un sistema capaz de aplicar el modelo planteado y lograr así su validación, como se verá en los siguientes capítulos.

Las definición y características del sistema para la ejecución del modelo MVC, programado en Matlab, así como el respectivo código en lenguaje M se presentan en el Apéndice A y el Anexo II del presente documento, respectivamente.

Dicho programa permite la parámetrización del modelo para distintos conjuntos de activos y número de escenarios, así como para diversos rendimientos mínimos y límites de valor en riesgo condicional, lo que facilita la construcción de fronteras eficientes con el modelo MVC.

Es importante señalar que se ha utilizado la versión 7.14. de Matlab, que incluye algoritmos de solución adicionales, para problemas de programación cuadrática. Dichas características no están disponibles en versiones anteriores de este sistema.

Así pues, la aplicación hecha en Matlab permite, a partir de series de precios de longitud variable para diversos activos, y dados un limite de CVaR y error máximo, construir y graficar fronteras eficientes bajo los enfoques tradicional y MVC. Adicionalmente, se obtienen tablas con la composición precisa de los portafolios óptimos bajo los dos modelos.

En lo sucesivo, todo el análisis tendiente a la validación del modelo, y la propuesta de carteras eficientes será realizado con dicho programa, que puede ser consultado en el apéndice A del presente documento.

C A P I T U L O 3

LOS FONDOS COTIZADOS Y LA SELECCIÓN DE CARTERAS

El modelo de selección de portafolio descrito teóricamente en el capítulo anterior debe ser probado en condiciones reales de los mercados financieros, y para lo cual resulta preciso determinar previamente la muestra de instrumentos específicos que se utilizarán para el análisis.

Tradicionalmente, los administradores de activos han basado la gestión de carteras en la consideración puntual de ciertos instrumentos de deuda o capital, como parte de la la oferta total de los vehículos de inversión disponibles en los mercados financieros. Esto supone el manejo de grandes bases de datos, y sobre todo, se requiere recursos informáticos adecuados para su administración.

Actualmente existen los llamados Fondos Cotizados o Títulos Referenciados a Acciones (TRAC)[*], conocidos mundialmente como ETF (*Exchange Traded Funds*) por sus siglas en inglés, que son certificados de participación que representan el patrimonio de fideicomisos de inversión abiertos, y que mantienen en posición canastas de títulos que cotizan en mercados organizados, cuyo objetivo fundamental es el de replicar el comportamiento del portafolio, o índice al que están referidos (activo subyacente). Así, estos instrumentos son colocados en una bolsa de valores y permiten al inversionista comprar o

---

(*) Estos instrumentos son conocidos en el mercado mexicano como TRAC por sus siglas en español (Títulos Referidos a A Acciones), o bien "*Trackers*", del inglés, haciendo referencia a que siguen el desempeño de algún índice o referencia de mercado conocida. Si bien se trata de un acrónimo, los términos "trac" o "ETF" son utilizados de manera común para referirse a estos fondos.

vender un índice o portafolio a través de una sola acción (Bolsa Mexicana de Valores)[1].

Estos instrumentos son relativamente nuevos, sin embargo, debido a su facilidad de operación, la globalización y dinámica actual de los mercados, así como las ventajas que suponen en el diseño de carteras como mecanismo de gestión de riesgos, han observado un explosivo crecimiento en los últimos años. Dadas sus características, el uso de fondos cotizados o tracs, como los nombraremos en lo sucesivo, permite captar mediante un solo instrumento, el comportamiento de distintos factores de riesgo del mercado, simplificando la selección de valores en los modelos de gestión de carteras, como sostienen diversos autores como Marco Avellaneda del *Courant Institute* de la Universidad de Nueva York (2012)[2].

Por otra parte, el hecho de que estos instrumentos sigan el comportamiento de un índice de mercado perfectamente definido, hace que sea posible trabajar con el subyacente, y no con el activo en el modelado de carteras de inversión, siempre que la réplica sea adecuada.

En virtud de lo anterior, el uso de fondos cotizados o tracs como base para la validación del modelo propuesto, representa un valor agregado desde el punto de vista de su implementación, pues es posible proponer y descomponer un portafolio debidamente diversificado en base a sus factores de riesgo, utilizando pocos instrumentos, por lo que resulta necesario conocer más acerca de los mismos, para lograr así el objetivo de construir una cartera eficiente representativa de un mercado concreto, en este caso el mexicano.

3.1. Características de los fondos cotizados

Como se mencionó, un trac es en sí un portafolio cuyo objetivo es el de replicar el comportamiento de un índice bien definido y que es negociado en un mercado organizado de la misma forma que cualquier otro valor. Mediante estos vehículos, un inversionista puede

(1) Bolsa Mexicana de Valores, http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_tracs_IM.

(2) *Cfr*., AVELLANEDA, M., *Arbitraje con ETFs*, *Risk Management and Trading Conference*. p. 4-10.

adquirir instrumentos que repliquen el comportamiento de diferentes referencias de mercado, tales como el *Standard and Poors* 500 (*S&P500*), el *Dow Jones* (DJIA) de la bolsa de valores de Nueva York, el Indice de Precios y Cotizaciones (*IPC*) de la Bolsa Mexicana de Valores, o bien índices que replican el precio de una o varias mercancías como el oro o el petróleo, o incluso de una canasta específica de bonos u otros subyacentes.

Lo anterior permite al inversionista lograr una mejor diversificación del riesgo y una administración pasiva de su inversión al indexar su rendimiento al de un índice representativo de los mercados financieros. De esta forma, si se desea seguir el desempeño de un mercado bursátil, por ejemplo el mexicano, un inversionista puede adquirir en la Bolsa Mexicana de Valores, títulos de un trac que replique el comportamiento del Índice de Precios y Cotizaciones, operándolo de manera similar a una acción del mercado de capitales, en vez de tener que comprar directa y puntualmente, las acciones que componen dicho índice en las ponderaciones correctas. Mediante una posición en dicho trac, el inversionista posee un solo valor, y obtiene el mismo rendimiento que el activo subyacente(*).

Como cualquier otro instrumento dentro de un mercado organizado, y por lo tanto regulado, la operación con tracs resulta totalmente transparente para el inversionista, toda vez que el depósito y custodia de valores se realiza de manera similar a la de otros instrumentos del mercado, a la vez que cuentan con la liquidez necesaria, que permite el cierre de transacciones en cualquier momento, mediante órdenes limitadas o a mercado, contando así con una alta bursatilidad.

Otra ventaja al operar con tracs en vez de hacerlo con instrumentos tradicionales, radica en menores costos por administración, custodia y operación para el inversionista al disminuir el número de transacciones necesarias para lograr la replicación de un índice. Así mismo, se reducen los costos de transacción para el gestor de la cartera del fondo cotizado, pues su

---

(*) Incluyendo los costos de transacción, para que un trac sea autorizado para su operación en un mercado concreto, debe replicar el índice de referencia o subyacente con una Beta mínima fijada por las autoridades.

composición no cambia considerablemente en el tiempo. Así mismo, el régimen fiscal aplicable es el del país donde operan estos instrumentos.

Sin embargo, lo más relevante es sin lugar a duda, la posibilidad de aislar los diversos factores de riesgo de un mercado a través de estos instrumentos que replican una referencia subyacente debidamente seleccionada(3).

Dada su facilidad de operación, estos instrumentos de inversión han alcanzado rápidamente una gran popularidad entre individuos, corporaciones, y de manera especial entre los inversionistas institucionales, al permitir una mejor diversificación a bajo costo, razón por la que cada vez es más común encontrar a fondos de inversión integrando estos valores como parte de sus estrategias, mediante gestiones activas o pasivas de sus portafolios.

Para su operación, el emisor y operador del instrumento obtiene la autorización necesaria de las entidades reguladoras del mercado para la gestión de un título referenciado a un índice o cartera específicos, colocados y distribuidos en el mercado a través de intermediarios constituidos legalmente, y con un mercado secundario idéntico al de cualquier otro título, lo que garantiza una absoluta transparencia en su operación(4). En la figura 3.1. se muestra gráficamente como un trac es operado en el mercado secundario de la misma forma que una acción, mientras que la institución operadora se encarga de emitir o retirar del mercado títulos representativos del capital aportado al fondo, mediante la replicación real o sintética del índice subyacente.

El primer antecedente a los tracs data de 1993 con la emisión del SPDR S&P 500 (*Standard and Poor´s Depositary Receipt*), cuyo objetivo era el de contar con un valor que captara el comportamiento del índice S&P500, que incluye a las 500 empresas con mayor valor de capitalización en la bolsa de valores de Nueva York. Fue tal el éxito del instrumento, que rápidamente adquirió una bursatilidad superior a la de muchas de las

---

(3) *Cfr*., AVELLANEDA, M. *ídem.*

(4) BOLSA MEXICANA DE VALORES. *http://www.bmv.com.mx.*

empresas incluidas en el mismo índice, generando importantes volúmenes de operación, de suerte que las transacciones comenzaron a realizarse tal y como en el caso de las acciones, esto es, mediante la posibilidad de colocar una orden de compra o venta en cualquier momento de la sesión del remate con posturas limitadas a un precio determinado o bien a su valor de mercado, lo que rápidamente posicionó a este mecanismo como uno de los preferidos de los inversionistas por sus características y bajos costo de operación.

Es importante señalar que esta forma de operación diferencia claramente a los tracs de los fondos de inversión tradicionales, pues estos últimos son valuados a mercado diariamente a un precio único, mientras que el valor de mercado de los primeros dependerá de la situación específica del mercado en el momento de la transacción.

Tras el éxito alcanzado por esa primera emisión de tracs en el mercado americano, rápidamente se comenzaron a listar en la bolsa de Nueva York otros fondos ligados a diversos índices existentes como el Dow Jones o el NASDAQ (*National Association of Securities Dealers Automated Quotation*), e incluso se construyeron nuevos índices con el único objetivo de asociarlos a un fondo cotizado con fines de réplica.

Hacia 1996, *Barclays Global Investors* (BGI) inicia la colocación de los llamados WEBS (*World Equity Benchmark Shares*) en la bolsa de valores de Nueva York, que son títulos referenciados a acciones listados en Estados Unidos sobre carteras que replican diversos índices de mercados internacionales del tipo de los de la familia *IShares* operada internacionalmente por la empresa *Blackrock Advisors*, dando así a los inversionistas americanos la posibilidad de invertir en otros países, en moneda local, sin la necesidad de realizar operaciones cambiarias, y dando también acceso a los pequeños inversionistas dada la simpleza de la operación de estos instrumentos.

Más tarde, alrededor de 1998, se lanzan los primeros tracs referidos a índices sectoriales del *Standard and Poor´s*, lo que permitió a los inversionistas tomar de manera directa el riesgo asociado a distintos sectores económicos, segmentando el mercado a través de estos instrumentos.

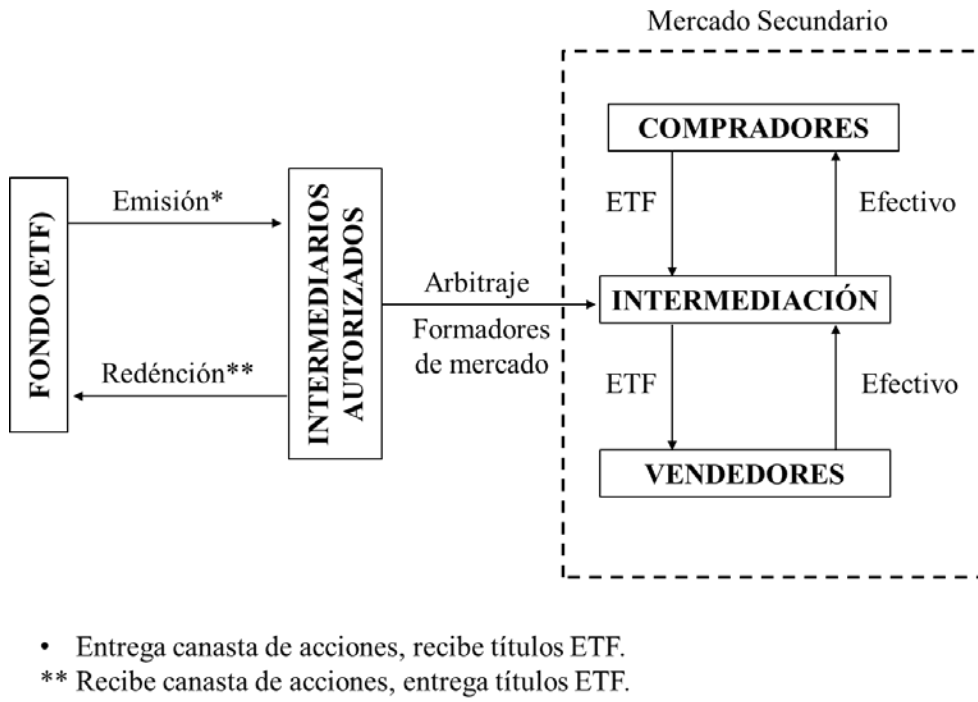


Figura 3.1. Estructura básica de un fondo cotizado[5].

Es en este punto, que los investigadores y analistas del mercado perciben que es posible descomponer el mercado en sus factores de riesgo a través de fondos cotizados. Esto motiva la creación de tracs con índices subyacentes distintos de los de los mercados de capital, con lo que surgen los primeros títulos referenciados a canastas de divisas, mercancías, títulos de deuda, e incluso a índices de volatilidad u otros subyacentes.

El rápido posicionamiento en el mercado de estos instrumentos motiva, hacia 2006 la colocación de los primeros tracs administrados activamente, esto es, aquellos que en vez de seguir un índice fijo de mercado, lo hacen mediante la replicación de una estrategia bien definida a manera de un fondo de inversión tradicional, permitiendo compras especulativas y el rebalanceo de la cartera de acuerdo a las condiciones de mercado, marcando así una nueva era en el mercado de estos instrumentos.

---

(5) AVELLANEDA, M., *Ibidem*. p. 3

Finalmente, durante 2008 aparecen los tracs apalancados, inversos y directos, mediante los cuales un inversionista puede adquirir un instrumento que replica un índice de manera inversa, o bien recibir el rendimiento del subyacente multiplicado por un factor, obteniendo dos, tres o más veces el rendimiento de un índice. Con estos fondos cotizados, es posible generar estrategias de cobertura o diversificar el riesgo de una mejor forma.

Adicionalmente, hay que considerar que los fondos cotizados aparecen en plena era de la globalización, de modo que una misma emisión puede cotizar en varios mercados simultáneamente, de modo que estos instrumentos se consideran globales con independencia del origen de su subyacente.

Así pues, mediante el uso de tracs es posible para un individuo acceder al mercado mediante instrumentos representativos de factores de riesgo y no de valores en lo particular, lo que presenta enormes ventajas en la diversificación de riesgos y la estructura de costos en el manejo de estrategias de inversión.

3.2. Clasificación del los fondos cotizados

En virtud de su versatilidad, los títulos referenciados a acciones han tenido un desarrollo explosivo en los últimos años, alcanzando gran popularidad, siendo hoy en día una parte fundamental de los mercados financieros desarrollados.

En su concepción original, la replicación de índices de mercado mediante un instrumento debidamente diversificado valuado en tiempo real de acuerdo a las condiciones de mercado, permite captar factores de riesgo concretos, de una forma sencilla y deseable para los modelos de selección de cartera. Sin embargo, ciertos fondos, como los administrados activamente o algunos con replicación sintética, difieren de la idea básica, por lo que es necesario entender las características de la oferta de estos instrumentos con el objeto de determinar los requerimientos básicos requeridas para que un trac pueda ser considerado dentro de un modelo de selección de cartera.

Así pues, en la figura 3.2. se presenta la clasificación de estos instrumentos de acuerdo al activo subyacente que siguen y a la manera de replicar su comportamiento. De acuerdo a esta figura, la primera diferenciación consiste en la forma que son operados con el objetivo de seguir un índice de referencia. Dada la definición, el comportamiento de un trac debe ajustarse adecuadamente al de su activo subyacente, de modo que la beta y el coeficiente de correlación entra ambos debe ser teóricamente de uno, lo que implica que las distribuciones de los rendimientos del índice y el subyacente deben ser similares como condición para la replicación.

De esta manera, siempre que estos parámetros se mantengan históricamente cercanos a la unidad, se puede afirmar que la replicación del índice de referencia es la adecuada. Esto dependerá de la forma en que la empresa operadora del trac gestiona la cartera, lo que puede obtenerse mediante la construcción física de una cartera, o bien de manera sintética, mediante el uso de instrumentos derivados, tales como opciones, futuros o swaps.

Así mismo, los operadores de los tracs cobran a los tenedores una comisión por administración de los mismos, que se descuenta diariamente en el precio, lo que hace imposible la replicación perfecta, de modo que las entidades reguladoras de los diferentes mercados exigen una beta mínima. Es importante mencionar que la eficiencia en la réplica se ve también afectada por variables como las imperfecciones de los mercados y la liquidez de los instrumentos.

En los fondos cotizados físicos, el operador construye una cartera con los activos que componen el índice subyacente en las ponderaciones definidas, necesarias para obtener el rendimiento del mismo, y en el tiempo se balancea dicho portafolio de modo que siempre sea una reproducción fiel del activo de referencia. Por el contrario, los tracs sintéticos logran la replicación mediante el uso de instrumentos financieros derivados, por lo que la cartera puede o no estar fondeada. Es importante aclarar que en este último caso, el riesgo de contraparte es asumido por el emisor del fondo y no es trasladado al inversionista.

La segunda división que es necesario considerar, es respecto al tipo de subyacente sobre el que versa el trac. Inicialmente se consideran fondos cotizados que siguen índices bursátiles formados por acciones, que deben ser diferenciados de los índices de mercancías por cuestión de los costos de almacenaje y acarreo asociados, que impactan la correlación entre el fondo cotizado y el precio del activo subyacente. Así mismo, los títulos referenciados a instrumentos de deuda y divisas solo pueden construirse por replicación sintética, de acuerdo a la clasificación que se muestra en la figura 3.2.

Finalmente, la clasificación se relaciona con el tipo de subyacente específico para cada trac. Así, entre los fondos cotizados que hacen replicación física, existen los que siguen índices de mercado, los que se basan en portafolios no indizados a referencias específicas de mercado, y finalmente, aquellos que hacen una administración activa de los recursos con fines especulativos, a manera de una sociedad de inversión. Es importante señalar que si bien estos últimos son considerados fondos cotizados, no pueden ser utilizados dentro de modelos de selección de cartera debido a que el portafolio es modificado continuamente.

En lo que hace a los tracs sintéticos referidos a índices, existen los fondos apalancados, que pagan un rendimiento que resulta de aplicar un múltiplo al rendimiento del subyacente, y los inversos, cuyo rendimiento es opuesto al activo de referencia. En cuando a los tracs sintéticos de administración activa, estos permiten el uso de opciones no convencionales o exóticas, o bien la referencia a índices sobre subyacentes no representados por títulos, tales como la volatilidad o el clima, entre otros.

3.3. El mercado internacional de los fondos cotizados

Ciertamente, los fondos cotizados poseen características que permiten una mejor gestión del riesgo a bajo costo, lo que ha motivado su popularidad entre los inversionistas. Si bien su mercado es relativamente nuevo, ha madurado rápidamente, al punto de que hoy es posible encontrar fondos cotizados que replican prácticamente cualquier índice o referencia disponible. Así mismo, la globalización ha permitido que un mismo instrumento cotice en múltiples mercados, apoyando el crecimiento de este tipo de inversiones.

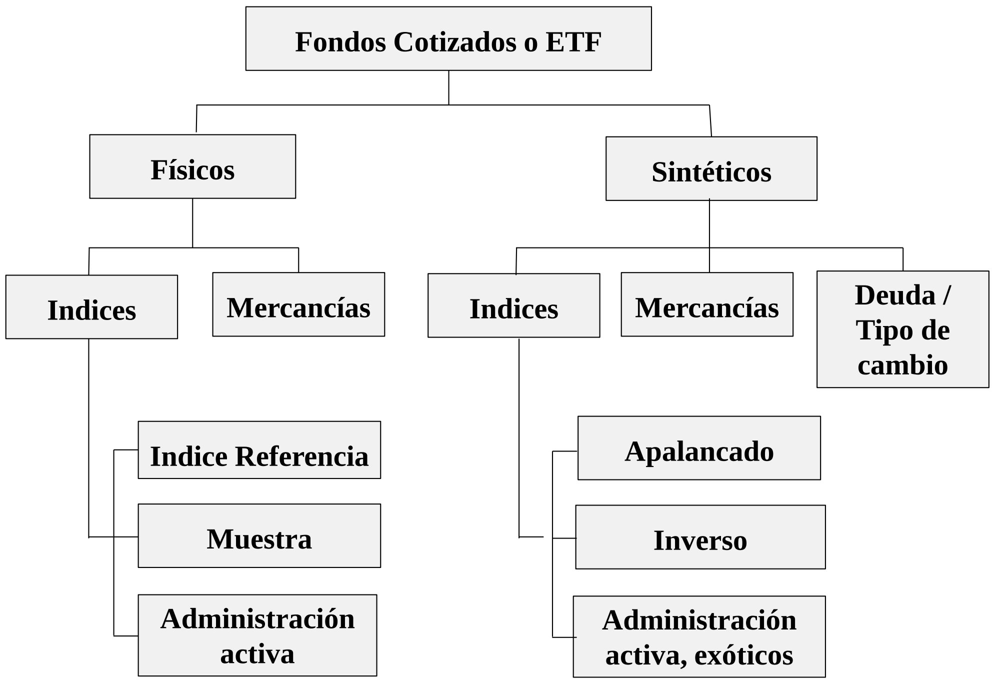


Figura 3.2. Clasificación de los fondos cotizados(6).

Así pues, antes de plantear una estrategia de inversión basada en tracs, resulta necesario conocer la magnitud y dinámica de este mercado en orden a determinar las características de los instrumentos a considerar para la validación del modelo de selección de cartera planteado, en términos de los activos subyacentes y el métodos de replicación utilizados, así como la facilidad de su negociación.

Como se mencionó anteriormente, el primer antecedente de estos instrumentos data de 1993, sin embargo, la falta de información y la poca profundidad del mercado hacen que los analistas fijen el inicio formal hacia el año de 1997. De acuerdo a cifras proporcionadas por

---

(6) AVELLANEDA, M. *Ibidem*. p. 8.

la empresa *Blackrock Advisors,* quien es el principal gestor de estos instrumentos a nivel mundial, en dicho año se encontraban listados tan solo 21 fondos en la bolsa de valores de Nueva York, todos ellos referidos a índices accionarios con replicación física completa, administrando activos por 8,200 millones de dólares americanos(7).

Tan solo catorce años después, al cierre del primer semestre de 2011, esta empresa reporta activos en administración de fondos cotizados por 1,436,700 millones de dólares americanos, distribuidos en 3,987 fondos, tanto de replicación física como sintética. Esto implica una tasa compuesta de crecimiento anual en los activos administrados cercana al 45%, que es muy superior al de otros sectores de la industria y representativo del auge de estos instrumentos.

En la tabla 3.1., se observa el crecimiento que ha tenido este mercado a partir de 1997 de acuerdo al tipo de subyacente, incluyendo índices accionarios, instrumentos de deuda y mercancías cotizadas en los mercados de futuros. Así mismo, se muestra la evolución en los activos administrados por fondos sintéticos, que no han tenido un crecimiento tan rápido, representando tan sólo el 13% de los activos en administración del mercado global, pero el 30% de los fondos distribuidos, lo que habla de la alta especialización de este mercado.

Es importante señalar que las cifras incluyen a tracs que pueden ser operados en distintas bolsas simultáneamente, por lo que la oferta del mercado de los Estados Unidos tiene alcances globales. La información proporcionada por esta tabla, puede ser observada en la figura 3.3., donde es posible ver la tendencia en el crecimiento de la industria de los fondos cotizados en el mercado global.

La mayoría de los fondos cotizados existentes replican índices basados en instrumentos del mercado de capitales, y es fundamental establecer que al tratarse de emisiones listadas en mercados organizados, solo puede existir un solo trac para cada índice de mercado. Al cierre del primer semestre de 2011, el 80.3% de los fondos disponibles tienen como subyacentes canastas de acciones de diversos mercados, mientras el 15.6% están ligados a instrumentos

(7) BLACKROCK ADVISORS, *ETF Landscape 2011*. p. 28.

del mercado de deuda, y tan solo una fracción ligeramente superior al 4% siguen inversiones alternativas(*) o precios de mercancías en los mercados internacionales, tales como el oro, la plata o el petróleo. La dominancia de los instrumentos del mercado de capitales se debe a la facilidad de su replicación física, como se muestra en la figura 3.4.

	Activos en administración (millones de dólares)					**Número de ETFs**		
Año	**Total**	**Acciones**	**Deuda**	**Mercancías**	**Sintéticos**	**Total**	**Físicos**	**Sintéticos**
1997	8,200	8,200				21	21	
1998	17,600	17,600				31	31	
1999	39,600	39,600			2,000	35	33	2
2000	74,400	74,300	100		5,100	106	92	14
2001	104,801	104,700	100	1	3,900	219	202	17
2002	141,600	137,500	4,000	100	4,100	297	280	17
2003	212,000	205,900	5,800	300	6,300	300	282	18
2004	309,900	286,300	23,100	500	9,300	357	336	21
2005	412,100	389,600	21,300	1,200	15,900	524	461	63
2006	565,700	526,500	35,800	3,400	32,500	883	713	170
2007	796,100	729,900	59,900	6,300	54,600	1,541	1,170	371
2008	710,400	596,400	104,000	10,000	61,200	2,220	1,595	625
2009	1,034,200	841,600	167,000	25,600	119,700	2,694	1,944	750
2010	1,307,100	1,053,800	207,600	45,700	171,300	3,543	2,460	1,083
2011 S2	1,436,700	1,151,600	232,800	52,300	183,400	3,987	2,825	1,162

Tabla 3.1. Crecimiento global del mercado de fondos cotizados. Fuente: BlackRock Advisors, ETF Industry Landscape 2011(8).

Así mismo, de acuerdo a las cifras de BlackRock, el 16.9% de los fondos cotizados tienen como activos subyacentes a instrumentos de capital de mercados emergentes, donde se encuentran países como Brasil, Rusia, India, China, y por supuesto México, donde los tracs han tenido una gran acogida dada la facilidad de operar instrumentos listados en el mercado de los Estados Unidos a través de la sección internacional de la Bolsa Mexicana de Valores utilizando el Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC).

(*) Se consideran como inversiones alternativas a aquellas distintas de los mercados de acciones, deuda y mercancías, tales como los tracs de divisas, los que siguen a activos no convencionales como los índices de volatilidad, o a aquellos con apalancamiento o replicación inversa.

(8) BLACK ROCK ADVISORS, *ETF Industry Landscape 2011*. *Idem*.

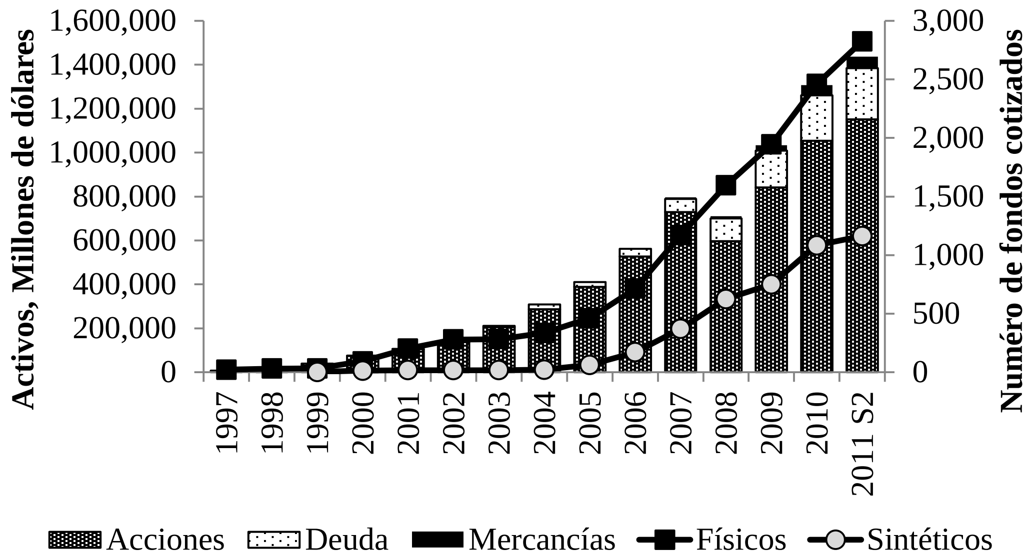


Figura 3.3. Crecimiento global del mercado de fondos cotizados(9)

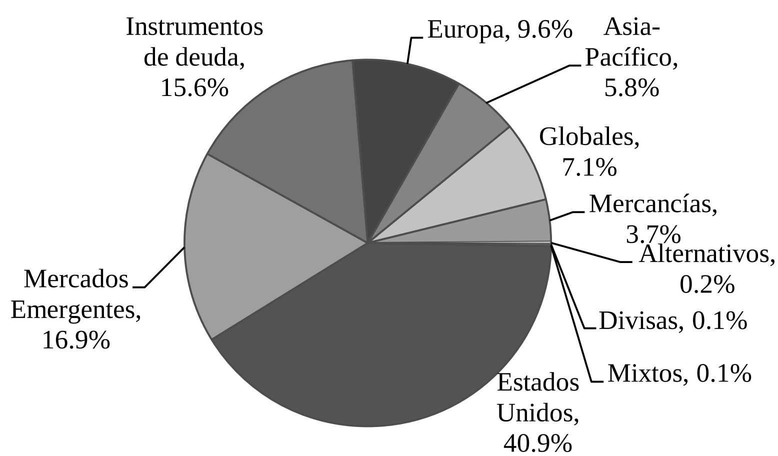


Figura 3.4. Composición del mercado global de fondos cotizados por tipo de subyacente(10)

Otro punto a considerar, es que más del 80% de los tracs disponibles en el mercado global al final del primer semestre de 2011, están administrados por tan sólo 7 empresas, y

(9) BLACK ROCK ADVISORS, *Ibidem.*

(10) BLACKROCK ADVISORS, *Ibidem.*

que la familia de fondos cotizados *IShares*, operada internacionalmente por la empresa *Blackrock Advisors*, representa el 64% de los activos administrados a nivel mundial, con 482 de los 3,987 tracs existentes. Otras empresas importantes en el sector son *State Street Global Advisors*, *Vanguard*, *Power Shares*, *Lyxor Securities*, *ETF Securities* y *Proshares* como se muestra en la figura 3.5.

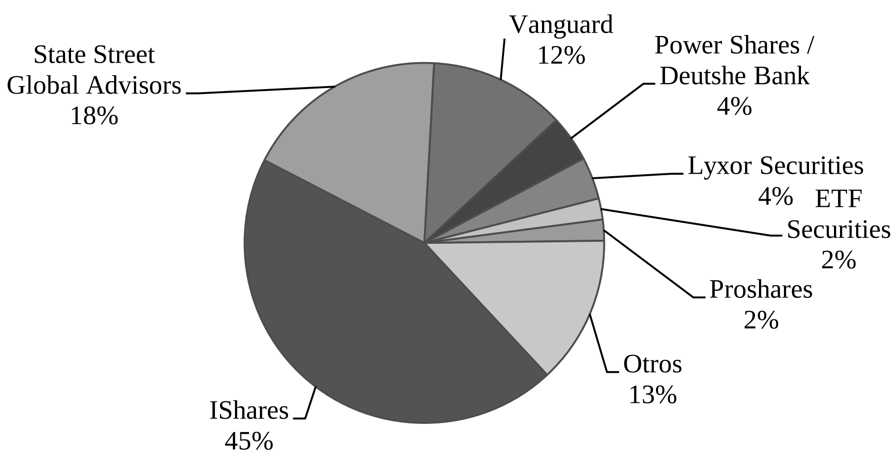


Figura 3.5. Principales operadores de fondos cotizados en los mercados internacionales.[11]

Si bien la mayoría de los tracs pueden ser operados en diversos mercados gracias a la globalización, los fondos de *IShares* tienen especial importancia en los mercados latinoamericanos, pues a esta familia operada por Blackrock pertenecen siete de los diez fondos cotizados más importantes con subyacentes de los mercados de la región, que en conjunto administraban 9,605 millones de dólares al cierre de la primera mitad del 2011, según información proporcionada por dicha empresa (Blackrock Advisors, 2011)[12].

Para entender la afirmación anterior, en la tabla 3.2. es posible comparar los tracs con más activos administrados en América Latina al cierre del primer semestre de 2012,

(11) BLACKROCK ADVISORS, *Ibidem.*

(12) BLACK ROCK ADVISORS, *Ibidem*.

concentrados en Brasil, Colombia y México, siendo este último, con mucho, el más importante en el mercado, por el número de fondos cotizados y por el volumen de activos.

ETF (US$ millones)	País	Clave de Pizarra	Activos
IShares NAFTRAC	México	NAFTRAC	5,761
BRTRAC 10	México	BRTRAC	852
PIBB FUNDO INDICE BRASIL 50	Brasil	PIBB11BZ	821
IShares COLCAP	Colombia	ICOLCAP	652
IShares IPC Large Cap Total Return TRAC	México	ILCTRAC	495
IShares Ibovespa Fundo de Indice	Brasil	BOVA11BZ	439
MEXTRAC	México	MEXTRAC	291
IShares LATixx Mexico UDITRAC	México	UDITRAC	122
IShares Mexico Corporate Bond TRAC	México	CORPTRAC	118
IShares IPC Mid Cap Total Return TRAC	México	IMCTRAC	54

Tabla 3.2. Fondos cotizados más negociados en América Latina (13)

Es importante hacer notar en la tabla de referencia la importancia que *IShares* y México tienen relación al número y valor de mercado de los fondos cotizados en Latinoamérica, y de forma especial el denominado NAFTRAC, cuyo activo subyacente es el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), con activos de 5,761 millones de dólares, al cierre de julio de 2011, muy por arriba de sus competidores inmediatos.

El desarrollo del mercado mexicano se debe básicamente a la apertura hacia los mercados bursátiles de los Estados Unidos, de suerte que es posible adquirir en bolsa mexicana instrumentos listados en la bolsa de aquel país, al amparo del mecanismo diseñado para operar bajo el esquema regulatorio y operativo del Sistema Internacional de Cotizaciones con valores que no fueron objeto de oferta pública en México y que por tanto no se encuentran inscritos en la Sección de Valores del Registro Nacional de Valores, pero que se encuentran listados en mercados de valores que cuentan con el reconocimiento de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)(14).

(13) Información disponible en la dirección electrónica: http://etfroom.com/2011/12/01/los-etfs-tracs-en-mexico/
(14) BOLSA MEXICANA DE VALORES, *http://www.bmv.com.mx.*

El mencionado esquema ha permitido que el mercado financiero mexicano haya tenido desarrollo muy superior al de otras economías emergentes, donde la regulación es tal que este tipo de mecanismos son muy limitados, o no simplemente no existen.

Con reserva a profundizar en la oferta específica de tracs en México, es importante decir que además de los 19 fondos cotizados emitidos en nuestro país, es posible tener acceso a otros 429 instrumentos de este tipo considerados como parte de la sección internacional de la Bolsa Mexicana de Valores, a la vez que inversionistas del exterior pueden también adquirir los títulos referenciados a acciones mexicanos. México representa, por sí solo, el 81% del mercado de estos productos en toda América Latina, observando un crecimiento similar al de los mercados internacionales.

Así pues, los gestores de inversiones alrededor del mundo han puesto su atención en los fondos cotizados, pues permiten una mejor diversificación a menor costo que utilizando instrumentos tradicionales, de suerte que cada vez es más frecuente observar en el mercado fondos cuyas carteras están compuestas exclusivamente por tracs,

Es importante considerar, que para construir un portafolio de inversión utilizando fondos cotizados, se debe tener fácil acceso a los mismos, lo que no siempre es posible en algunos países. Afortunadamente, en México es factible hacerlo, pues existen la oferta e infraestructura suficientes, lo que justifica el desarrollo de una estrategia de inversión basada en estos instrumentos, siempre que los activos utilizados sean debidamente seleccionados, pues no todos los tracs son susceptibles de ser considerados en un modelo de selección de cartera.

3.4. Los fondos cotizados en el mercado mexicano

Para construir un portafolio debidamente diversificado con tracs emitidos en México es necesario conocer las características de este mercado y los instrumentos disponibles en él.

Como se mencionó en el punto anterior, en el mercado mexicano es posible adquirir en la Bolsa Mexicana de Valores instrumentos emitidos tanto en México como en otros países, siempre que se encuentren listados en el Sistema Internacional de Cotizaciones, lo que presenta una ventaja competitiva contra otros mercados de economías emergentes.

Al 31 de julio de 2012, se encuentran listados en la BMV 483 títulos referenciados a acciones sobre diversos activos subyacentes, representando una oferta más que suficiente para la construcción de estrategias de inversión. De esta oferta, 19 instrumentos han sido emitidos en México, mientras que los 429 restantes corresponden a fondos cotizados listados en la bolsa de valores de Nueva York (NYSE)(*) o en el NASDAQ(**). Este grupo incluye a tracs emitidos por las principales operadoras de estos instrumentos a nivel internacional, considerando índices subyacentes sobre el mercado americano, y también de otras partes del mundo, de suerte que es posible negociar instrumentos que replican el comportamiento de los índices *Dow Jones*, el S&P500(***) o el NASDAQ 100(****), entre otros, pero también de muestras internacionales como la familia de índices MSCI(*****), o bien de mercancías como el oro, la plata o el petróleo, o bien carteras a partir de los mismos, como el índice GSCI(******), tal y como si se operara en las bolsas de los Estados Unidos.

La oferta completa de tracs disponibles en México bajo este esquema es basta y suficiente para plantear un portafolio atractivo para el mercado, y puede ser consultada en la

(*) Por sus siglas en inglés, la bolsa de valores de Nueva York es también conocida como NYSE, de *New York Stock Exchange*.

(**) NASDAQ (*National Association of Securities Dealers Automated Quotation*) es la bolsa de valores electrónica y automatizada más grande de los Estados Unidos. Tiene más volumen de intercambio que ninguna otra bolsa en el mundo y se caracteriza porque las empresas listadas en ella corresponden a la llamada nueva economía, incluyendo un gran número de empresa de tecnología.

(***) El índice S&P500 calculado por la empresa *Standard and Poor´s* incuye a las 500 empresas con mayor valor de capitalización en la bolsa de valores de Nueva York.

(****) El índice NASDAQ 100 incluye a las 100 empresas con mayor valor de capitalización en NASDAQ.

(*****) La familia de índices MSCI (*Morgan Stanley Capital Index*) sigue distintos mercados bursátiles, de modo que existen índices para distintos grupos de países.

(******) El índice GSCI (*Goldman Sachs Commodity Index*) es la referencia más importante para los mercados de mercancías en el mundo, y está compuesto por 24 mercancías representativas de los principales sectores (energía, metalurgia, agricultura, metales preciosos) del *Chicago Mercantile Exchange* (CME), que es la principal bolsa de futuros y opciones de mercancías en el mundo.

dirección electrónica de la Bolsa Mexicana de Valores[15]. La mayoría de estos instrumentos siguen variables de mercados extranjeros, por lo que analizarlos sería desviar el objetivo del presente trabajo de investigación consistente en aplicar el modelo de selección de cartera propuesto, en el planteamiento de un fondo representativo del mercado mexicano, por lo que el análisis se dirigirá a los 19 fondos cotizados emitidos localmente.

El primer título referenciado a acciones en el mercado mexicano y en toda américa latina, fue emitido por Nacional Financiera (Nafinsa) en abril de 2002 bajo la denominación de NAFTRAC, y su objetivo es el de reproducir el comportamiento del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores para facilitar el acceso de pequeños inversionistas a inversiones patrimoniales[16]. Este fondo cotizado alcanzó rápida popularidad entre inversionistas locales y extranjeros debido a que les permitía indexar sus rendimientos a los del principal indicador de la bolsa mexicana con un bajo costo, además de contar con la bursatilidad necesaria para entrar y salir del mercado en cualquier momento.

Este instrumento, que cambió su denominación por la de iShares NAFTRAC en mayo de 2009, fue el pionero en el mercado mexicano y permitió la emisión de otros fondos cotizados en México.

Así pues, actualmente es posible adquirir tracs emitidos en la Bolsa Mexicana de Valores, referenciados a índices subyacentes que siguen el comportamiento de distintos activos del mercado nacional e internacional. Bajo este esquema, se puede invertir en una canasta representativa de las emisiones en circulación vigentes de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), de bonos de tasa fija a cargo del gobierno federal (Bonos M), o bien de bonos gubernamentales de tasa real (UDIBONOS) y de deuda soberana de México denominados en dólares americanos (Bonos UMS). También es posible invertir

---

(15)BOLSA MEXICANA DE VALORES. http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_inventario_valores_ETF.

(16) BOLSA MEXICANA DE VALORES. *Ibidem*.

en canastas de bonos corporativos o incluso en portafolios representativos de las economías de Brasil y China.

Si bien el NAFTRAC constituye alrededor del 80% de la oferta disponible en nuestro país, el mercado se ha ido desarrollando rápidamente por la creciente demanda de estos instrumentos.

Aquí se analizan las principales características de los fondos cotizados emitidos en México en orden a realizar una selección inicial en línea con el objetivo de esta investigación. En el Anexo I de este documento se presentan con detalle las principales características de estos instrumentos.

Así pues, al 31 de julio de 2012, en México, el mercado total de los 19 tracs emitidos en territorio nacional tiene un valor cercano a los 100,000 millones de pesos, según cifras reportadas de los operadores a la Bolsa Mexicana de Valores(17). La oferta total esta representada por tres familias de fondos: los tracs apalancados de *Smartshares*(*), los de Casa de Bolsa Bancomer, y los fondos de *IShares*, administrados por Impulsora y Promotora Blackrock México. Esta última representa cerca del 90% del mercado total de estos instrumentos domiciliados en México, como se muestra en la figura 3.6.

Esta concentración tan marcada se debe a que entre los fondos de IShares se encuentra el citado NAFTRAC, que a diez años de su lanzamiento constituye el 78% del mercado, posicionándose como uno de los instrumentos con mayor bursatilidad en la Bolsa Mexicana de Valores al permitir a los inversionistas obtener el rendimiento del Índice de Precios y Cotizaciones a través de un solo valor, como se observa en la figura 3.7.

---

(17) Bolsa Mexicana de Valores, *ibídem.*

(*) Los tracs de esta familia fueron emitidos por Protego Casa de Bolsa, S.A. de C.V. y son administrados por Evercore Servicios, S.A. de C.V. en representación de Smartshares. Recientemente fueron adquiridos por Corporación Actinver, S.A. de C.V..

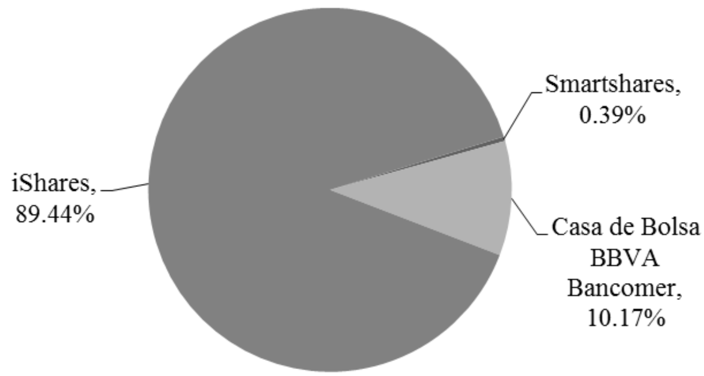


Figura 3.6. Operadores de fondos cotizados emitidos en México(18).

Es importante señalar que el resto de los fondos cotizados son de reciente creación, razón por la que aún no han madurado en el mercado, a la vez que deben competir con la enorme oferta de tracs del extranjero, por lo que algunos de ellos cuentan con un formador de mercado para garantizar su liquidez.

La figura de Formador de Mercado en la Bolsa Mexicana de Valores fue creada a partir de 2008 con el objeto de favorecer las condiciones de liquidez del mercado y establecer precios de referencia, donde una casa de bolsa autorizada por la propia bolsa se compromete a mantener continuamente posturas de compra y venta por un importe mínimo para los valores inscritos en este programa (Bolsa Mexicana de Valores, 2012).

En el caso de los títulos referenciados a acciones, sólo la familia de IShares, administrados por la empresa Blackrock cuentan con esta figura, lo que asegura que siempre

(18) Gráfico construido con información obtenida a partir de las fichas técnicas elaboradas por las empresas operadoras al 31 de julio de 2012. Estos informes están disponibles en las direcciones electrónicas http://www.bancomer.com.mx/Asset, http://www.ishares.com.mx y http://www.smartshares.com.mx.

habrá mercado para estos instrumentos, más allá de su bursatilidad real[*]. La lista de valores con formador de mercado puede ser consultada en la dirección electrónica de la bolsa[19].

Así mismo, de este universo de instrumentos, únicamente los tracs denominados ANGEL y DIABLO, que pagan el doble, y el inverso del rendimiento del Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV son instrumentos apalancados, mientras que el resto son operados mediante la réplica física y completa de sus portafolios subyacentes. Estos fondos apalancados que ofrecen al inversionista un manejo diferenciado del riesgo, son de reciente creación y aún no se han posicionado, teniendo participaciones de mercado muy pequeñas, aunque su volumen operado va creciendo de manera constante.

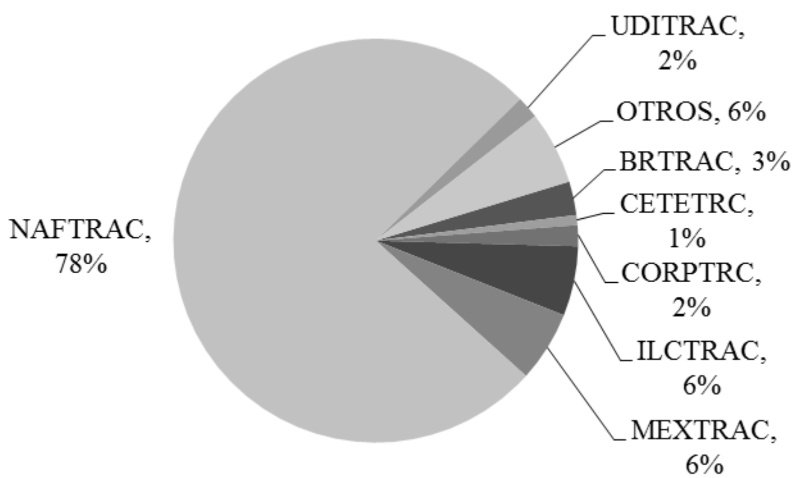


Figura 3.7. Composición del mercado de fondos cotizados emitidos en México[20].

(*) El formador de mercado asegura en todo momento la posibilidad de negociación; sin embargo, el grado de liquidez del instrumento se verá reflejado en los diferenciales de compra-venta.

(19) BOLSA MEXICANA DE VALORES. *Ibidem*.

(20) Gráfico construido con información obtenida a partir de las fichas técnicas elaboradas por las empresas operadoras al 31 de julio de 2012.

La lista completa lo los tracs domiciliados en México puede consultarse en la tabla 3.3 al final de este apartado, donde además se indican datos relevantes como su operador, el índice subyacente que replican y su descripción general.

De la oferta disponible actualmente, existen dos fondos cotizados cuyos índices subyacentes no son representativos de los mercados nacionales. Los fondos denominados BRTRAC y CHNTRAC, siguen índices sobre portafolios representativos de los mercados de acciones de empresas de Brasil y China inscritas en el Sistema Internacional de Cotizaciones(*). Estos tracs cotizan desde marzo del 2010, y pese a su corta vida y carecer de formador de mercado, han logrado cierta penetración.

En cuanto al tipo de instrumento que replican los subyacentes, se tiene que seis de los tracs mexicanos están ligados a carteras compuestas por instrumentos de deuda, mientras que los trece restantes aplican sobre índices del mercado de capitales, incluyendo a los dos fondos apalancados.

Esto supone una oferta lo suficientemente diversificada por tipo de activo, toda vez que los fondos de deuda incluyen subyacentes tan diversos como bonos libres de riesgo de tasa nominal de corto (CETETRC) y largo plazo (M5TRAC y M10TRAC), bonos gubernamentales a tasa real (UDITRAC), deuda soberana mexicana denominada en moneda extranjera (UMSTRAC) y bonos corporativos con calificaciones crediticias AAA, AA y A (CORPTRC). Las características específicas del índice subyacente para cada trac pueden ser consultadas en la tabla 3.3 al final de este apartado.

Mención especial en este punto merece el UMSTRAC ligado a un portafolio de bonos de deuda soberana colocados en el extranjero, denominados UMS, que se además de estar sujetos al riesgo país, tienen como factor de riesgo adicional el tipo de cambio, lo que resulta especialmente relevante para efectos de diversificación.

(*) La composición de las carteras de valores subyacentes de estos instrumentos pueden consultarse en sus respectivas fichas técnicas en la dirección electrónica http://www.bancomer.com.mx/Assets.

Para los fondos cotizados sobre índices del mercado bursátil, la diversidad es también importante. Además del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) que es seguido de forma directa por el multicitado NAFTRAC, e indirectamente por los fondos apalancados (ANGELD y DIABLOI), se tienen fondos sobre índices de mercado alternativos como el Índice México o INMEX seguido por el IMXTRAC, o el ICMTRAC que replica a una muestra de 60 empresas ponderadas bajo criterios de capitalización y rotación.

También existen tracs sobre índices de grupos de empresas con niveles de capitalización de mercado similares. En este grupo encontramos al ILCTRAC e IMCTRAC, que replican carteras de empresas de alta y media capitalización en la Bolsa Mexicana de Valores, respectivamente.

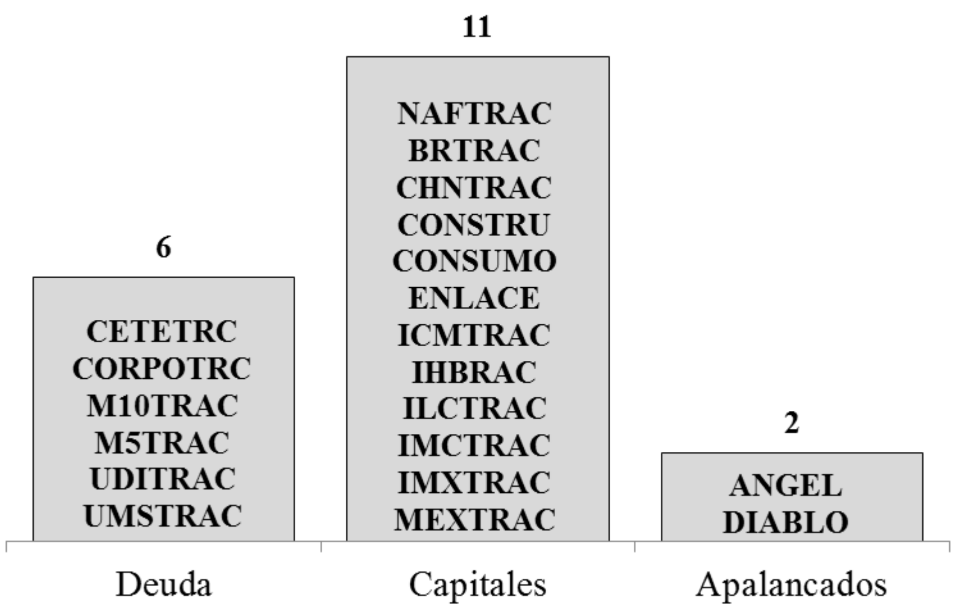


Figura 3.8. Oferta de títulos referenciados a acciones domiciliados en México agrupados por mercado del subyacente replicado.

Igualmente, es posible invertir en títulos referenciados a acciones sobre sectores específicos de la bolsa mexicana. Así se tienen los tracs conocidos como CONSTRU, CONSUMO y ENLACE, operados por Casa de Bolsa Bancomer y que replican índices sectoriales de la construcción, empresas del mercado de bienes de consumo y del ramo de las comunicaciones, respectivamente, o bien el IHBTRAC cuyo subyacente es el índice Habita del sector de la construcción y la vivienda.

Como se ve, la oferta resulta muy completa por lo que es factible la construcción de una cartera diversificada correctamente utilizando como materia prima fondos cotizados, siempre que estos no sigan estrategias activas de inversión, lo que no sucede con ninguno de los fondos cotizados con domicilio en México.

Finalmente, se debe considerar que los fondos IMCTRAC e IHBTRAC no han logrado posicionarse correctamente en el mercado y que su penetración es prácticamente nula, por lo que considerarlos como parte de una estrategia de inversión resultaría riesgoso dada carencia de liquidez.

Tabla 3.3. Títulos Referenciados a Acciones domiciliados en México

TRAC	**Operador**	**Índice Subyacente**	**Descripción**
ANGELD	Smartshares	DDBOL (doble IPC)	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización
BRTRAC	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	Brasil15	15 emisoras brasileñas (ADR) con mayor capitalización en el SIC
CETETRC	iShares	Dow Jones LATixxx Mexico Government Cetes Index	Ponderado Certificados de la Tesorería de la Federación en circulación
CHNTRAC	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	China SX20	20 emisoras chinas (ADR) con mayor capitalización en el SIC
CONSTRU	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV-Construye RT	Muestra de empresas del sector construcción cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora

TRAC	Operador	Índice Subyacente	Descripción
CONSUMO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV México Consumo Frecuente	Muestra de empresas del sector consumo cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora
CORPTRC	iShares	VLMR CORPOTRAC	Portafolio ponderado con emisiones de bonos corporativos AAA, AA y A en circulación
DIABLOI	Smartshares	DIBOL (inverso IPC)	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización
ENLACE	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV México Enlace RT	Muestra de empresas del sector comunicaciones y transportes cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora
ICMTRAC	iShares	Indice IPC CompMx de Retorno Total	Muestra de 60 emisoras de la BMV seleccionadas por valor de capitalización y rotación.
IHBTRAC	iShares	IHB	Indice compuesto por emisoras de la BMV del ramo de la construcción.
ILCTRAC	iShares	IPC LargeCap	Indice compuesto por las 20 emisoras de mayor capitalizacón de la BMV.
IMCTRAC	iShares	IPC MidCap	Indice compuesto por la2 20 emisoras entre los lugares 21 y 40 del índice IPC CompMx de retorno total
IMXTRAC	iShares	INMEX	Indice con las 20 empresas de mayor capitalizacíon en la BMV con un ponderación máxima del 10% por emisora.
M10TRAC	iShares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 5-10 Year Index	Portafolio de bonos de tasa fija con duracón de 5 a 10 años emitidos por el gobierno federal

TRAC	Operador	Índice Subyacente	Descripción
M5TRAC	iShares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 1-5 Year Index	Portafolio de bonos de tasa fija con duracón de 1 a 5 años emitidos por el gobierno federal
MEXTRAC	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV Rentable	20 emisoras con mayor bursatilidad en la BMV
NAFTRAC	iShares	IPC	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización
UDITRAC	iShares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government UDIS Index	Portafolio de bonos de tasa real, denominados en unidades de inversión a cargo del gobierno federal
UMSTRAC	iShares	Dow Jones LATixx Mexico Government UMS Index	Portafolio de bonos de deuda soberana UMS a cargo del gobierno federal

3.5. <u>Eficiencia en la réplica</u>

Hasta este punto se ha hablado sobre las ventajas de los fondos cotizados frente a otras alternativas de inversión, la gran diversidad de instrumentos disponibles, y el rápido crecimiento de este mercado. Sin embargo, nada se ha dicho a propósito de la eficiencia con que el trac replica el comportamiento del índice o cartera subyacentes, lo que resulta esencial para la construcción de portafolios diversificados con estos instrumentos, y sobre todo, si se consideran como representativos de factores de riesgo de mercado, y como insumo al modelo de selección de cartera que se describió en el capítulo anterior.

Descartando a los tracs que tienen estrategias de inversión activas, que por razones obvias no pueden ser considerados como un solo activo pues su cartera no se mantiene estable en el tiempo, una condición necesaria para trabajar con estos instrumentos, es que el fondo cotizado replique de forma razonable el comportamiento de su subyacente, lo cual hace que sea posible trabajar con los índices de mercado en vez de utilizar el trac.

En ningún caso es posible obtener una réplica exacta debido a los costos por transacción en que incurre el fondo, y las comisiones por administración que cobra el operador del trac, que aunque bajas, generan una distorsión entre el rendimiento del índice y el del fondo que lo sigue. Si la diferencia entre los rendimientos de uno y otro permanecen relativamente estables en el tiempo, el rendimiento de un fondo cotizado puede ser estimado a partir del de su subyacente menos un diferencial.

Adicionalmente, las ineficiencias del mercado y la capacidad operativa del gestor del trac contribuyen que exista una brecha entre el fondo y su subyacente, que puede ser pasada por alto siempre que se encuentre en límites razonables.

Una medida de eficiencia frecuentemente utilizada es el error de seguimiento(*), que mide la la diferencia absoluta de rendimientos del trac contra su índice subyacente durante un periodo de tiempo dado. En la industria de administradores de activos se utilizan diversas metodologías para su cálculo, pero la más adecuada es la media cuadrática de las diferencias de rendimientos.

En una réplica correcta se esperaría que el trac pagara el rendimiento del índice de referencia menos las comisiones por administración del operador, gastos y los impuestos correspondientes.

Así pues, de acuerdo a la notación utilizada en los capítulos anteriores, sean R_x y R_I variables aleatorias de los rendimientos del fondo cotizado y su índice subyacente, respectivamente. Entonces, error de seguimiento entre estas dos variables se define como(21):

(*) Es común la referencia a este concepto como "*Tracking Error*" por su nombre en inglés.

(21) GRINOLD, R., *et. al*., *Active Portfolio Management*, p. 49.

$$E_{X,I} = \sqrt{E[(R_x - R_I)^2]}, \tag{48}$$

pudiendo asociar esta medida a cualquier espacio de tiempo, de suerte que podemos hablar de errores de seguimiento diarios, mensuales o anuales, indicando en todos los casos la diferencia esperada absoluta entre los rendimientos del índice y su referencia.

Aunque esta medida se utiliza regularmente, el grado de desfase entre un trac y su activo subyacente, puede ser captado de mejor forma a través de otras medidas como el coeficiente de correlación o la beta (β) entre las distribuciones de sus rendimientos diarios.

Si bien estas dos medidas captan adecuadamente la dispersión relativa entre dos activos, la industria de administradores de inversiones utiliza con mayor frecuencia a la beta, definida en el capítulo anterior.

Así pues, las fichas técnicas que los gestores de los tracs deben publicar periódicamente, incluyen la beta de los fondos cotizados contra sus índices subyacentes, con el objeto de informar debidamente al mercado sobre la eficiencia de la réplica.

De esta forma, se llevó a cabo un análisis sobre los diecinueve tracs emitidos sobre el país y que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores a fin de determinar la eficiencia con que cada uno replica su índice subyacente, en orden a ser considerados como parte de una estrategia de inversión, obteniendo los resultados que se muestran en la tabla 3.4.

La primera conclusión obtenida de este análisis fue que los tracs de capitales hacen un mejor seguimiento de su índice subyacente, mientras que en los fondos de siguen carteras de instrumentos de deuda la réplica resulta más complicada ante la presencia de mayores costos de transacción como consecuencia de los diferenciales de compraventa y de su liquidez, las tasas de impuesto y las características propias de dicho mercado.

Mientras que las betas de los fondos cotizados cuyos subyacentes pertenecen al mercado de capitales son superiores a 0.90, las de los tracs de deuda son ligeramente menores.

Así mismo, se observa que en ningún caso, el trac resulta más riesgoso que su subyacente, lo que implica una menor volatilidad, representando una ventaja para el inversionista. Este efecto parece deberse a que los tracs no captan toda la volatilidad, pues reaccionan a-posteriori, una vez que la cartera subyacente se ha movido.

En general, los errores de seguimiento son razonablemente mayores a la comisión por administración que cobra la entidad administradora por el efecto de otros gastos no trasladados al inversionista y los costos de transacción. Sin embargo, esta brecha aumenta para los tracs apalancados, ANGELD y DIABLOI, donde la réplica parece no ser eficiente.

En el caso de los tracs de deuda, dada su reciente creación, el error de seguimiento es considerablemente mayor a la comisión por administración, pero la brecha se ha ido cerrando en el tiempo, lo que supone que estos instrumentos aún no han alcanzado la madurez o profundidad de mercado requerida, dado el bajo volumen operado.

Es importante señalar que el fondo IHBTRAC que sigue el índice HABITA de retorno total del sector vivienda, que si bien sigue listado en la BMV, no ha operado, por lo que no existe información suficiente por lo que debe ser descartado del análisis.

Así pues, excluyendo dicho trac, existe una oferta de 18 fondos cotizados que pueden ser considerados para elaborar una estrategia de inversión mediante estos instrumentos. Sin embargo, dado el objetivo de proponer una cartera de inversión con el modelo de selección de cartera propuesto, que sea representativa del mercado mexicano y sus factores de riesgo, será necesario reducir aún más la muestra utilizada con el objeto de que su operación sea factible de acuerdo a las características del mercado nacional.

En este sentido, y con reserva de profundizar más en la siguiente sección, se seleccionarán exclusivamente fondos cotizados cuyos subyacentes operen en el mercado mexicano, y que cuenten con un formador de mercado. Sin embargo, es importante reconocer que las tendencias actuales de los mercados mundiales apuntan hacia el uso intensivo de este tipo de instrumentos, por su facilidad de operación y la posibilidad de modelar carteras en base a tipos de activo o factores de riesgo, razón por la que se ha decidido validar el modelo de selección de cartera propuesto utilizando a estos activos como insumo para tal objetivo.

Tabla 3.4. Fondos cotizados mexicanos y su eficiencia(*).
Cifras al 31 de Julio de 2012.

Clave de la emisora	Rendimiento anual(**)		Error de seguimiento anual(***)	Cuota gastos por administración (puntos base)	Beta contra subyacente
	Índice Subyacente	Trac			
ANGELD	22.8%	14.8%	8.0%	190	0.96
BRTRAC	-11.4%	-11.1%	0.3%	50	0.88
CETETRC	4.6%	4.0%	0.6%	30	0.89
CHNTRAC	-20.2%	-19.3%	0.9%	50	0.92
CONSTRU	-22.1%	-22.4%	0.4%	35	0.95
CONSUMO	30.0%	30.6%	0.6%	35	0.98
CORPTRC	8.9%	7.0%	1.9%	30	0.95
DIABLOI	-15.0%	-19.1%	4.1%	190	0.95
ENLACE	2.9%	-1.2%	4.1%	35	0.95
ICMTRAC(****)	15.7%	15.7%	0.0%	38	1.00
IHBTRAC	ND	ND	ND	48	ND
ILCTRAC	17.7%	17.3%	0.4%	38	0.99
IMCTRAC	2.2%	1.6%	0.6%	45	0.99
IMXTRAC	10.1%	11.07%	1.0%	38	0.98
M10TRAC	15.3%	12.5%	2.8%	30	0.88
M5TRAC	7.2%	5.8%	1.4%	30	0.88

(*) Tabla preparada con información de mercado obtenida de las páginas electrónicas de Valuación Operativa y Referencias de Mercado (VALMER, http://www.valmer.com.mx/VAL/) y Bloomberg L.P. (http://www.bloomberg.com) y apoyo en las fichas técnicas de cada fondo.

(**) Rendimientos del año comprendido entre el 31 de julio de 2011 y el 31 de julio de 2012. En los rendimientos para los fondos cotizados no se han descontado los dividendos, para hacerlos consistentes con los de los índices subyacentes correspondientes.

(***) Error de seguimiento entre los rendimientos del trac y su subyacente entre las fechas correspondientes a los rendimientos.

(****) No existe continuidad en las series de precios para este instrumento. Por esta razón se ha asumido que el trac paga lo mismo que su índice subyacente en el periodo de referencia

Clave de la emisora	Rendimiento anual		Error de seguimiento anual	Cuota gastos por administración (puntos base)	Beta contra subyacente
MEXTRAC	19.5%	19.8%	0.3%	25	0.99
NAFTRAC	13.1%	13.7%	0.6%	25	0.91
UDITRAC	18.7%	15.8%	2.9%	30	0.89
UMSTRAC	33.9%	27.5%	6.4%	30	0.87

C A P I T U L O 4

VALIDACIÓN DEL MODELO “MVC” Y SU APLICACIÓN AL MERCADO MEXICANO

Una vez que se ha planteado y sustentado teóricamente el modelo de selección de carteras basado en dos medidas de riesgo, e incluyendo el concepto de coherencia de riesgo, al que hemos llamado “Modelo MVC”, y que se han descrito los llamados fondos cotizados o tracs, justificando su uso como insumo para el modelado de carteras, es necesario validar el modelo a partir de una base experimental que permita su aplicación bajo condiciones reales de los mercados financieros, y eventualmente concluir sus ventajas con respecto a otros modelos similares.

Así pues, además de la validación práctica, se propondrá una metodología específica para la aplicación del modelo en la construcción de carteras con objetivos concretos de inversión, a la vez que se contrastarán los resultados obtenidos contra los arrojados por el el tradicional enfoque de media-varianza propuesto por Harry Markowitz hace más de medio siglo.

Adicionalmente, la consideración de títulos referenciados sobre el mercado mexicano en la validación del modelo, permitirá, mediante el uso de pocos activos, lograr una diversificación adecuada, captando eficientemente los factores de riesgo representativos de la economía nacional a través de los índices de réplica subyacentes a estos instrumentos, proponiendo carteras específicas para distintos niveles de riesgo.

La metodología propuesta incluye la selección de la muestra y los parámetros de operación del modelo, así como las características de las pruebas experimentales requeridas y su calibración para adecuarlo a objetivos específicos de inversión. Dicha metodología deberá ser clara y concisa, toda vez que uno de los objetivos subsidiarios de la investigación es que el modelo pueda ser utilizado de manera regular en la industria de operadores de fondos y sociedades de inversión en la construcción de portafolios.

Una vez que se haya establecido la metodología a seguir, se realizará un ejercicio práctico tendiente a probar el modelo y a proponer carteras para distintos perfiles de riesgo, y de forma concreta, un portafolio específico para el mercado mexicano basado en el mismo.

4.1. Metodología

Para la aplicación y prueba experimental del modelo propuesto en el presente trabajo de investigación, se plantea una metodología en cinco etapas, cuyo manejo dependerá de las características de los activos utilizados en cada caso, y del portafolio final buscado. Es importante señalar que con independencia de la validación del modelo, la metodología que se plantea podrá ser aplicada en la construcción de cualquier cartera diversificada de inversión con el modelo MVC. La secuencia de etapas es la que se describe a continuación.

4.1.1. Definición de objetivos y características del portafolio deseado.

Al momento de diseñar una cartera de inversión, se deben sentar las bases sobre la que se realizará el análisis, definiendo claramente los objetivos de riesgo y rendimiento requeridos, en función de las características del inversionista y mercado en el que se operará, y la estrategia general de inversión.

Este punto resulta fundamental, pues si no se cuenta con objetivos claros y realistas para la elaboración de una estrategia de inversión, cualquier portafolio propuesto resultará demasiado disperso, lo que dificultaría su gestión y eventual comercialización.

Al hablar de una estrategia general nos referimos al marco rector que determina las reglas o lineamientos de inversión bajo la cual se alcanzarán los objetivos de riesgo y rendimiento. De esta forma, no se dará el mismo tratamiento a un fondo que invierte globalmente que a otro que se enfoca en un solo país, región geográfica, o incluso en un sector económico particular. Tampoco es lo mismo la diversificación de una cartera entre activos del mercado de deuda, que el de capitales, en ambos; o bien, invertir en instrumentos tradicionales, o en productos financieros derivados, ya sea con fines de cobertura de riesgos o de especulación.

Así mismo, se debe tener bien clara la forma en la que se logrará el objetivo de rendimiento en función del tipo de activos a considerar en la selección, así como la referencia de mercado específica contra la que se compararán los resultados obtenidos.

Si bien, desde un punto de vista teórico sería posible el uso de una gran cantidad de activos sobre uno o varios mercados, en la práctica esto tiene serias dificultades técnicas, a la vez que una estrategia muy dispersa generalmente resulta difícil de implementar, por lo que se debe especificar el tipo de activos que se utilizarán como insumo al modelo de selección de cartera.

Dado lo anterior, resulta esencial establecer los objetivos a lograr mediante la estrategia de inversión, que esencialmente deberá ser acorde al grado de riesgo implícito, y eventualmente, superar los resultados de la referencia de mercado que haya sido seleccionada, en el horizonte de corto, mediano o largo plazo en el que se considera que deba madurar la inversión.

4.1.2. Selección de muestra y recopilación de datos

Una vez que se tienen claros los objetivos de inversión, es necesario definir las características de la muestra con la que se trabajará. Básicamente se trata de definir el tipo y número de activos (n) y de escenarios históricos (M) a considerar, por lo que resulta conveniente hacer una preselección de los instrumentos financieros que se incorporarán en el análisis, eliminando aquellos activos que no cuenten con los atributos mínimos deseados. Hay que considerar que trabajar con una muestra excesivamente grande puede no resultar conveniente bajo ciertas condiciones, y sobre todo si no se cuenta con los recursos técnicos necesarios para el manejo de grandes volúmenes de información.

En este sentido, se sugiere excluir a los instrumentos financieros para los que no se tenga suficiente información histórica, acorde al nivel de confianza requerido, así como aquellos que por razones de mercado, no tengan la liquidez o profundidad de mercado necesarias para el logro de los objetivos de inversión.

Adicionalmente, se eliminarán aquellos que por sus características específicas, no resulten convenientes a la estrategia de inversión. Por ejemplo, en el caso particular de nuestro análisis, no se incluirán tracs que no tengan una beta mínima contra su índice subyacente, o aquellos que no estén directamente relacionados con la economía nacional, pues esto se contrapondría a la estrategia básica de diseñar un portafolio representativo del mercado mexicano a partir de índices de referencia replicados por ciertos instrumentos.

La disponibilidad y oportunidad de la información, son también factores esenciales a considerar, toda vez que el modelo MVC trabaja sobre escenarios históricos, por lo resulta indispensable contar con las series de precios de mercado suficientes para el análisis, siendo deseable que se trate de niveles diarios de mercado para captar adecuadamente las volatilidades y correlaciones de los activos seleccionados.

Ahora bien, el uso del valor en riesgo condicional como medida adicional de riesgo, sugiere que en la selección del periodo histórico considerado en la muestra, se incluyan eventos extremos presentes en condiciones críticas o desordenadas de los mercados, lo que permite un mejor modelado de las carteras. Así mismo, es indispensable que exista continuidad en las series de tiempo utilizadas para captar adecuadamente las características de los activos utilizados en el modelado.

4.1.3. Parámetros de las pruebas

Como se ha indicado, además de las características de la muestra, el modelo MVC requiere de otros parámetros de operación, que han de ser definidos claramente antes de iniciar las pruebas experimentales.

Así pues, es necesario establecer el nivel de confianza requerido ($1-\alpha$ en el modelo) para el valor en riesgo condicional, así como los rendimientos mínimos requeridos (d) y el CVaR máximo (z) al momento de aplicar el modelo.

Igualmente, hay que definir si la ponderación de escenarios en el modelo será lineal, lo que supone un peso similar para cada observación (1/M en el modelo), o si se utilizará algún tipo de suavizado para diferenciar la contribución de cada observación dentro de la muestra.

En cuanto a los rendimientos esperados de los activos, indispensables para la ejecución de este y otros modelos, es necesario definir claramente la metodología para su estimación; esto es, si se utilizarán el promedio de los rendimientos de la muestra de escenarios históricos, o si se incorporará algún otro modelo.

Así mismo, otros parámetros necesarios para la operación del modelo, tales como el número de portafolios a simular, y el perfil de riesgo del inversionista objetivo, deberán ser definidos en este punto.

Finalmente, hay que considerar que el modelo opera con grandes volúmenes de información, lo que incide directamente sobre el tiempo de proceso de los datos, y que pudiera verse restringido por la plataforma utilizada para el cálculo o la capacidad del procesador. En este caso, como se ha indicado, el modelo ha sido programado en Matlab, donde la herramienta de optimización opera en base a distintos algoritmos evolutivos que aproximan la solución a los parámetros objetivo, por lo que se requiere como insumo adicional la precisión, o máxima tolerancia permitida, lo que podría generar diferencias en los resultados.

4.1.4. Pruebas experimentales y calibración del modelo

Una vez definida la estructura general de los insumos y parámetros para la aplicación del modelo, se procederá a realizar las pruebas experimentales requeridas, con el objeto de recopilar y analizar los resultados obtenidos.

En virtud de la complejidad del modelo, es necesario contar con un sistema computacional adecuado para ejecutarlo. Además, al tratarse de un modelo no comercial, es necesario programarlo mediante alguna herramienta informática capaz de resolver problemas de optimización, y concretamente de programación cuadrática con un gran número de variables de decisión y restricciones, y a la vez procesar grandes volúmenes de información.

En el caso particular de esta investigación, el modelo ha sido programado en Matlab, plataforma a la que se ha referido reiteradamente, y cuyas características se presentan en el Apéndice A del presente documento, y cuyo código puede revisarse en el Anexo I.

Dicha aplicación ejecuta el modelo utilizando como insumos, las series de precios de los activos considerados y los parámetros de operación para la solución del problema de optimización, construyendo una frontera eficiente de portafolios óptimos bajo los modelos MVC y el de media-varianza con el objetivo de poder contrastar los resultados.

Dada la facilidad de comunicación Matlab con otras plataformas, es posible utilizar los resultados del programa y realizar análisis adicionales con otras herramientas más simples, tales como el popular Excel de Microsoft.

Las pruebas serán ejecutadas tantas veces como resulte necesario, replanteando los parámetros hasta que los resultados sean estables y coherentes con los objetivos planteados, lo que implica un proceso de calibración del modelo mediante pruebas recursivas que se ejecutarán tantas veces como se juzgue necesario.

Mediante este proceso, los parámetros generales de operación, tales como el número da carteras, niveles de CVaR, precisión de las pruebas o niveles de confianza podrían ser modificados, así como la base de activos o el número de escenarios históricos utilizados.

En base a lo anterior, deberán hacerse las corridas que se juzguen convenientes, documentando en cada caso los resultados, mediante un proceso de experimentación-calibración hasta obtener una solución estable que satisfaga los objetivos de inversión, previamente definidos, que incluso podrían ser cuestionados y replanteados como parte de la experimentación.

4.1.5. Análisis de resultados y selección de portafolio

Finalmente, los resultados deben ser debidamente analizados bajo distintas condiciones y comparados contra otras metodologías y referencias de mercado. Así mismo, tratándose de carteras de inversión, resulta conveniente la realización de pruebas retrospectivas y de estrés con el objetivo de identificar como reaccionaría el portafolio bajo diferentes circunstancias del entorno.

Este análisis deberá llevar a la selección de una estrategia de inversión acorde a los objetivos de inversión con la metodología y base de información utilizadas.

Así mismo, dado que una cartera de inversión no está sujeta únicamente a riesgos de mercado, resulta valido hacer consideraciones de variables ajenas al riesgo de mercado, tales como los riesgos crediticios y de liquidez, para lo cual será necesario estimar las pérdidas potenciales por estos factores y en su caso realizar correcciones, o incluso procesar nuevamente el modelo.

Finalmente, dada la rapidez con que cambia el entorno, es indispensable balancear periódicamente los portafolios en un proceso dinámico de selección de carteras. El tiempo requerido para la revisión de los portafolios, lo que supone ejecutar nuevamente el modelo con la misma base de activos, dependerá básicamente de la volatilidad de los mercados financieros. En todo caso, deberá definirse la periodicidad, o condiciones determinantes para el balanceo de la cartera.

Hasta aquí se ha expuesto brevemente la metodología que se aplicará con el objeto de validar el modelo de selección de cartera que es materia de esta investigación, utilizando como insumo títulos referenciados a acciones sobre el mercado mexicano, y como resultado, proponer un portafolio concreto que satisfaga las expectativas de un mayor número de inversionistas, y que eventualmente pueda ser comercializado como un producto en el mercado financiero nacional

4.2. Validación del modelo

Una vez definida la metodología a seguir en el análisis, se realizarán las pruebas necesarias a fin de validar el modelo propuesto en este trabajo de investigación, y para lo cual se utilizarán como insumos los títulos referenciados a acciones domiciliados en México que se presentaron en el capítulo anterior. Así mismo, como un subproducto de este proceso, se obtendrán portafolios concretos para diversos grados de aversión al riesgo, objetivos de inversión, y de manera particular se seleccionará una cartera dirigida al gran público inversionista.

4.2.1. Objetivos de Inversión

En el propósito de validar e implementar el modelo de selección de cartera basado en dos medidas de riesgo, denominado MVC, es necesario definir una aplicación, que permita experimentar y obtener resultados que puedan ser comparados contra el método general de media varianza y contra otras variables y referencias de mercado.

Como se indicó en su momento, la incorporación del valor en riesgo condicional dentro del modelo, además de considerar el concepto de coherencia de riesgo, permite captar de una mejor forma la presencia de eventos extremos en las distribuciones de rendimientos, y hacer mejores predicciones sobre el comportamiento de los activos financieros utilizados ante escenarios de alta volatilidad, logrando un mejor modelado de carteras en dichas condiciones.

Eventos como la crisis hipotecaria de los Estados Unidos, con alcances globales, que detonó después de la quiebra de Lehman Brothers en octubre de 2008, han marcado profundamente a los mercados financieros por su gran impacto y persistencia en el tiempo. La volatilidad generada por dicho evento fue tan grande, que aún años después son visibles sus secuelas, lo que ha incrementado sustancialmente la aversión al riesgo en los mercados financieros, de modo que cualquier propuesta de inversión en nuestros días debe tomar en cuenta estos acontecimientos.

Para ello, se propondrá un fondo de inversión diseñado con el modelo MVC a partir de títulos referenciados a acciones emitidos en México, cuyos índices subyacentes sean representativos de los factores de riesgo del país y que coticen en la Bolsa Mexicana de Valores, con el objetivo de plantear una estrategia de inversión eficiente. Esto permitirá diseñar un fondo totalmente basado en el país incluyendo activos de los mercados de deuda y capitales, de emisores públicos y privados, y de tasas nominales y reales, considerando también las emisiones a cargo del gobierno federal en los mercados internacionales.

Como se ha explicado, estos instrumentos que cotizan en las bolsas a manera de acciones, tienen como objetivo el de replicar una referencia de mercado bien definida, y hace relativamente poco que cotizan en México. Desgraciadamente, en la mayoría de los casos, no se cuenta con la información histórica suficiente de los propios instrumentos; sin embargo, es posible realizar el modelado a partir de sus índices subyacentes, siempre que la exista una correlación mínima entre cada trac y su referencia, para asegurar la eficiencia de la réplica. El uso de series que incluyan escenarios de crisis, permite captar en el diseño eventos extremos como los citados anteriormente, por lo que en este caso, se requiere de series con una antigüedad mínima que incluyan los acontecimientos de octubre de 2008 y su repercusión en los años posteriores.

Si bien el objetivo fundamental es el de probar experimentalmente el modelo MVC, se tiene como objetivo subsidiario el de plantear estrategias de inversión eficientes y representativas del mercado mexicano, mediante tracs de deuda y capital, y que proporcionen el máximo rendimiento esperado con un nivel de riesgo razonable.

Si bien los instrumentos considerados son del mismo tipo, la inclusión de diversos factores de riesgo dificulta la identificación de una referencia de mercado concreta para evaluar el desempeño de la estrategia propuesta a través de la beta o el coeficiente de correlación entre el portafolio y su índice subyacente. Dado lo anterior, se propone medir la eficiencia de la inversión planteada a través del rendimiento adicional que la estrategia proporcione sobre una referencia específica, lo que se conoce como Alfa de Jensen, como se definió en el capítulo anterior. Así pues, el objetivo será el de proporcionar una cartera que entregue un rendimiento esperado adicional sobre un índice de referencia público.

Dadas las características de la muestra de activos que se utilizará como insumo, no existe una referencia pública que agrupe tantos factores de riesgo, razón por la que se utilizará como base la tasa libre de riesgo en moneda nacional, medida a través del índice VLMER MEX CETES que es publicado y actualizado diariamente por la empresa Valuación Operativa y Referencias de Mercado, filial de la Bolsa Mexicana de Valores y que puede ser consultado libremente a través de Internet (Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S.A. de C.V., 2012). Dicho índice refleja el rendimiento bruto ponderado de todas las emisiones de Cetes en circulación.

De esta forma, se requerirán puntos porcentuales adicionales sobre dicha referencia dependiendo del perfil de riesgo de cada inversionista (conservador, moderado o agresivo), de suerte que entre mayor riesgo, se requerirán un mayor premio adicional o “alfa” sobre el índice mencionado. Así pues, con el objeto de seleccionar portafolios para distintos perfiles de inversión, de acuerdo a su grado de aversión a riesgo, que definiremos como conservador, moderado y agresivo, se requerirán 2, 5 y 10 puntos porcentuales adicionales sobre la referencia, respectivamente. Adicionalmente, se considerará el perfil moderado para el planteamiento de una estrategia única para su comercialización entre el gran público inversionista a manera de una sociedad de inversión.

Ahora bien, en virtud de que el modelo de selección de cartera propuesto utiliza al valor en riesgo condicional como medida de riesgo, y dado el grado de aversión al riesgo presente en los mercados, donde los inversionistas pretenden sobre todo, preservar el capital invertido, se establecerán CVaR máximos para cada perfil de riesgo. En este sentido, una pérdida de capital "extrema" de 2.5% diaria con un 99% de confianza, para el portafolio sugerido denominado como moderado resulta razonable(*). Así, en la tabla 4.1. se presentan los niveles específicos de valor en riesgo condicional para cada uno de los perfiles de inversión considerados.

Es importante señalar que el nivel de valor en riesgo máximo permitido se ha fijado en base a la experiencia y que podría ser modificado. El supuesto básico es que si un inversionista experimenta una pérdida mayor o igual al límite establecido en un día de operación, consideraría seriamente re-balancear su portafolio o vender sus posiciones ante la expectativa de pérdidas mayores en el futuro. En este caso, por ejemplo, un valor de 2.5% diario nos parece razonable para un inversionista moderado.

Finalmente, los objetivos de inversión requeridos, y que suponen la base para las pruebas experimentales a realizar con el modelo MVC se presentan en la tabla 4.1.

4.2.1. <u>Selección de muestra y recopilación de datos.</u>

Para la validación del modelo, y la propuesta de una cartera específica basada en títulos referenciados a acciones emitidos en México cuyos índices subyacentes sean representativos

---

(*) Una pérdida esperada de 2.5% en un día, equivale a 5.59% en una semana, 11.7 en un mes, o a 39.7% en un año. Hay que recordar que estas pérdidas corresponden a eventos extremos de los mercados, que ocurren con una probabilidad menor al 1%, dado el nivel de confianza del 99%.

del mercado nacional, que mantengan betas mínimas de 0.87 para asegurar que la réplica sea correcta y poder trabajar con las referencias de mercado en vez de los instrumentos directamente, se ha hecho una selección entre los tracs disponibles en el mercado mexicano, reduciendo la población a tan sólo once de los activos disponibles.

Tabla 4.1. Objetivos de Inversión

Concepto	Objetivo
Activos materia de inversión	Títulos referenciados a acciones emitidos en México con subyacentes representativos de la economía nacional y cotizados en la Bolsa Mexicana de Valores.
Beta mínima entre activos e índices de referencia subyacentes(*)	0.87
Índice de referencia	VLMR_MEX_CETES (1)
Rendimiento anual mínimo requerido sobre el índice de referencia (alfa)	Puntos porcentuales anuales sobre el índice de referencia: Perfil conservador: 2, Perfil moderado: 5; Perfil agresivo; 10.
Valor en riesgo condicional (CVaR) máximo diario (confianza 99%)	Perfil conservador: 1% Perfil moderado: 2.5% Perfil agresivo: 5%

Inicialmente, se han excluido aquellos tracs que siguen referencias de mercados extranjeros como el BRTRAC (Brasil) y EL CHNTRAC (China), así como el IHBTRAC en virtud de que prácticamente no existe mercado para este instrumento.

(*) Dado que los tracs de deuda son de reciente creación, se ha utilizado la beta mínima observada en el periodo comprendido entre el 31 de agosto de 2011 y el 31 de agosto de 2012 para incluirlos en el análisis. Este valor tiende a aumentar a medida que el mercado de estos instrumentos se desarrolla.

(1) El índice público y su desempeño histórico, puede ser consultado gratuitamente en la dirección electrónica: www.valmer.com.mx/VAL/Web_Benchmarks/Indice_BenchMarks.html

Posteriormente, para que la estrategia propuesta sea viable, resulta necesario asegurar que los instrumentos utilizados cuenten con liquidez en el mercado, de suerte que puedan ser comprados o vendidos en cualquier momento, sin que su operación implique hacerlo a precios o descuentos inusuales. Por tal motivo se han considerado únicamente aquellos tracs que cuentan con un formador de mercado; esto es, de una institución que garantice su liquidez en todo momento, como se mencionó en el capítulo anterior.

Al respecto, sólo los tracs de las familias de IShares y Smartshares, administrados por las empresas BlackRock México y Actinver Casa de Bolsa, respectivamente, se encuentran en este supuesto, por lo que adicionalmente han excluido de la muestra los fondos cotizados bajo las denominaciones de CONSTRU, CONSUMO, ENLACE e IMCTRAC, emitidos y operados por BBVA Bancomer.

Finalmente, se ha prescindido del CETETRAC, cuyo índice subyacente está referido a las emisiones de Certificados de la Tesorería de la Federación en circulación (Cetes), similar a la referencia libre de riesgo que se ha definido como punto de comparación para estas pruebas (VLMR_MEX_CETES).

Estas consideraciones de mercado reducen el universo de instrumentos a solo once títulos referenciados a acciones que cumplen con las características mencionadas, suficientes para probar el modelo, en virtud de la clara diferenciación entre los mismos. En el capítulo anterior se hizo una definición puntual de estos instrumentos y sus características, por lo que en la tabla 4.2. únicamente se listan los activos concretos con los que se trabajará, así como el índice de referencia y los factores de riesgo asociados en cada caso. Adicionalmente, en el Anexo I de este documento se hace una descripción puntual de los tracs emitidos en el mercado nacional.

Tabla 4.2. Índices Referenciados a Acciones (tracs) utilizados como insumo(2)

Trac	Indice subyacente	Factores de riesgo	Beta contra subyacente
ANGELD	DDBOL (doble IPC)	Bolsa Mexicana. Apalancado 2X	0.96
CORPTRC	VLMR CORPOTRAC	Tasa nominal pesos, Riesgo de crédito corporativo.	0.96
DIABLOI	DIBOL (Inverso IPC)	Bolsa Mexicana. Apalancado2X	0.95
ILCTRAC	IRT Large Cap	Bolsa Mexicana. Empresas de alta capitalización.	0.99
IMCTRAC	IRT Comp Mx	Bolsa Mexicana. Empresas de mediana capitalización.	0.99
IMXTRAC	INMEX	Bolsa Mexicana. Índice México.	0.98
M10TRAC	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 5-10 Year Index	Tasa Nominal pesos. Duración 10 años	0.88
M5TRAC	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 1-5 Year Index	Tasa Nominal pesos. Duración 5 años	0.88
NAFTRAC	IPC	Bolsa Mexicana	0.91
UDITRAC	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government UDIS Index	Tasa real pesos	0.89
UMSTRAC	Dow Jones LATixx Mexico Government UMS Index	Tasa nominal en dólares, Tipo de cambio, Riesgo país México	0.87

Resulta fundamental establecer que al estar basados en distintos factores de riesgo, los tracs seleccionados constituyen una muestra suficientemente representativa del mercado nacional al incluir referencias de instrumentos a cargo del gobierno federal de mediano (M5TRAC) y largo plazo (M10TRAC, UDITRAC, UMSTRAC); de emisores de deuda privados (CORPTRC); y acciones cotizadas en el mercado de capitales nacional bajo distintas muestras de activos (NAFTRAC, IMXTRAC, ILCTRAC, IMCTRAC). Se consideran también los tracs aplalancados ANGELD y DIABLOI que pagan el doble y el

(2) Tabla construida con información obtenida de la página de internet de BlackRock México. Las betas fueron calculadas con información de un año en el periodo agosto-2011 a agosto de 2012 con cifras proporcionadas por la empresa Valuación Operativa y Referencias de Mercado (Valmer)

inverso que el NAFTRAC, respectivamente, y que pueden ser útiles al plantear estrategias de cobertura de riesgos de mercado.

Así mismo se consideran instrumentos de tasa fija real que pagan una tasa sobre la inflación observada (UDITRAC). También se incluye el riesgo país asociado al diferencial de tasa entre los bonos de deuda mexicanos (UMSTRAC) y los de los Estados Unidos, y el tipo de cambio peso-dólar, que resulta especialmente importante dada la relación entre ambas economías.

Como podrá verse, la oferta es basta y suficiente para validar el modelo y construir una estrategia diversificada representativa del mercado mexicano, al incluir diversos factores de riesgo claramente diferenciados.

Una vez que se han definido los instrumentos a considerar, es necesario establecer el tamaño de muestra requerido. Al considerar el valor en riesgo condicional a partir de escenarios históricos, la confianza del modelo es sensible tanto al tamaño de muestra para captar la varianza, como a la dispersión de los escenarios de máxima pérdida, sobre todo si los rendimientos no están normalmente distribuidos.

Así mismo, para obtener portafolios diferenciados contra el tradicional modelo de media-varianza, es necesario considerar series de precios que incluyan eventos de pérdida extremos. Para lograr esto, se trabajará con series de precios de cuatro años para los índices subyacentes de los activos seleccionados, esto es, 1014 escenarios históricos en el intervalo de tiempo comprendido entre el 29 de agosto de 2008 y el 31 de agosto de 2012. Es importante establecer que al ser instrumentos de reciente creación, con excepción del NAFTRAC, no existe suficiente información para trabajar directamente con los instrumentos, por lo que se utilizarán sus índices subyacentes como insumo para realizar el análisis, considerando en todo momento que el error en la réplica se debe a impuestos, gastos y las comisiones por administración que cobra la institución gestora del trac, y que se pueden cuantificar, por lo que es posible incluirlos al final del proceso de análisis.

La ventana de tiempo incluye la información suficiente para captar la volatilidad de los activos y sobre todo, incluye tanto la crisis crediticia de los Estados Unidos y la de deuda soberana europea. Estos acontecimientos (especialmente el primero), han impactado severamente a la economía mexicana, aunque su incidencia no ha sido la misma sobre todos los activos financieros. Mientras la bolsa mexicana experimentó severas pérdidas durante 2008, en línea con el resto mundo, el peso perdió un terreno similar frente al dólar americano, por lo que el tipo de cambio aumentó en una proporción similar a la caída bursátil, generando una clara compensación de los resultados entre estos dos activos. Entre octubre de 2008 y marzo de 2009, mientras el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores perdió 33%, el peso se devaluó en una proporción similar.

Solo durante el último trimestre del 2008, el IPC llegó a experimentar pérdidas de hasta el 8% en un día, lo que incide directamente sobre la valuación, y el CVaR de todos los tracs ligados a índices bursátiles. Durante el mismo periodo, incluso los tracs asociados a instrumentos de deuda de largo plazo como el UMSTRAC, UDITRAC y el M10TRAC, llegaron a tener pérdidas por valuación de hasta 7.6%, 4.0% y 3.3% en tan solo un día, lo que se encuentra más allá del umbral del valor en riesgo de estos instrumentos en dicho periodo.

Si bien lo anterior es historia, es importante comprender la importancia de considerar, y en su caso cuantificar las posibles pérdidas en las que pueden incurrir ciertos instrumentos una vez que se exceden las pérdidas esperadas medidas a través del valor en riesgo.

Así mismo, la ocurrencia cada vez más frecuente de eventos poco frecuentes, considerados como extremos, ha aumentado considerablemente la correlación y el grado de aversión al riesgo en los mercados, de modo que resulta no solo conveniente, sino indispensable analizar el impacto de estas situaciones en el diseño de estrategias de inversión, incorporando medidas de riesgo como el CVaR en los modelos de selección de cartera.

En los tiempos previos a las crisis mencionadas, se subestimaban los eventos poco probables, que se encontraban más allá del valor en riesgo, utilizando altos niveles de confianza, sobre-estimando al propio VaR. Hoy los inversionistas han aprendido que los eventos extremos, aunque poco probables, pueden ser devastadores, lo que ha llevado a la búsqueda de modelos más robustos como el que aquí se plantea.

Así pues, la incidencia de eventos extremos ocurre de vez en vez, modificando la tendencia normal de los mercados durante largos periodos de tiempo antes de que estos tomen su curso natural.

Con el objeto de visualizar lo anterior, en la figura 4.1. se muestra el desempeño histórico de los índices subyacentes de los activos considerados, durante el periodo de referencia, donde pueden observarse las correlaciones entre los mismos, y especialmente el impacto de la mencionada crisis y su evolución en los cuatro años siguientes.

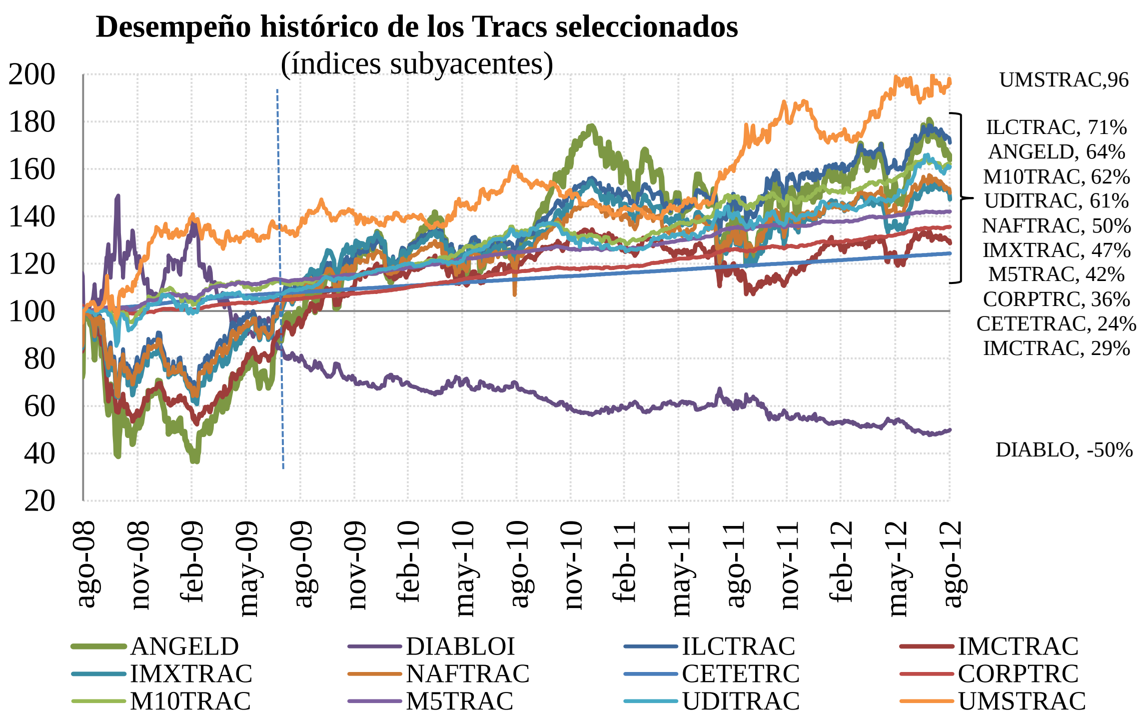


Figura 4.1. Desempeño de los índices subyacentes de tracs mexicanos en el periodo agosto-2008 a agosto-2012 (rendimiento acumulado de una inversión inicial de $100.00)(3).

(3) Fuente: Elaborado con datos de BlackRock México, disponibles en http://mx.ishares.com.

Para entender mejor el comportamiento de estos instrumentos, separaremos aquellos cuyos índices subyacentes corresponden a los mercados de deuda y de capitales. En el primer caso, la muestra de fondos de deuda resulta diversa: se tienen bonos gubernamentales de 5 y 10 años (M5TRAC y M10TRAC), bonos de largo plazo de tasa real denominados en unidades de inversión (UDITRAC)[(*)] y bonos de deuda soberana a cargo del gobierno federal emitidos sobre el extranjero (UMSTRAC). La oferta se ve complementada con una cartera compuesta de bonos de deuda corporativa a cargo de emisores con calificaciones AAA, AA y A de acuerdo a la escala de calificación de la empresa Standard and Poor´s, o su equivalente por cualquier otra calificadora de valores (CORPTRC)[(**)].

Los anteriores instrumentos representan prácticamente la totalidad de instrumentos de deuda disponibles en el mercado mexicano, con excepción de emisiones corporativas con calificaciones BBB o menores, con mayor riesgo de crédito, medido como el diferencial de tasa entre estos bonos y un activo libre de riesgo.

Dado que se trata de carteras compuestas únicamente por instrumentos de deuda, su riesgo de mercado esta dado por la volatilidad de las tasas y la duración media del portafolio, por lo que en la figura 4.2. se presenta la evolución en el rendimiento de estas inversiones, y su duración durante el periodo de referencia. Es importante señalar que la duración promedio de estas carteras permanece relativamente constante dada la reposición constante de emisiones vencidas en el índice (y por consiguiente en el trac), lo que permite suponer que el riesgo asociado a su duración promedio es constante.

[(*)] Las unidades de inversión (UDI) son unidades de valor que establece el Banco de México para solventar obligaciones crediticias y mantener el valor adquisitivo, por lo que su precio se actualiza diariamente en base a al Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), reflejando la inflación, cuyo valor es publicado en el Diario Oficial de la Federación.

[(**)] Mayor información sobre estos títulos referenciados a acciones emitidos en México por la empresa BlackRock, pueden ser consultados en el Anexo I de la presente investigación, o bien en la dirección electrónica del administrador de los fondos en http://mx.ishares.com.
Las equivalencias para la calificaciones AAA, AA y A de *Standard and Poor´s* son idénticas para *Fitch Ratings*; y Aaa, Aa1, Aa2 y Aa3 para *Moody´s Investors*.

En lo que hace a los fondos cotizados de renta variable, al pertenecer todos en el mismo mercado, existe una marcada correlación entre los mismos, aunque la magnitud de los rendimientos acumulados sea diferente. Aunque los tracs de acciones tengan distintas composiciones, las características del mercado mexicano propician una profunda correlación entre ellos. En la figura 4.3. se muestra la evolución de los rendimientos de estos activos en el periodo de referencia de cuatro años.

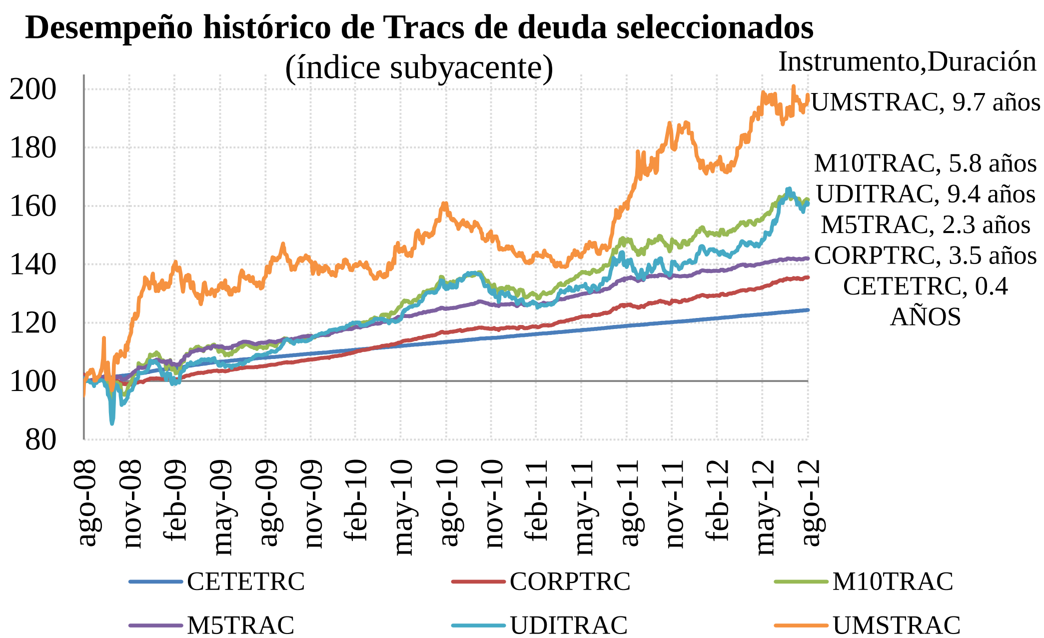


Figura 4.2. Desempeño histórico de los índices subyacentes de tracs de deuda mexicanos en el periodo agosto-2008 a agosto-2012 (acumulado sobre una inversión inicial de $100.00)[4].

Hay que resaltar el comportamiento del DIABLOI, que otorga un rendimiento inverso al del índice de precios y cotizaciones, que aunque ha tenido una pérdida neta del 50% en el periodo indicado, ofrece una cobertura perfecta contra el NAFTRAC y en menor medida para todos los tracs de renta variable. Desde el punto de vista del portafolio, esta correlación negativa es deseable en momentos donde los mercados se encuentran a la baja, razón por la que este activo se mantiene como parte de la muestra.

---

(4) Fuente: Elaborado con datos de BlackRock México, disponibles en http://mx.ishares.com.

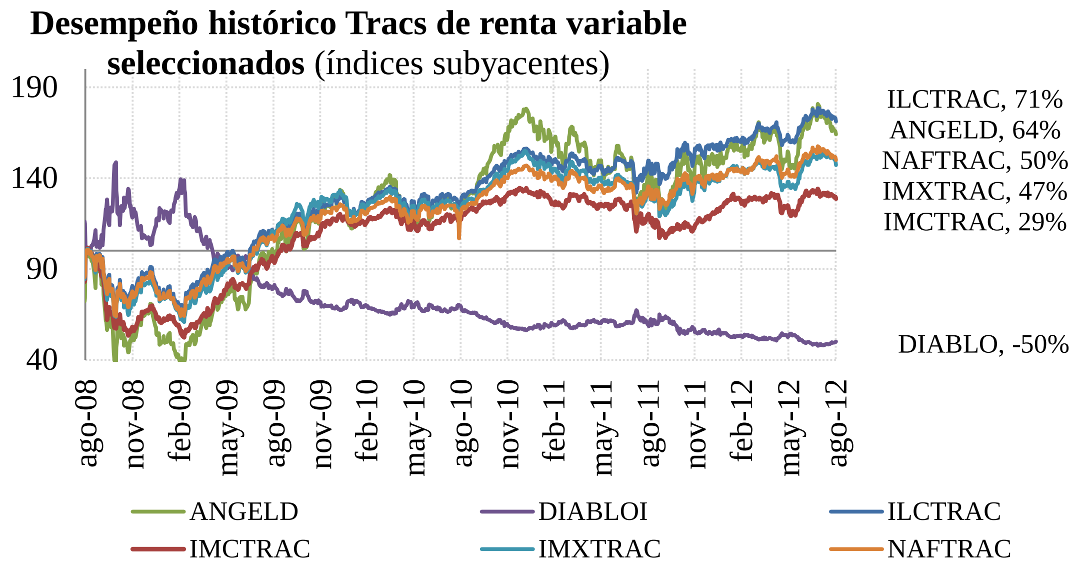


Figura 4.3. Desempeño histórico de los índices subyacentes de tracs de renta variable mexicanos en el periodo agosto-2008 a agosto-2012 (sobre una inversión de $100.00)(5).

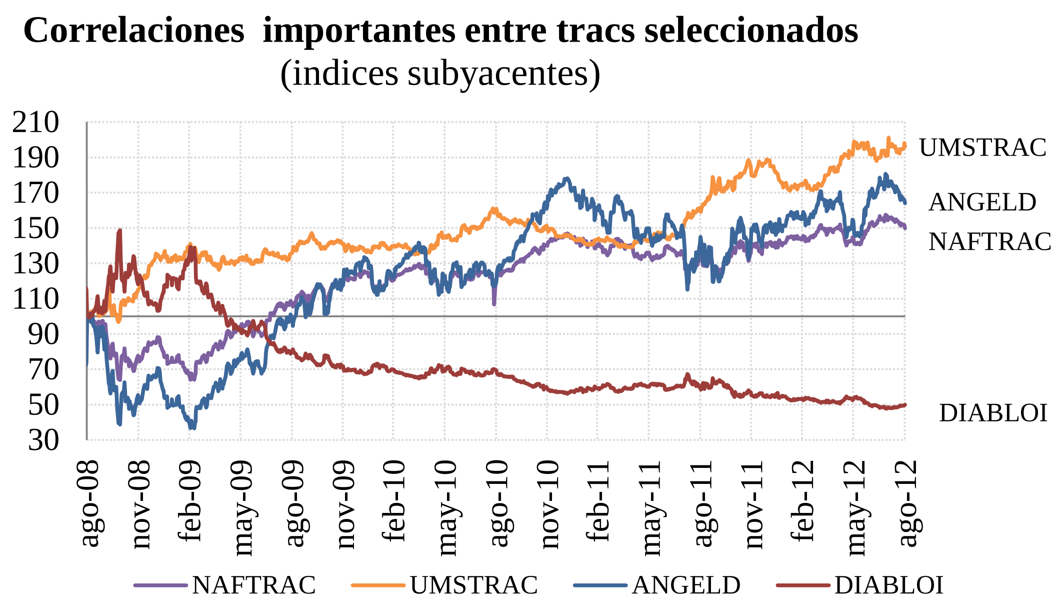


Figura 4.4. Correlaciones importantes entre tracs seleccionados durante el periodo agosto-2008 a agosto-2012 (acumulado sobre una inversión inicial de $100.00)(6).

---

(5) Fuente: Elaborado con datos de BlackRock México, disponibles en http://mx.ishares.com.

(6) Fuente: Elaborado con datos de BlackRock México, disponibles en http://mx.ishares.com.

Finalmente, hablando de correlaciones importantes entre los índices seleccionados, que contribuyan a modular la volatilidad de las carteras en base a estos activos, sobresalen la correlación negativa que existe entre el NAFTRAC que replica el índice de precios y cotizaciones y el UMSTRAC, donde el efecto del tipo de cambio peso-dólar tiene un mayor efecto sobre su valuación que los tipos de interés. Puede observarse en la figura 4.4. el comportamiento inverso entre estos dos instrumentos, donde la cobertura, sin ser perfecta, resulta eficiente, puesto que estos dos activos conservan su tendencia natural a la alza.

Hay que resaltar el comportamiento entre el NAFTRAC y el ANGELD, que es el trac doble apalancado del primero, donde en situaciones de rendimiento positivo, otorga el doble de rendimiento, pero con el doble de volatilidad, situación que resulta relevante al momento de construir carteras con estos activos.

Hasta aquí, se ha dado un panorama general de los once activos seleccionados. Solo resta agregar que, en orden a lograr un mejor entendimiento del modelo MVC, y por ende una mejor validación del mismo, la muestra de escenarios históricos de los índices subyacentes podría ser seccionada para observar su comportamiento en periodos específicos de tiempo como el citado de la crisis hipotecaria de los Estados Unidos que tuvo su punto crítico durante el último trimestre del 2008.

4.2.2. Parámetros de las pruebas

Para la correcta validación del modelo, resulta necesario definir las condiciones sobre el que se realizarán las pruebas experimentales. Como se describió en su momento, el modelo de selección de cartera requiere como insumos, además de las series de escenarios históricos, los niveles de rendimiento mínimos y valor en riesgo condicional máximo. Así mismo, se requiere establecer la forma en que se realizarán las pruebas para obtener resultados que permitan concluir la eficacia del modelo, y proponer estrategias concretas de inversión.

Para ello, es conveniente ejecutar el modelo bajo distintos parámetros dentro de un ambiente controlado a fin de analizar como varían los resultados. Para simplificar el cálculo, se utilizará como rendimiento esperado de los activos, el promedio simple de los rendimientos diarios de la muestra.

Así pues, se requiere observar como se comporta el modelo para diferentes combinaciones de CVaR y rendimientos requeridos, y a su vez, comparar estos resultados contra los que proporciona el modelo tradicional de media-varianza para la misma muestra de activos y número de escenarios históricos, por lo que inicialmente se construirá una frontera eficiente simple con el método de Markowitz, compuesta por quince portafolios. Para ello, se dividirá el intervalo comprendido entre el rendimiento del portafolio de mínima varianza y el mayor de los rendimientos esperados de la muestra, en quince sub-intervalos de igual tamaño, que se mantendrán fijos durante toda la prueba.

Esto permitirá contar con referencias específicas contra la que se compararán los resultados obtenidos con el modelo MVC. Así mismo, como se indicó en su momento, la frontera eficiente del modelo de media-varianza es en todo caso el límite para las inversiones eficientes en nuestro modelo con dos medidas de riesgo.

Posteriormente, se calcularán los valores en riesgo condicionales para los activos de la muestra, y se dividirá el intervalo entre el menor y mayor valor individuales en seis sub-intervalos iguales, en el supuesto de que ningún portafolio tendrá un CVaR fuera de este intervalo, dada la subaditividad de esta medida coherente de riesgo.

Con el objeto de captar eventos verdaderamente extremos dentro de la muestra, se utilizará una confianza estadística del 99% para el cálculo del CVaR.

De esta forma, se ejecutará el modelo MVC programado en Matlab (Apéndice A) para los niveles de CVaR determinados, construyendo en cada caso una frontera eficiente compuesta por quince portafolios, que corresponden a los mismos niveles de rendimiento que fueron establecidos previamente, utilizando una tolerancia máxima en la aproximación de los resultados del modelo de 10^{-10} en la herramienta de optimización de Matlab(*). Esto permitirá contar con seis fronteras eficientes para distintos niveles de valor en riesgo condicional, construidas a partir de la misma base de datos, pudiendo realizar las comparaciones necesarias entre ellas, y contra el modelo de media-varianza. Un resumen de los parámetros utilizados es presentado en la tabla 4.3.

Tabla 4.3. Parámetros utilizados para las pruebas experimentales

Insumo/Parámetro	Valor
Número de activos	11
Número de escenarios históricos	1014
Nivel de confianza (1-α)	0.99
Niveles de CVaR	6
Número de portafolios en la frontera eficiente	15
Tolerancia del modelo computacional	10^{-10}

Así mismo, como parte del procedimiento, se elegirán niveles de rendimiento y riesgo específicos que permitan comparar puntos similares sobre las diversas fronteras eficientes, lo que permitirá identificar diferencias en los niveles de volatilidad o en la composición de las carteras eficientes bajo las mismas condiciones. Ahora bien, dada la definición de eficiencia para una cartera diversificada, y las características del modelo, las diferencias se presentarán para los menores niveles de volatilidad y valor en riesgo condicional, donde la restricción sobre el CVaR resulta relevante, por lo que de ser necesario se realizarán cortes transversales

(*) Es fundamental mencionar que el nivel de tolerancia fijado para el modelo en Matlab puede generar pequeñas variaciones en los resultados. Sin embargo, el uso de mayores precisiones requiere también de un mayor tiempo de proceso e iteraciones en el cálculo del resultado. El objetivo de esta validación es mostrar cómo se comporta el modelo propuesto, por lo que ese grado de aproximación parece suficiente.

en la muestra para evaluar distintos intervalos de tiempo con un menor número de escenarios históricos.

Adicionalmente, con el objeto de presentar cifras que puedan ser interpretadas fácilmente, los resultados procesados a partir de observaciones diarias para los activos seleccionados, se proporcionarán en forma anualizada. Para ello se tomarán 252 días hábiles por año(*), pues aunque algunos de los activos que se utilizan como insumo replican carteras de instrumentos del mercado de deuda, por definición los tracs corresponden al mercado de capitales, de modo que sus precios varían únicamente en los días hábiles para la bolsa.

4.2.3. Pruebas Experimentales y calibración del modelo

Una vez que se ha establecido el marco experimental, se procederá a la ejecución y análisis de diversas pruebas tendientes a entender y validar el modelo que ha sido planteado teóricamente, para finalmente elegir un portafolio base que pueda ser propuesto para su distribución comercial, diseñado bajo el enfoque de coherencia y dos medidas de riesgo.

Como punto de partida, y toda vez que se han seleccionado y descrito los activos a utilizar, se debe aclarar que en lo sucesivo, el análisis se realizará sobre los índices subyacentes a los títulos referenciados, debido a las razones que se apuntaron previamente, y con reserva de agregar el impacto de las comisiones por administración, impuestos y deficiencias en la réplica en los portafolios finales.

Las características generales de la muestra de $n = 11$ activos y $M = 1014$ escenarios, de acuerdo al método descrito, se encuentran en la tabla 4.4., donde se presentan los rendimientos anuales promedio en el intervalo histórico de cuatro años, así como la volatilidad anual (base 252 días) y los valores en riesgo y condicionales por simulación

(*) El rendimiento se comporta linealmente y es anualizado simplemente al multiplicar por la base, en este caso 252. La volatilidad es la raíz cuadrada de la varianza, de modo que para anualizar este estadístico, es necesario multiplicar por la raíz cuadrada de la base.

histórica de un día al 99%. Igualmente se incluyen los coeficientes de asimetría y curtosis de la muestra con el objeto de interpretar las distribuciones de rendimientos involucradas.

Es importante observar que con reserva de los rendimientos observados y las medidas de riesgo para cada activo, la asimetría de las distribuciones y su curtosis contra una distribución de probabilidad normal estándar, indican la existencia leptocurtosis(*), lo que sugiere una mayor concentración de observaciones alrededor de la media e información relevante en las colas de las distribuciones, lo que resulta relevante como parte de nuestro modelo basado en el valor en riesgo condicional calculado mediante simulación histórica a partir de los escenarios base.

Tabla 4.4. Características de los índices de los activos seleccionados(7)

Instrumento	Rendimiento anualizado	Volatilidad anualizada	Asimetría	Curtosis	VaR(1,99)	CVaR(1,99)
ANGELD	24.0%	48.4%	-0.02	6.8	-9.6%	-11.4%
DIABLOI	-14.2%	24.9%	-0.52	7.6	-4.5%	-6.7%
ILCTRAC	16.3%	24.3%	0.29	6.9	-4.9%	-5.5%
IMCTRAC	8.7%	22.0%	-0.72	6.8	-5.4%	-6.0%
IMEX	13.1%	26.6%	0.28	7.0	-5.2%	-6.0%
NAFTRAC	13.4%	25.8%	0.26	10.1	-4.9%	-6.3%
CORPOTRAC	7.6%	1.5%	0.24	4.7	-0.2%	-0.3%
M10TRAC	12.3%	7.1%	0.81	16.8	-1.3%	-1.8%
M5TRAC	8.8%	2.2%	0.85	11.9	-0.3%	-0.5%
UDITRAC	12.2%	8.6%	0.85	22.9	-1.6%	-2.3%
UMSTRAC	17.8%	14.6%	0.03	11.0	-2.6%	-3.5%

(*) Forma típica de distribuciones más apuntadas y con colas más anchas que una distribución normal.

(7) Tabla construida a partir series históricas obtenidas de las página de internet de BlackRock México (www.ishares.com.mx) y Valuación Operativa y Referencias de Mercado (www.valmer.com).

VaR(1,99) y CVaR(1,99) corresponden al valor en riesgo y valor en riesgo condicional, respectivamente para un día y un nivel de confianza del 99%.

Igualmente, antes de procesar la información, y con el objeto de entender mejor los resultados, se considera conveniente analizar los coeficientes de correlación entre los activos seleccionados, que se presentan en la tabla 4.5. Resalta la correlación negativa del índice inverso del IPC (DIABLOI), contra todos los índices excepto el del UMSTRAC, que al incluir al tipo de cambio en su valuación, se comporta también de forma inversa contra los demás índices, con un riesgo considerablemente menor. Dado su comportamiento histórico, la posibilidad de cobertura deberá ser considerada por el modelo.

Tabla 4.5. Matriz de correlaciones entre los índices de los activos seleccionados(8)

Activo-Indice	ANGELD	DIABLOI	ILCTRAC	IMCTRAC	IMXTRAC	NAFTRAC	CORPTRC	M10TRAC	M5TRAC	UDITRAC	UMSTRAC
ANGELD	1.00	-0.97	0.98	0.85	0.96	0.93	0.26	0.38	0.35	0.34	-0.18
DIABLOI		1.00	-0.96	-0.84	-0.94	-0.91	-0.26	-0.37	-0.34	-0.33	0.19
ILCTRAC			1.00	0.84	0.97	0.91	0.25	0.37	0.34	0.34	-0.18
IMCTRAC				1.00	0.87	0.79	0.23	0.31	0.27	0.26	-0.25
IMXTRAC					1.00	0.89	0.25	0.35	0.32	0.32	-0.21
NAFTRAC						1.00	0.23	0.35	0.32	0.31	-0.15
COPRTRC							1.00	0.83	0.74	0.68	-0.04
M10TRAC								1.00	0.89	0.84	0.01
M5TRAC									1.00	0.69	0.00
UDITRAC										1.00	0.02
UMSTRAC											1.00

También es posible identificar altas correlaciones entre los índices compuestos por instrumentos de deuda, por lo que con excepción del UMSTRAC, al no existir una clara diferenciación entre los mismos, el modelo optará por seleccionar aquel que otorgue la mejor relación riesgo–rendimiento. Como es de esperarse, este fenómeno se presenta también entre los tracs de renta variable. De esta forma, se pueden identificar cinco clases de activos:

- Los índices tracs de renta variable (ILCTRAC, IMCTRAC, IMXTRAC y NAFTRAC);

- Indices de tracs de deuda gubernamental de tasa real (UDITRAC) y nominal (M5TRAC y M10TRAC) en moneda nacional;

---

(8) Tabla construida a partir series históricas obtenidas de las página de internet de BlackRock México (www.ishares.com.mx) y Valuación Operativa y Referencias de Mercado (www.valmer.com).

- La deuda corporativa representada únicamente por el CORPTRC;
- El trac de deuda soberana denominado en dólares americanos (UMSTRAC); y
- Los tracs apalancados doble e inverso del índice de precios y cotizaciones (ANGELD y DIABLOI).

Así pues, dadas las características de las series de datos, el modelo seleccionará la mezcla idónea entre los activos de estos grupos, de forma tal que las carteras proporcionen un rendimiento dado, con el menor riesgo posible, sin exceder un límite fijo de valor en riesgo condicional máximo diario.

El modelo MVC se ejecutará mediante un programa desarrollado en Matlab (Anexo II), a partir de las series históricas descritas, donde el menor valor en riesgo condicional de un día al 99% de confianza, corresponde al índice subyacente del CORPTRC (0.30%), mientras que el mayor lo presenta el índice del ANGELD (11.4%), por lo que, de acuerdo a la metodología descrita en el apartado anterior, se ha dividido el intervalo [0.30%, 11.4%] en seis sub-intervalos iguales para obtener un igual número de fronteras eficientes con los límites de CVaR correspondientes.

De la misma forma, el portafolio de mínima varianza calculado mediante el tradicional modelo de media-varianza, para una volatilidad anual de 1.36%, presenta un rendimiento esperado anualizado de 6.31%. Considerando que el índice subyacente del ANGELD, es el que mayor rendimiento anual promedio ha proporcionado con 24.00%, se ha segmentado también el intervalo [1.36%, 24.00] en particiones iguales con magnitud 1.26%, con el objetivo de obtener fronteras eficientes integradas con 15 portafolios, para cada uno de los niveles de CVaR en el intervalo señalado previamente.

Ejecutando reiteradamente el modelo programado en Matlab con estos parámetros, y de acuerdo a la metodología descrita en el apartado anterior, con una tolerancia de 10^{-10} en la aproximación de los resultados, se obtienen los valores que se presentan en la tabla 4.6., donde se observa el comportamiento de la volatilidad de los portafolios óptimos para distintos niveles de pérdida extrema (CVaR) y rendimiento, además del su contraste contra las respectivas carteras obtenidas con una sola medida de riesgo, a través del modelo de media-varianza.

En la citada tabla, cada columna representa un conjunto de soluciones o frontera eficiente para los mismos niveles de rendimiento, iniciando por el enfoque de media-varianza, y para el modelo MVC con distintos valores de CVaR máximo dentro del rango señalado. Estas fronteras eficientes se muestran en la figura 4.5. y corresponden a los datos de la tabla 4.6.

Tabla 4.6. Resultados obtenidos para distintos niveles de CVaR.(9)

Rendimiento esperado anual	Volatilidad anual Media-Varianza	Valor en Riesgo Condicional máximo de 1 día al 99%. CVaR(1,99)					
		0.30%	2.50%	4.70%	6.90%	9.10%	11.30%
		Volatilidad portafolio modelo MVC					
6.3%	1.35%	1.36%	1.35%	1.35%	1.36%	1.36%	1.37%
7.6%	1.47%	1.47%	1.58%	1.54%	1.47%	1.49%	1.49%
8.8%	1.91%		1.91%	1.92%	1.91%	1.91%	1.91%
10.1%	2.79%		2.80%	2.79%	2.79%	2.80%	2.83%
11.4%	3.93%		4.01%	3.93%	3.93%	3.93%	3.93%
12.6%	5.12%		5.18%	5.13%	5.12%	5.13%	5.13%
13.9%	6.34%		6.39%	6.34%	6.34%	6.34%	6.34%
15.2%	7.65%		7.76%	7.65%	7.65%	7.65%	7.65%
16.4%	9.32%		9.47%	9.32%	9.32%	9.32%	9.33%
17.7%	11.30%			11.32%	11.30%	11.31%	11.30%
18.9%	13.46%			13.46%	13.47%	13.46%	13.46%
20.2%	19.12%				19.12%	19.12%	19.12%
21.5%	28.07%				28.07%	28.07%	28.07%
22.7%	38.04%					38.06%	38.04%
24.0%	48.42%						48.44%

Al analizar la información procesada, se obtienen los siguientes resultados importantes:

(9) Información procesada con el modelo en Matlab a partir de una muestra con 1014 escenarios históricos y para los niveles de valor en riesgo condicional referidos y una tolerancia de 10^{-10}.

1. En las condiciones de prueba, las soluciones en la frontera eficiente coinciden en la mayoría de los casos entre el modelo de media-varianza y el MVC, aunque existen puntos donde se presentan diferencias. Concretamente, algunas soluciones mediante el segundo enfoque, no son eficientes bajo el primero, y reflejan mayores volatilidades para un mismo nivel de rendimiento.

Esta situación se presenta para bajas volatilidades o cuando el CVaR máximo se encuentra muy restringido.

Hay que recordar, que el modelo de media-varianza obtiene una solución eficiente para un valor de rendimiento dado, minimizando la volatilidad del portafolio en base a la matriz de covarianzas, donde se reflejan las dispersiones medias de los activos entre si, lo que supone un método paramétrico para la obtención del resultado.

En el modelo MVC, se incluye además una restricción sobre el valor en riesgo condicional, calculado directamente sobre los escenarios históricos para captar de una mejor forma las pérdidas que se encuentran más allá del nivel de confianza. Esto implica que para la muestra de 1014 observaciones con una confianza ($1-\alpha$) del 99%, el modelo estaría seleccionando el promedio de los escenarios dentro del α-ésimo percentil, que en este caso corresponde al 1% de la distribución, o bien, el promedio de los 10 peores escenarios de pérdida, lo que para distribuciones de rendimientos no normales y con colas pesadas, puede ser totalmente determinante en el resultado.

Las diferencias son generalmente pequeñas y no afectan considerablemente la solución. Sin embargo, para ciertos puntos, una pequeña variación en la volatilidad puede llevar a un resultado completamente distinto, dados los niveles de confianza y tolerancia en el modelo, así como las similitudes entre activos del mismo tipo.

Ejemplos concretos pueden ser observados en la tabla 4.6., donde para niveles similares de rendimiento, no hay coincidencia en los resultados contra el modelo de media-varianza, e incluso entre portafolios obtenidos con el modelo MVC con distintas restricciones de CVaR, utilizando la misma muestra y programa computacional con la tolerancia referida.

En la figura 4.5. se muestra esta situación, donde puede observarse la coincidencia en los resultados, excepto en la parte más corta de las curvas, en los niveles de menor volatilidad. Para ello, en la misma figura, se ha amplificado el rango de volatilidades anuales menores al 2%.

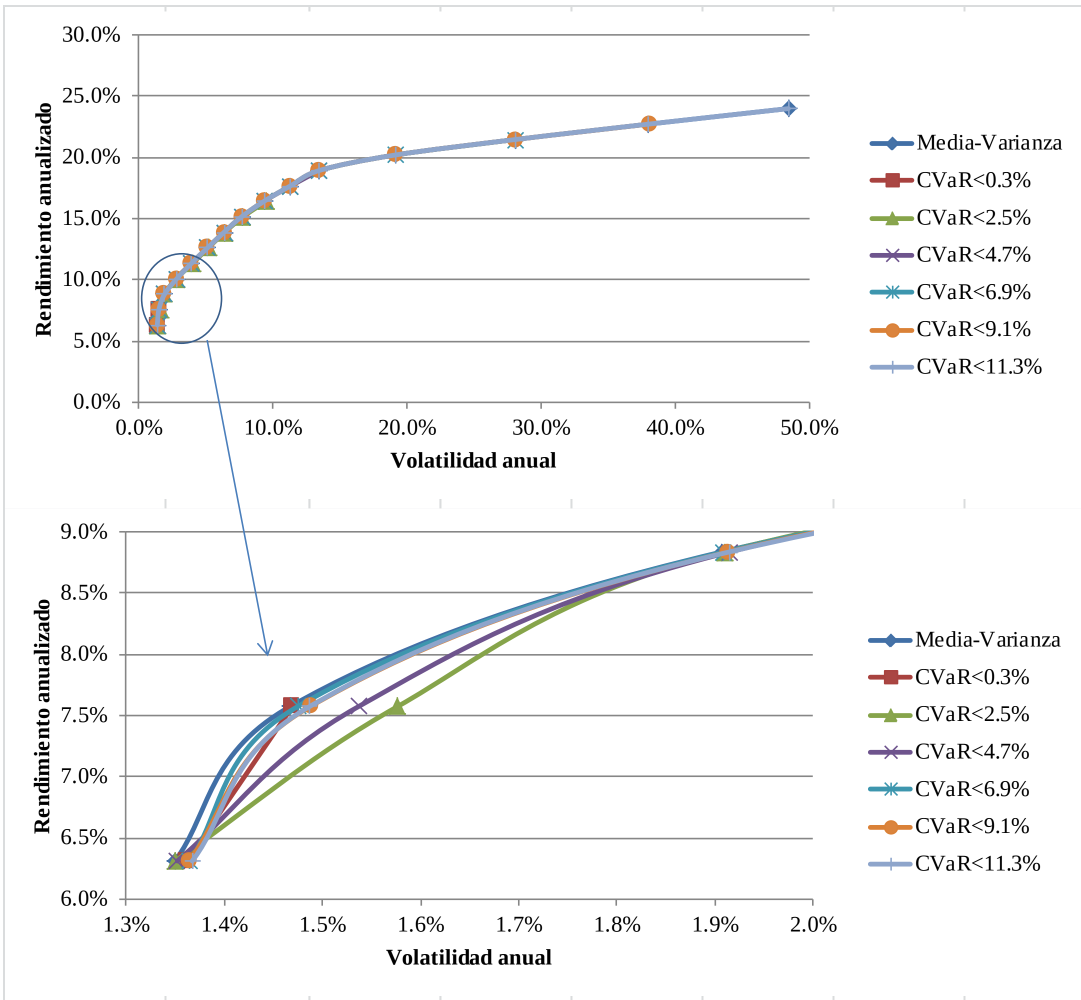


Figura 4.5. Fronteras eficientes para distintos límites de valor en riesgo condicional(10).

(10) Información procesada con datos obtenidos de Valuación Operativa y Referencias de Mercado. (www.valmer.com.mx) y el modelo computacional desarrollado.

Estas diferencias respecto a la volatilidad para niveles de rendimiento similares, de apenas 0.1% anual, pueden representar hasta 0.5% en el rendimiento anual de un portafolio, por lo que no deben ser despreciadas.

2. La restricción sobre el CVaR tiene un impacto directo en la longitud de la frontera eficiente. Si el valor máximo permitido es mayor o igual que el del activo con el mayor CVaR en la muestra, la frontera eficiente tendrá una longitud similar a la obtenida por el modelo de media-varianza y habrá perfecta coincidencia entre las dos curvas.

Sin embargo, a medida que se va restringiendo el máximo valor en riesgo condicional permitido, disminuye el número de portafolios en la frontera eficiente MVC, pues no existen soluciones para portafolios con volatilidades más allá del CVaR establecido.

De acuerdo a la muestra utilizada, y los resultados presentados en la tabla 4.6., se observa como para un CVaR máximo de 11.30%, existen soluciones para todos los niveles de rendimiento propuestos, y como las volatilidades de estos portafolios coinciden perfectamente con los del modelo de media-varianza. A medida que se disminuye el CVaR máximo permitido, el número de soluciones para los valores de rendimiento dados disminuye, hasta que para un CVaR de 0.30% solo existen portafolios en los dos primeros puntos.

Lo anterior es consistente con los resultados esperados por el modelo, y valida la restricción en el valor en riesgo condicional para el modelo.

3. El Valor en Riesgo Condicional es una función decreciente de la volatilidad del portafolio. Esto es, que al aumentar la volatilidad en una cartera, para un mismo nivel de rendimiento, la pérdida esperada más allá del umbral del valor en riesgo será menor, o se encontrará más a la izquierda del mismo. Dado el signo negativo, esto implica que la pérdida absoluta será mayor.

En la figura 4.6 se muestra como se comporta el CVaR de acuerdo a la volatilidad para los portafolios con un rendimiento esperado de 7.6% anual a partir de la muestra de escenarios históricos utilizada, con los niveles de CVaR establecidos.

El nivel de rendimiento de 7.6% para este Figura fue seleccionado en virtud de que alrededor del mismo se presenta una mayor dispersión de acuerdo a lo mostrado en la Figura 4.5., aunque dicho comportamiento puede ser observado, en menor escala, para todos los valores de rendimiento donde existen portafolios con diferentes volatilidades, y por ende, distintos valores en riesgo condicionales.

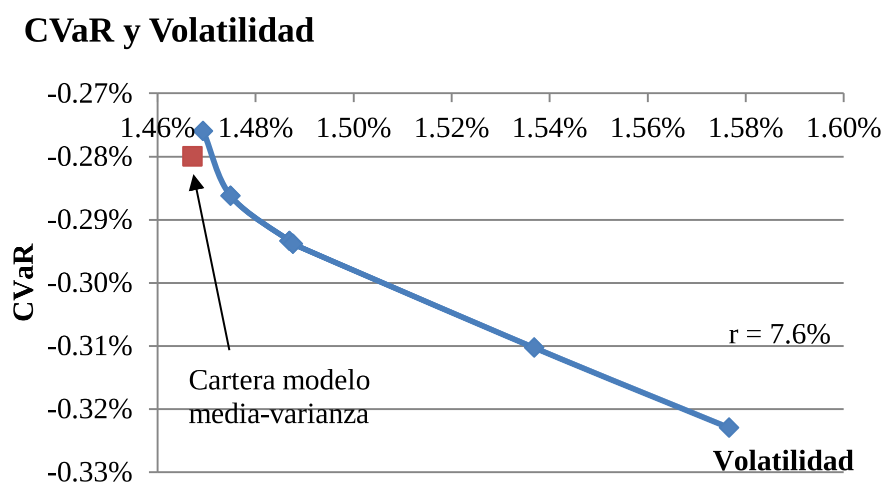


Figura 4.6. Comportamiento del valor en riesgo condicional para distintos niveles de volatilidad en el modelo MVC.[11].

4. Distintas volatilidades para un mismo valor de rendimiento, proporcionan portafolios diferentes. Sin embargo, en este caso esta afirmación es especialmente relevante, toda vez que al comparar los resultados obtenidos contra el tradicional enfoque de media-varianza, el modelo MVC proporciona en algunos casos mayores volatilidades y por ende,

---

(11) Información procesada con el modelo MVC, con datos obtenidos de Valuación Operativa y Referencias de Mercado. www.valmer.com.mx.

carteras con diferentes composiciones.

Estas carteras diferenciadas no son eficientes bajo el criterio de media-varianza, pero resultan óptimas para el modelo MVC con los parámetros de confianza y tolerancia utilizados.

En la tabla 4.6. se observa como para un rendimiento de 7.6% anual, los portafolios óptimos del modelo MVC con valores de CVaR máximo diario de 2.5% y 4.7% tienen en general mayores volatilidades que el calculado por el modelo de media-varianza.

Para ejemplificar esto, en la figura 4.7. se presentan las carteras óptimas para ambos modelos con un rendimiento esperado de 7.6% anual, donde al comparar los resultados del criterio de media varianza contra el modelo MVC con un valor en riesgo condicional máximo diario de 2.5%, se obtienen carteras con volatilidades anuales de 1.47% y 1.58%, y CVaR diarios de 0.22% y 0.32%, respectivamente.

Esto implica que la solución obtenida del modelo MVC no es eficiente bajo el de media-varianza y por ende proporciona una cartera distinta, lo que es resultado de la metodología utilizada para el cálculo del CVaR y el nivel de tolerancia en la ejecución del programa en Matlab. Sin embargo, esto no implica que el portafolio obtenido mediante el modelo MVC deba ser desechado, pues se trata de dos enfoques distintos.

Las carteras han sido calculadas bajo condiciones similares y presentan importantes diferencias, pero la propuesta por el modelo MVC presenta una mayor diversificación, lo que resulta deseable, sobre todo en situaciones de movimientos extremos en los mercados financieros.

Los portafolios proporcionan el mismo rendimiento esperado con distintas asignaciones y niveles de volatilidad. En ambos casos existe una mayor concentración en los índices de deuda corporativa y gubernamental, CORPTRC y M5TRAC, donde las asignaciones en estos instrumentos son de 93% y 86%, para los modelos de media-varianza y MVC, respectivamente. Así mismo, las proporciones invertidas en activos de renta variable para estos modelos son de 2% y 3%, y en moneda extranjera (UMSTRAC) de 2% y 4%.

Es importante recordar que estas asignaciones han sido obtenidas bajo enfoques diferentes a partir de modelos estocásticos, por lo que en ningún momento puede asegurarse el desempeño futuro de las carteras, y por la misma razón, no es posible afirmar la ventaja de una sobre otra.

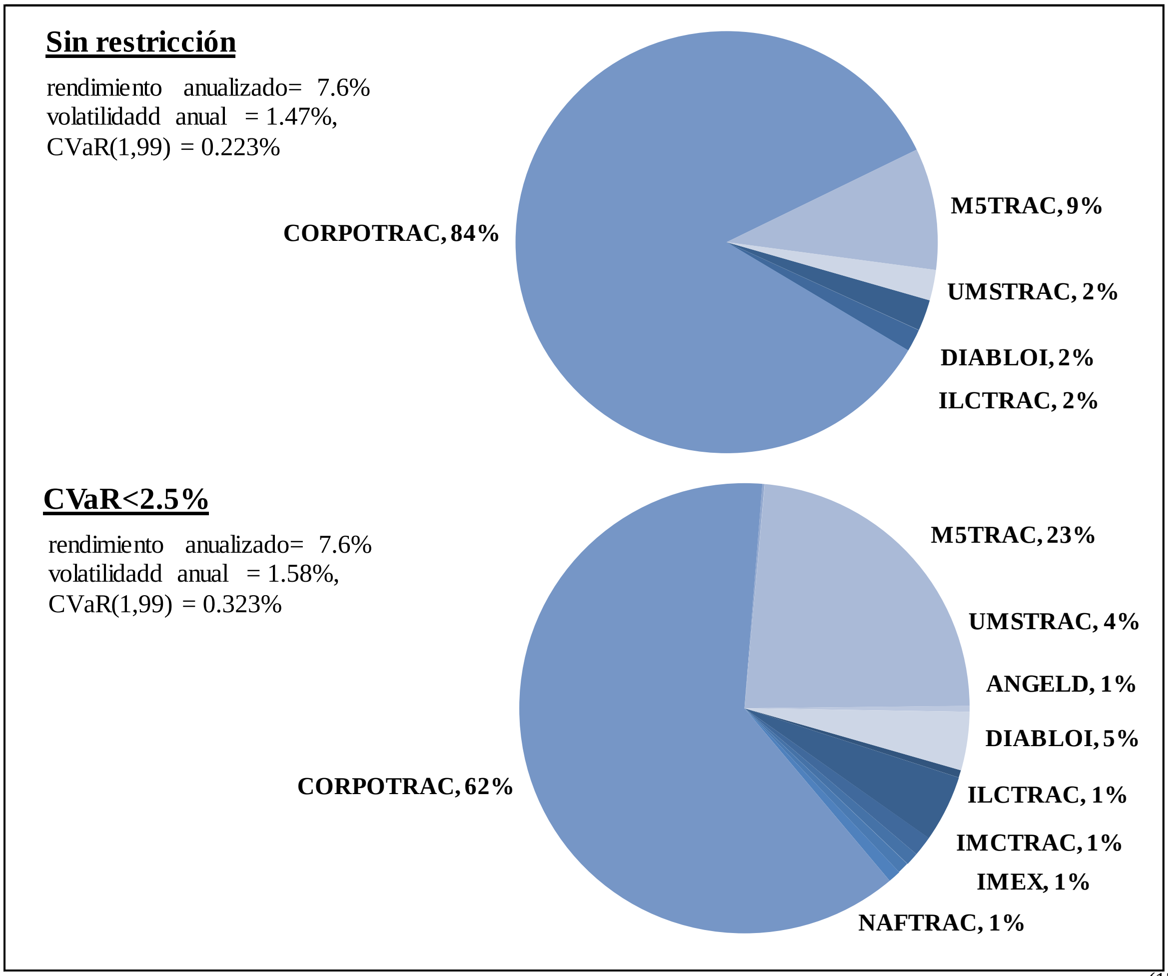


Figura 4.7. Composición de carteras para distintos niveles de CVaR en el modelo MVC.[12].

Continuando con la comparación de estas carteras, en el figura 4.8. se muestra el

(12) Información procesada con el modelo MVC, con datos obtenidos de Valuación Operativa y Referencias de Mercado. www.valmer.com.mx.

comportamiento de una inversión en cada una de ellas, y el del índice de referencia señalado en los objetivos de inversión, durante el periodo de cuatro años considerado. Un capital invertido en la cartera eficiente del método de media varianza pagó 35.64% en cuatro años, mientras que el portafolio calculado por el modelo MVC rindió 35.49% en el mismo periodo. Puede notarse que las diferencias son mínimas, aún y cuando las carteras están perfectamente diferenciadas.

Así mismo, si se observa con atención el gráfico, podrá notarse que la cartera del modelo MVC fue mejor durante la mayor parte del periodo y no fue sino hasta el final del mismo cuando se equiparan los rendimientos. Si las carteras se hubieran comparado en otro momento en el pasado, el portafolio con restricción en el CVaR habría otorgado un rendimiento mayor, lo que afirma lo dicho anteriormente en cuanto a la preferencia de una cartera sobre otra.

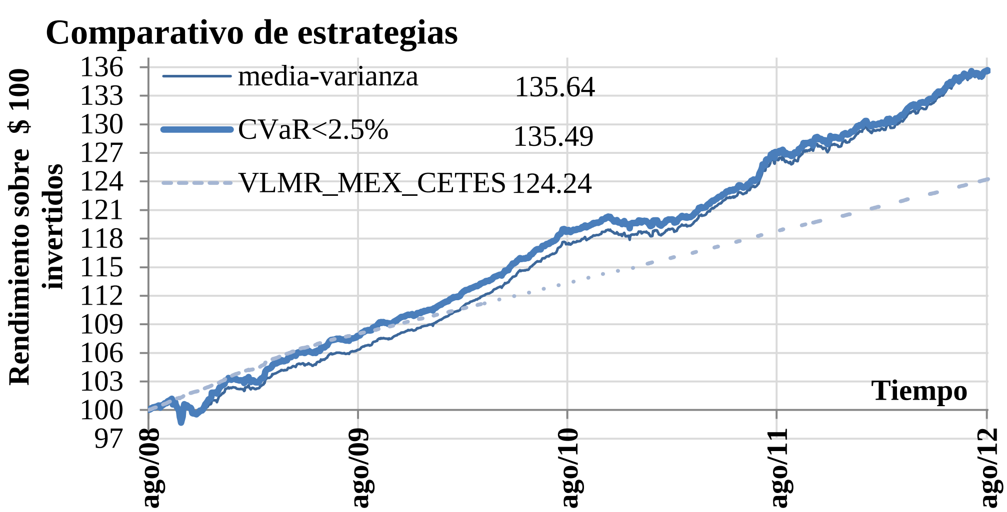


Figura 4.8. Desempeño de las carteras bajo distintos modelos.[13].

Al comparar el desempeño de estos portafolios contra el índice de referencia que se

(13) Información procesada con el modelo MVC, con datos obtenidos de Valuación Operativa y Referencias de Mercado. www.valmer.com.mx.

determinó en los objetivos de inversión (VLMR_MEX_CETES), ambos han otorgado rendimientos cercanos al 9.2% sobre dicha referencia, lo que implica en promedio una alfa de 2.3% anual. Únicamente durante el último semestre de 2008, las carteras mostradas tuvieron un rendimiento por abajo del índice, y es en este periodo donde se presentan los escenarios extremos que determinan el CVaR de ambas carteras.

Estas y otras comparaciones se pueden hacer entre carteras obtenidas mediante diversas metodologías para diferentes niveles de rendimiento, volatilidad, o valor en riesgo condicional. En este punto podrá observarse como el modelo MVC cumple con sus objetivos en un contexto real de los mercados financieros.

La selección de una estrategia en particular dependerá de cada inversionista, que basará su elección en base a sus expectativas, horizonte de inversión y perfil de riesgo; de suerte que no existe un portafolio único que satisfaga las necesidades de todos los participantes en los mercados financieros.

Como se mencionó en su momento, esencialmente, el inversionista basa su decisión en dos variables fundamentales: el riesgo y el rendimiento. En este sentido, el modelo MVC aporta mayor información al incorporar el valor en riesgo condicional como una segunda medida de riesgo ante situaciones extremas y adversas de los mercados financieros.

Dado lo anterior, la decisión de elegir un portafolio con el criterio MVC estará fundada en el rendimiento esperado por el inversionista y la volatilidad asociada, y sobre todo, la pérdida máxima que esté dispuesto a tolerar ante condiciones desordenadas del mercado, medida a través del CVaR. Esto implica elegir una cartera eficiente en un plano de tres dimensiones.

Para comprender mejor esta afirmación, en la figura 4.9. se muestra la forma de una frontera eficiente con el modelo MVC, que al incorporar una medida de riesgo adicional, genera un “plano de soluciones eficientes” para distintas combinaciones de riesgo, rendimiento y valor en riesgo condicional.

Así pues, para plantear soluciones específicas para inversionistas concretos, se deberá primero conocer sus necesidades y expectativas para seleccionar un portafolio dentro de este plano tridimensional. Es importante señalar que las soluciones resultan eficientes en el momento de su cálculo, dada la información histórica incorporada en los precios, lo que podría cambiar en el futuro ante la presencia de eventos extraordinarios, cuya ocurrencia no se encuentre descontada en las valuaciones de mercado, por lo no se puede garantizar un rendimiento futuro. Esto implica que las carteras de inversión deban ser re-balanceadas periódicamente con el mismo modelo de optimización, para adecuarlas a las exigencias del entorno.

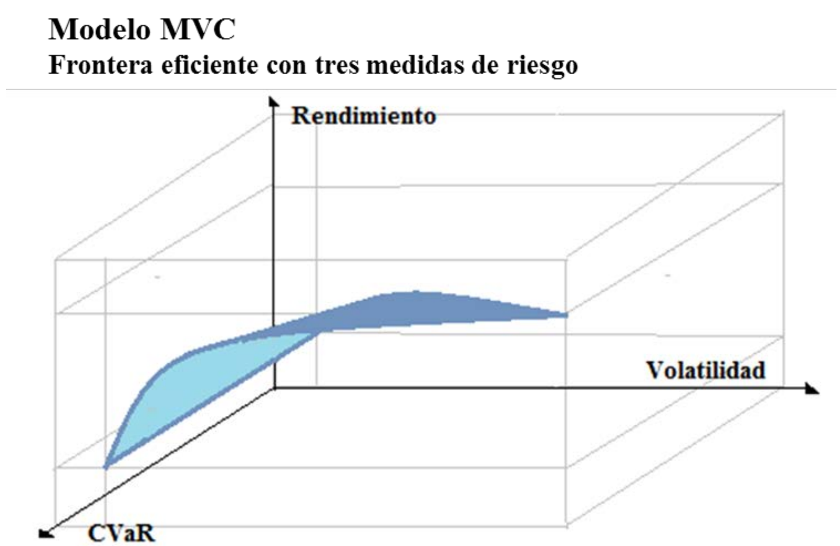


Figura 4.9. Superficie eficiente para el modeloMVC.(14).

Hasta aquí, se ha realizado una breve descripción del proceso de experimentación y algunos de los resultados obtenidos con el objeto de dar validez al modelo planteado. Un análisis específico tendiente a la propuesta de carteras en lo particular se realizará en el siguiente apartado donde se propondrán carteras de inversión específicas para distintos perfiles de riesgo.

---

(14) Información procesada con el modelo MVC, con datos obtenidos de Valuación Operativa y Referencias de Mercado. www.valmer.com.mx.

Finalmente, hay que considerar que la experimentación se realiza en un entorno dinámico, por lo que de ser necesario, los parámetros utilizados pueden ser modificados como parte de un proceso de calibración del modelo, que deberá ejecutarse hasta conseguir estabilidad en los resultados obtenidos.

4.2.4. Análisis de resultados y selección de portafolio

La consecuencia inmediata de las pruebas realizadas es la selección de un portafolio específico, acorde al perfil de riesgo de un inversionista y sus objetivos de inversión. Como se indició en su momento, con la información procesada con el modelo MVC, se propondrán carteras para tres grados de aversión al riesgo, definidos como perfil conservador, moderado y agresivo.

Dichas carteras serán descritas brevemente para contrastar resultados obtenidos con al mismo modelo para distintos estilos de inversión, para posteriormente agregar información relevante para perfil moderado, a partir del cual se propondrá una cartera concreta para distribuirse en el mercado mexicano a manera de una sociedad de inversión.

De acuerdo a las características del modelo, que minimiza la varianza a partir de niveles de rendimiento esperado y valor en riesgo condicional dados, se debe decidir a cual de las dos restricciones se dará mas peso al momento de seleccionar un portafolio, por lo que adicionalmente se establecerá un criterio que permita discernir cual de las dos variables se debe privilegiar.

Es importante señalar que el análisis en el caso de las tres carteras es prácticamente el mismo, por lo que de acuerdo a nuestros intereses, se iniciará por justificar el portafolio moderado, para posterior mente concluir, por analogía, las estrategias conservadora y agresiva.

4.2.5.1. Perfil de riesgo moderado

Se ejecutó el programa en Matlab de acuerdo al procedimiento anotado en el punto anterior, para obtener una frontera eficiente con el modelo MVC con el valor en riesgo condicional máximo designado para el perfil de riesgo conservador, de 2.5% diario y un nivel de confianza de 99%. Este valor ha sido fijado asumiendo que en condiciones extremas, cuya probabilidad de ocurrencia es de menos de 1%, un inversionista estaría dispuesto a asumir, como máximo, una pérdida por el 2.5% de su capital en un día. En caso de que se presente este evento, el inversionista deberá decidir si re-balancea o no su portafolio.

Es importante recordar que de acuerdo a las definiciones hechas en los objetivos de inversión, el rendimiento requerido para un perfil de riesgo moderado es de 5 puntos porcentuales sobre el índice de referencia VLMR_MEX_CETES, integrado por instrumentos libres de riesgo. Este índice pagó en el periodo de referencia 6.1% promedio anual.

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.7., donde se observa que, dada la restricción sobre el CVaR, no existen soluciones para rendimientos más allá del 17.1% anual. Así mismo, el rendimiento requerido el rendimiento requerido sobre el índice de referencia (alfa) solo se logra a partir de la cartera que otorga el 11.1% de rendimiento anualizado, por lo que para este inversionista, solo los portafolios en el rango de rendimientos [11.1%, 17.1%] serán factibles, como se observa en la tabla de referencia.

En el rango de rendimientos definido, se encuentran carteras con volatilidades que van de 3.6% a 10.4% anual, y que otorgan de 5 a 11 puntos porcentuales sobre el índice de referencia. El problema ahora, se reduce a encontrar una solución específica dentro de las múltiples carteras en este intervalo.

La primera tentación que tendrá un inversionista, será la de elegir el portafolio que proporcione el mayor rendimiento esperado. Sin embargo, aunque esto implica también un mayor riesgo, dentro de la tolerancia máxima para el CVaR, no todas las carteras poseen la misma relación riesgo-rendimiento. Utilizando el Índice de Sharpe, definido en el capítulo anterior(*), que mide esta relación para una cartera sobre un activo libre de riesgo, se observa que en el intervalo de soluciones, la cartera con rendimiento esperado anual de 11.1% es la que presenta un mejor índice. Esto indica que dicho portafolio es el que compensa con un mejor rendimiento su volatilidad asociada.

Tabla 4.7. Resultados para un perfil de riesgo moderado.(15)

CVaR < 2.5%				
rendimiento anualizado	σ anual	CVaR	alfa	Índice Sharpe
6.3%	1.3%	-0.3%	0.25%	4.66
7.1%	1.4%	-0.3%	1.01%	5.01
8.1%	1.6%	-0.3%	2.00%	5.10
9.1%	2.1%	-0.4%	3.00%	4.39
10.1%	2.8%	-0.6%	4.00%	3.62
11.1%	**3.6%**	**-0.8%**	**5.00%**	**3.02**
12.1%	4.6%	-1.1%	6.00%	2.62
13.1%	5.5%	-1.3%	7.00%	2.35
14.1%	6.5%	-1.5%	8.00%	2.16
15.1%	7.5%	-1.8%	9.00%	1.99
16.1%	8.8%	-2.1%	10.00%	1.81
17.1%	**10.4%**	**-2.4%**	**11.00%**	**1.63**

Esto indica que el inversionista deberá elegir el portafolio con mayor Índice de Sharpe, aunque eventualmente podría moverse de manera estratégica hacia carteras más riesgosas

(*) El índice de Sharpe (S) es una medida del exceso de rendimiento por unidad de riesgo. Fue presentado por primera vez por William Sharpe como un indicador del premio al riesgo, y se obtiene con la relación $S = (r - r_f)/\sigma$, donde r es el rendimiento del activo, r_f el rendimiento libre de riesgo o tasa de referencia y σ la volatilidad.

(15) Información procesada con el modelo en Matlab a partir de una muestra con 1014 escenarios históricos y un límite de CVaR de 2.5% diario con una confianza estadística del 99% y una tolerancia de 10^{-10}.

dentro del intervalo de rendimiento definido.

Dado lo anterior, en la tabla 4.8. se muestran diversas carteras eficientes con el modelo MVC para un perfil de riesgo moderado con el nivel de CVaR máximo dado en el intervalo de rendimientos señalado. De acuerdo al planteamiento, la selección adecuada será el portafolio con rendimiento esperado de 11.1%, que proporciona 5 puntos porcentuales sobre la referencia, y con un CVaR de tan sólo 0.8% diario. Esta holgura contra el valor en riego condicional máximo implica que podrían elegirse carteras más riesgosas, en la búsqueda de un mayor rendimiento. Sin embargo esto no determina una mayor eficiencia y será una decisión reservada a cada inversionista, pero establece un rango donde pueden fijarse niveles mínimos y máximos de asignación para cada activo.

Tabla 4.8. Carteras eficientes con el modelo MVC para un perfil de riesgo moderado.(16)

Cartera moderada		**Composición de la Cartera para diversos tipos de activos**					
rendimiento anualizado	CVaR	Tracs Deuda	Tracs Capitales	Tracs Apalancados	Tacs Dólares	Deuda Corporativa	Tracs Deuda largo plazo
11.1%	**-0.8%**	96.0%	4.0%	0.0%	18.1%	0.1%	86.9%
12.1%	-1.1%	94.8%	5.1%	0.1%	23.0%	0.1%	72.1%
13.1%	-1.3%	93.6%	6.3%	0.1%	28.1%	0.2%	57.8%
14.1%	-1.5%	92.4%	7.6%	0.0%	33.1%	0.0%	43.7%
15.1%	-1.8%	90.6%	8.0%	1.4%	41.2%	0.0%	41.2%
16.1%	-2.1%	93.0%	0.1%	6.9%	53.4%	0.0%	53.6%
17.1%	**-2.4%**	91.2%	0.0%	8.8%	67.5%	0.0%	67.5%

Por simpleza, en la tabla se muestran las composiciones de carteras para distintos rendimientos por tipos activos de inversión, mostrando la asignación precisa del portafolio propuesto en la figura 4.10.

---

(16) Información procesada con el modelo en Matlab a partir de una muestra con 1014 escenarios históricos y un límite de CVaR de 2.5% diario con una confianza estadística del 99% y una tolerancia de 10^{-10}. El desglose por tipo de activo no suma el 100%, puesto que existen instrumentos que incluyen diversos factores de riesgo.

Se observa como para el nivel de riesgo deseado, el modelo realiza una mayor asignación en instrumentos de deuda de mediano y largo plazo que del mercado de capitales, y que a medida que se incrementa el riesgo, la participación en instrumentos de renta variable, y concretamente de tracs apalancados se incrementa para lograr un beneficio mayor. Igualmente, aunque no se observa un cambio significativo en el peso en activos de deuda, la mezcla de los mismos se modifica al aumentara el CVaR al sustituir Tracs de deuda en pesos por el UMSTRAC de deuda soberana denominado en dólares americanos.

En relación a la inversión que se sugiere en base a la información procesada por el modelo MVC, en el Figura 4.9. se muestra la asignación puntual que debe realizarse a fin de obtener el rendimiento esperado en relación al índice de referencia establecido en los objetivos de inversión. Una cartera formada por los activos y proporciones mencionadas en dicho Figura, otorga un rendimiento esperado de 5 puntos sobre el índice de referencia con un valor en riesgo condicional dentro de los parámetros y con una volatilidad anual razonable del 3.6%.

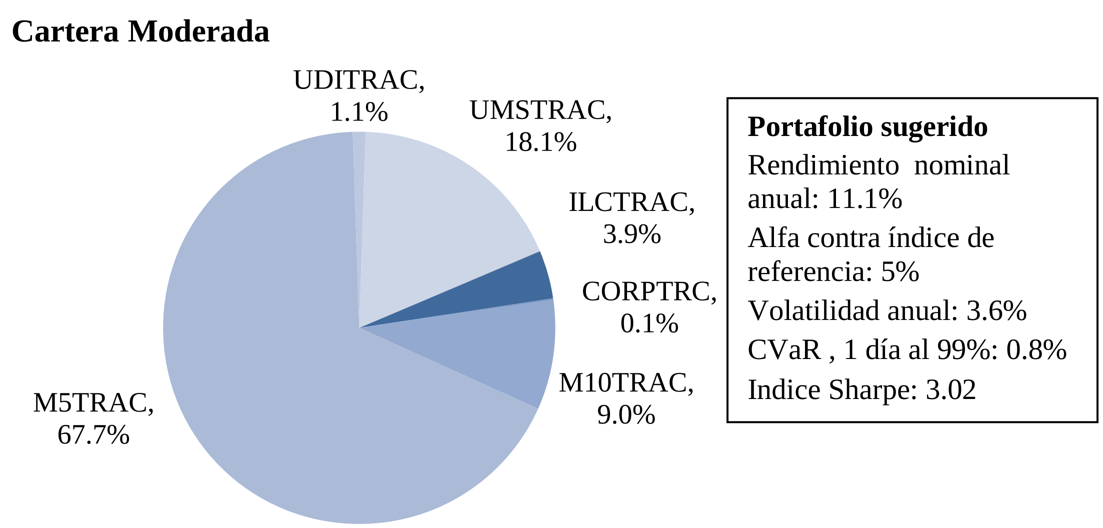


Figura 4.10. Cartera inicial sugerida para un perfil de riesgo moderado.

Es importante señalar que esta asignación es eficiente, dada la información incorporada en los precios de los activos, y que deberá ser balanceada periódicamente para incorporar nuevos eventos. Para ello, el modelo MVC se ejecutará periódicamente para hacer los ajustes necesarios. Así mismo, en caso de que el límite de CVaR fuera excedido, se tendrá también que revisar la composición de la cartera.

Finalmente, para entender mejor el desempeño de esta estrategia, se muestra en el figura 4.11. un comparativo del desempeño una inversión de $100 en la cartera propuesta contra otra en el índice de referencia libre de riesgo durante el periodo de cuatro años. De esta prueba retrospectiva se obtienen valores finales de $155.49 y $124.24 para la inversión en el portafolio moderado y el índice VLMR MEX CETES, lo que supone un rendimiento en exceso promedio sobre la referencia de 5% anual.

Puede verse que salvo por los acontecimientos extremos del último trimestre de 2008, esta estrategia mantiene un rendimiento superior al de la referencia. Así mismo, la inclusión de estos eventos es determinante para las conclusiones del modelo.

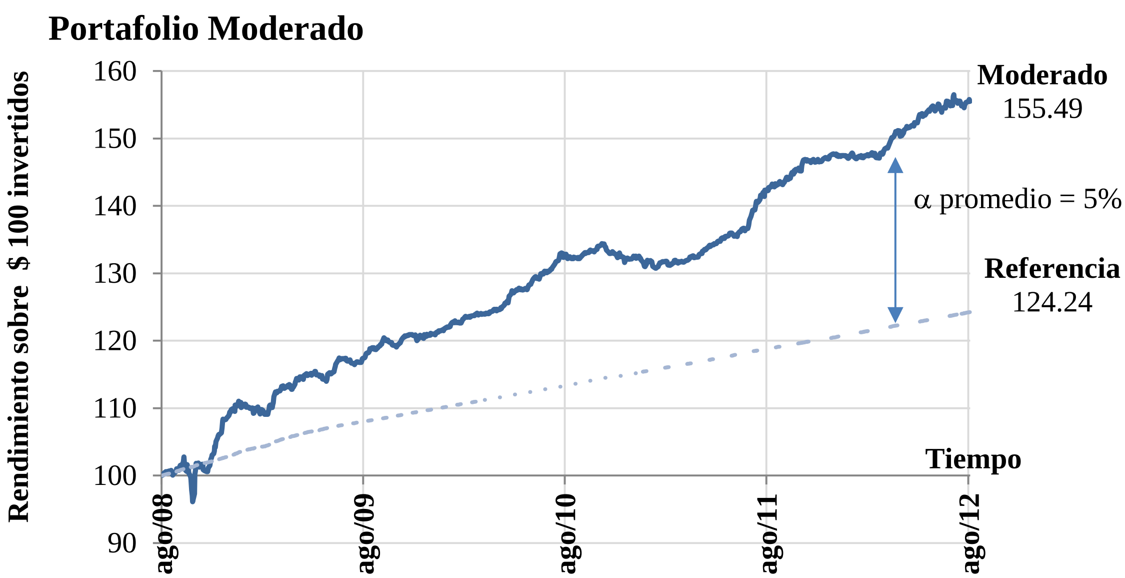


Figura 4.11. Desempeño de la cartera contra el índice de referencia

4.2.5.2. Perfil de riesgo conservador

Procediendo de la misma manera que para el perfil de riesgo moderado, con un rendimiento esperado sobre el índice de referencia de dos puntos porcentuales anuales, y con un límite máximo de valor en riesgo condicional de 1% diario, se presentan los resultados obtenidos, no sin antes recalcar que en este caso, una mayor restricción sobre el riesgo en condiciones extremas, lleva a conjunto de soluciones o frontera eficiente más reducido.

En este caso, como se observa en las tablas 4.9., la frontera eficiente proporciona soluciones hasta un rendimiento esperado de 11.1% sin exceder el valor de CVaR Máximo, mientras que el rendimiento requerido, de 8.1% anualizado, dado el rendimiento del índice de referencia de 6.1%, reduce también el número de soluciones factibles que se encontrarán en el intervalo de rendimientos [8.1%, 11.1%], donde el portafolio con mejor relación riesgo-rendimiento corresponde al de menor riesgo.

De la misma forma, se muestra la composición de la cartera por clases de activos, donde, como es de suponerse, se ve un mayor componente en instrumentos de deuda y muy limitado, o nulo para instrumentos del mercado de capitales. En este caso, la estrategia propuesta, correspondiente a la cartera de menor riesgo en el intervalo de rendimientos señalado se muestra en el figura 4.12., con la salvedad de que al igual que para el perfil conservador, la cartera podría modificarse con fines especulativos dentro del conjunto de soluciones eficientes más reducido, sin exceder el límite de CVaR.

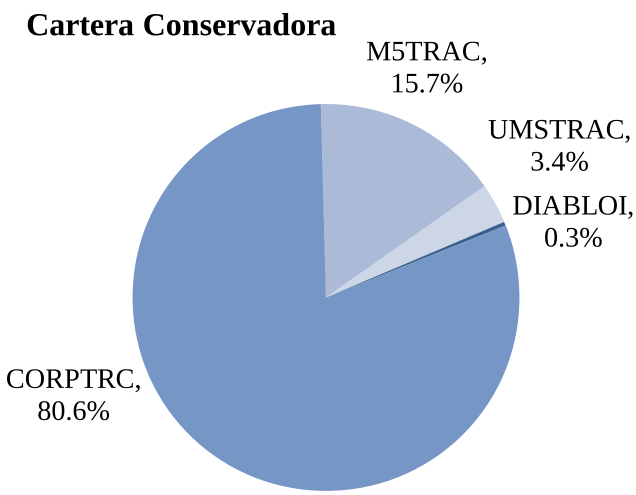
4.2.5.1. Perfil de riesgo agresivo

De acuerdo a las definiciones hechas en los objetivos de inversión, se definió como un perfil de riesgo agresivo a aquel capaz de tolerar una pérdida extrema máxima diaria, medida a través del valor en riesgo condicional, de 5%, con un rendimiento esperado de 10 puntos porcentuales anuales por arriba del índice de referencia.

Tabla 4.9. Resultados para un perfil de riesgo conservador[17]

Cartera conservadora		Composición de la Cartera					
rendimiento anualizado	CVaR	Tracs Deuda	Tracs Capitales	Tracs Apalancados	Tacs Dólares	Deuda Corporativa	Tracs Deuda largo plazo
8.1%	**-0.3%**	99.6%	0.0%	0.3%	3.4%	80.6%	19.0%
9.1%	-0.4%	99.2%	0.8%	0.0%	7.7%	39.2%	60.1%
10.1%	-0.6%	97.7%	2.3%	0.0%	12.4%	0.4%	97.3%
11.1%	**-0.8%**	96.1%	3.9%	0.0%	18.1%	0.0%	85.8%

CVaR < 1%				
rendimiento anualizado	σ anual	CVaR	alfa	Índice Sharpe
6.4%	1.4%	-0.3%	0.36%	4.71
7.1%	1.4%	-0.3%	1.01%	4.89
8.1%	**1.6%**	**-0.3%**	**2.00%**	**5.10**
9.1%	2.0%	-0.4%	3.00%	4.43
10.1%	2.8%	-0.6%	4.00%	3.64
11.1%	**3.6%**	**-0.8%**	**5.00%**	**3.03**



Portafolio sugerido
Rendimiento esperado nominal anual: 8.1%
Alfa contra índice de referencia: 2%
Volatilidad anual: 1.6%
CVaR , 1 día al 99%: 0.3%
Indice Sharpe: 5.1%

Figura 4.12. Cartera inicial sugerida para un perfil de riesgo Conservador.

---

(17) Información procesada con el modelo en Matlab a partir de una muestra con 1014 escenarios históricos y un límite de CVaR de 1.0% diario con una confianza estadística del 99% y una tolerancia de 10^{-10}..

Así pues, procediendo de manera similar a los perfiles anteriormente descritos con el modelo MVC, se construyó la tabla 4.10. Lo primero que salta a la vista es que se incluyen soluciones eficientes para un rango más amplio de valores de volatilidad y rendimiento al permitir perdidas mayores que para las carteras anteriores.

Para lograr el rendimiento objetivo requerido, las soluciones factibles iniciarán en un rendimiento esperado de 16.1% anual, dado el rendimiento de la referencia. Así mismo, no existen soluciones en la frontera eficiente más allá de un rendimiento de 20.1%, al cual corresponde un CVaR de 4.7%, menor a la tolerancia máxima.

De esta forma, es posible plantear soluciones factibles en el intervalo de rendimiento [16.1%, 20.1%], siendo el portafolio correspondiente al inicio del intervalo donde se logra el mayor índice de Sharpe.

La cartera sugerida por el modelo MVC para un inversionista agresivo, planteada en los mismos términos que para los portafolios anteriores se muestra en el Figura 4.13.

Así mismo, el desempeño comparativo entre el índice de referencia y los tres portafolios propuestos en el periodo de referencia de cuatro años se presenta en el figura 4.14., donde puede observarse la evolución de una inversión de $100 en cada una de las carteras. Esta prueba retrospectiva con los escenarios históricos utilizados proporciona valores finales de $187.62, $155.49 y 138.15 para los portafolios correspondientes a los perfiles de riesgo agresivo, moderado y conservador, respectivamente. Una inversión en el índice VLMR MEX CETES pagaría $124.24 en el mismo periodo, lo que supone una clara diferenciación entre las estrategias acorde a su nivel de riesgo.

Puede observarse también como las variaciones a la alza y a la baja para el portafolio más riesgoso tienen una mayor amplitud, especialmente durante el último trimestre de 2008, lo que es consistente con la metodología utilizada para la determinación de estas carteras diversificadas de inversión.

Tabla 4.10. Resultados para un perfil de riesgo agresivo[18]

CVaR < 5%				
rendimiento anualizado	σ anual	CVaR	alfa	Índice Sharpe
6.3%	1.4%	-0.3%	0.27%	4.67
7.1%	1.4%	-0.3%	1.00%	5.04
8.1%	1.6%	-0.3%	2.00%	5.09
9.1%	2.0%	-0.4%	3.00%	4.41
10.1%	2.8%	-0.6%	4.00%	3.64
11.1%	3.6%	-0.8%	5.00%	3.03
12.1%	4.6%	-1.1%	6.00%	2.63
13.1%	5.5%	-1.3%	7.00%	2.35
14.1%	6.5%	-1.5%	8.00%	2.16
15.1%	7.5%	-1.8%	9.00%	1.99
16.1%	**8.8%**	**-2.1%**	**10.00%**	**1.82**
17.1%	10.3%	-2.5%	11.00%	1.65
18.1%	11.9%	-2.9%	12.00%	1.51
19.1%	13.7%	-3.3%	13.00%	1.39
20.1%	**18.2%**	**-4.7%**	**14.00%**	**1.10**

Cartera agresiva		Composición de la Cartera					
rendimiento anualizado	CVaR	Tracs Deuda	Tracs Capitales	Tracs Apalancados	Tacs Dólares	Deuda Corporativa	Tracs Deuda largo plazo
16.1%	**-2.1%**	92.0%	0.0%	8.0%	51.1%	0.0%	51.4%
17.1%	-2.5%	88.7%	0.0%	11.3%	62.1%	0.0%	62.1%
18.1%	-2.9%	85.4%	0.0%	14.6%	73.3%	0.0%	73.4%
19.1%	-3.3%	80.2%	0.0%	19.8%	80.2%	0.0%	80.2%
20.1%	**-4.7%**	63.9%	0.0%	36.1%	63.9%	0.0%	63.9%

(18) Información procesada con el modelo en Matlab a partir de una muestra con 1014 escenarios históricos y un límite de CVaR de 5.0% diario con una confianza estadística del 99% y una tolerancia de 10^{-10}..

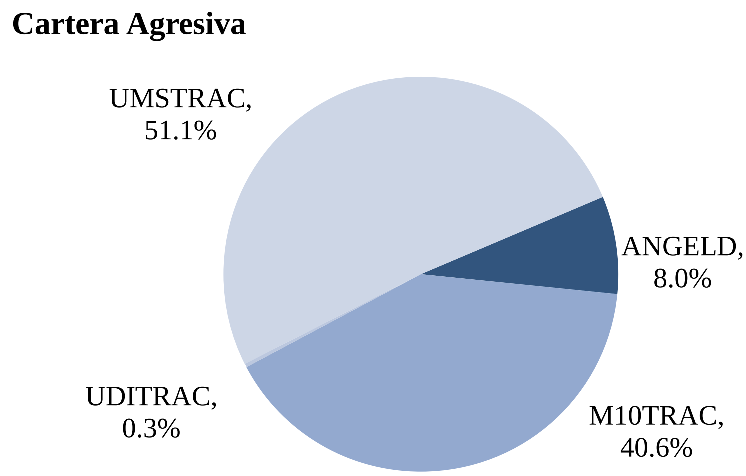


Figura 4.13. Cartera inicial sugerida para un perfil de riesgo Agresivo.

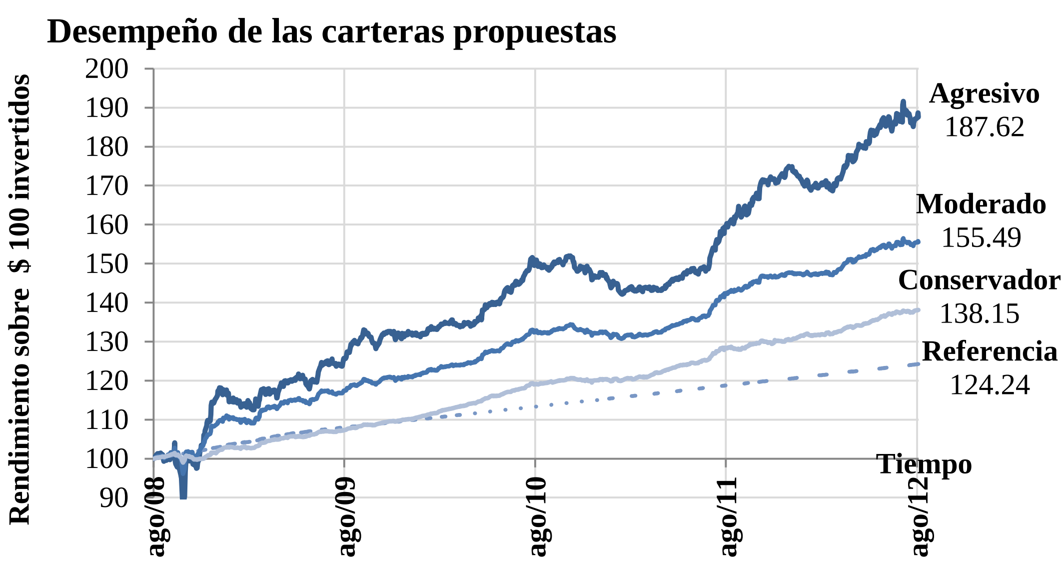


Figura 4.14. Evolución de una inversión de $100 en los portafolios propuestos.

4.3. Portafolio propuesto para el mercado mexicano

Hasta este punto, se ha fundamentado teóricamente y validado el modelo MVC mediante el planteamiento de tres carteras de inversión para distintos perfiles de riesgo utilizando títulos referenciados a acciones sobre el mercado mexicano. El modelo se ha comportado de acuerdo a lo predicho.

Sin embargo, para completar esta investigación, se propondrá un producto concreto, basado en el modelo de selección de cartera MVC, que pueda ser comercializado en un contexto real. La construcción de un portafolio específico con miras a distribuirse entre el gran público inversionista, promovería el uso del modelo más allá del entorno académico, con miras a que sea adoptado por la industria de gestores de carteras.

Para ello, se tomará como base el portafolio para el perfil de riesgo designado como moderado, que por sus características resulta representativo de un mayor número de inversionistas. En los objetivos de inversión propuestos en el punto 4.2.1., se definió este perfil en términos de los insumos para el modelo MVC como el de un inversionista con rendimiento objetivo de 5 puntos porcentuales sobre la tasa libre de riesgo, y que estaría dispuesto a tolerar una pérdida de capital máxima o extrema del 2.5% del valor de su cartera en un día de operación extremadamente inusual. De ocurrir este evento, el inversionista recompondría su portafolio mediante la venta parcial o total de sus posiciones o su sustitución por otras nuevas.

Así mismo, en el punto 4.2.5.1. se especificó el portafolio de tracs obtenido con el modelo MVC para este perfil de inversión, de acuerdo a los supuestos y metodología indicados en las secciones anteriores. Los resultados obtenidos, que se presentan en la tabla 4.11., y reflejan una inversión eficiente para este perfil al momento del análisis, por lo que podrían cambiar en la medida que se incorpora nueva información en los precios de mercado, por lo que, como se anotó anteriormente, el portafolio deberá ser continuamente rebalanceado mediante la ejecución iterada del modelo de selección de cartera.

Así pues, para la construcción de un fondo de inversión utilizando este modelo, no basta con especificar una cartera para un momento dado, sino que se deberán realizar las pruebas retrospectivas y de estrés necesarias para sustentar dicha estrategia, y a la vez realizar consideraciones adicionales relativas al riesgo de crédito y liquidez de la misma, toda vez que el modelo hasta este punto solo ha considerado el riesgo de mercado.

Igualmente, para la comercialización de una fondo, se debe definir el régimen de inversión en función de las tenencias mínimas y máximas por tipo de activo, la liquidez requerida para que madure la estrategia y el esquema de cobro de gastos y comisiones, por lo que en esta última sección propondrá un fondo concreto para el perfil de riesgo descrito considerando estas variables.

Es importante señalar que el en este punto no se pretende realizar un análisis exhaustivo, pues esto alargaría considerablemente la investigación. El propósito es mostrar una aplicación práctica de los conceptos utilizados hasta el momento.

4.3.1. Régimen de inversión y Pruebas retrospectivas

Como se indicó anteriormente, se ha seleccionado el perfil de riesgo moderado para la construcción de una cartera que sea susceptible de distribuirse en el mercado a manera de un fondo dividido en unidades de participación. Así mismo, en la sección anterior se explicó cómo dado un rendimiento mínimo requerido y un valor en riesgo condicional máximo en las restricciones para el modelo MVC, existían varias soluciones eficientes que cumplían con ambas condiciones, y como, a través del índice de Sharpe, se eligió a la cartera menos riesgosa como cartera óptima, al ser la que tenía un mejor balance entre riesgo y rendimiento.

En la tabla 4.11., se presentan las principales características de los portafolios con menor y mayor varianza en el rango de soluciones factibles para el perfil moderado, de acuerdo a lo indicado en el punto anterior. Podrá observarse como el incremento en riesgo, implica una modificación en la cartera, que básicamente consiste en aumentar la exposición a riesgo bursátil y cambiario, aprovechando la razón de cobertura entre estos activos.

Así mismo, cualquier cartera sobre la frontera eficiente del modelo MVC que se encuentre entre estos dos portafolios cumplirá con las condiciones de rendimiento mínimo y CVaR máximo, de manera que es posible moverse en ese rango de soluciones incrementando el riesgo en la búsqueda de un mayor rendimiento esperado, lo que también incrementa la posibilidad de obtener pérdidas sean mayores.

El hecho de que exista un rango de soluciones factibles, hace que sea posible definir una cartera de inversión con límites mínimos y máximos de exposición por activo, tipo de activo y factor de riesgo, considerando que siempre es posible moverse en ese rango.

Tabla 4.11. Rango de soluciones para el portafolio Moderado[1(*)]

Concepto	Riesgo Mínimo	Riesgo Máximo
Rendimiento esperado anual	11.10%	17.10%
Volatilidad anualizada	3.60%	10.40%
VaR(1,99)	0.50%	1.65%
CVaR(1,99)	0.80%	2.40%
alfa contra referencia	5%	11%
Composición Cartera		
ANGELD	0.0%	8.8%
M5TRAC	67.7%	0.0%
UDITRAC	1.1%	0.0%
UMSTRAC	18.2%	67.5%
ILCTRAC	3.9%	0.0%
CORPOTRAC	0.1%	0.0%
M10TRAC	9.0%	23.7%

(*) El valor en riesgo (VaR) y valor en riesgo condicional (CVaR) han sido calculados mediante simulación histórica a partir de la muestra de 1014 escenarios para los activos considerados, en las proporciones indicadas en cada caso.

Para entender este concepto, es necesario realizar las pruebas retrospectivas necesarias con estos portafolios ubicados en los extremos del rengo de soluciones. En la figura 4.12 se presenta la evolución de un capital de $100.00 invertido en estas dos carteras que marcan los límites de desempeño para las estrategias factibles con las restricciones dadas.

Puede observarse como ambas mantienen rendimientos acumulados por arriba de la referencia libre de riesgo, excepto en el último trimestre de 2008, donde como efecto de la crisis hipotecaria, los portafolios hubieran tenido pérdidas descomunales, siendo el más riesgoso el más afectado por esta situación, como se habría previsto. Dadas las características del modelo de selección de cartera, las pérdidas en dicho periodo son las que mayormente contribuyen al valor en riesgo condicional, por lo que en la medida que se mantengan dichas observaciones como parte de la muestra histórica, y que no se desencadene una crisis financiera similar a la del 2008, el CVaR permanecerá estable.

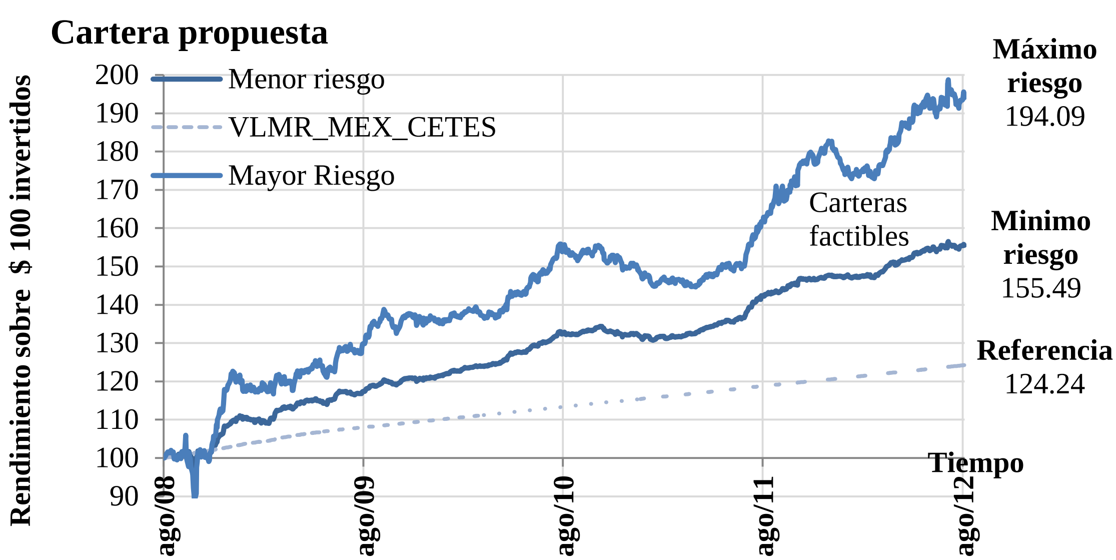


Figura 4.15. Prueba retrospectiva para la estrategia propuesta

Se observa también una mayor volatilidad para la estrategia más riesgosa, que consecuentemente otorga un rendimiento considerablemente mayor en el largo plazo. Estos desempeños están basados en datos históricos, por lo que no garantizan rendimientos futuros, sin embargo, se esperaría que en el tiempo, la relación entre esta dos inversiones se mantenga. Esto permitiría a un inversionista invertir en la cartera denominada como de "riesgo mínimo" y eventualmente moverse hacia la cartera de "riesgo máximo" encontrándose siempre dentro de la región factible, siempre que no cambien radicalmente las variables fundamentales de la economía, en cuyo caso habría que hacer un nuevo planteamiento de cartera.

De esta manera, la cartera propuesta inicial, es la que se definió para el perfil de riesgo moderado, y será modificada en el tiempo en la medida que cambien las condiciones de los mercados, o si se pretende tomar mayor riesgo con el objeto de obtener mayores rendimientos, siempre dentro de un marco rector entre las estrategias de menor y mayor riesgo, como se observa en la figura 4.16., donde se han agrupado las carteras de tracs por tipo de activo subyacente.

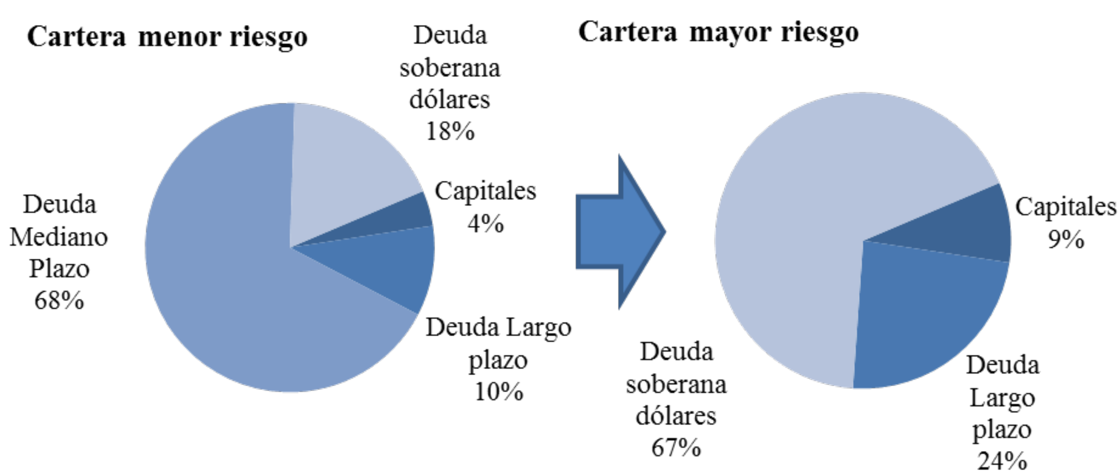


Figura 4.16. Carteras de menor y mayor riesgo dentro del marco rector propuesto

Es importante señalar que con reserva del análisis realizado, para la distribución masiva de una cartera de inversión en México, y sobre todo si se trata de una sociedad de inversión autorizada al amparo de la legislación vigente, es necesario especificar el régimen de inversión aplicable en el prospecto de información al público inversionista, donde se indicarán los límites mínimos y máximos de tenencia por tipo de activo de inversión. La regulación vigente aplicable se encuentra en la Ley de Sociedades de Inversión, y de manera concreta en la Circular Única de Sociedades de Inversión emitida por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores [2(19).]

La regulación vigente aplicable es explícita en cuanto a la forma en que se debe presentar el régimen de inversión en el prospecto de información y otros medios de información al público inversionista. Sin embargo, con base a la información presentada en la tabla 4.11., y de acuerdo al razonamiento aquí expuesto, es posible definir los parámetros básicos aplicables al régimen de inversión para el fondo propuesto basado en el perfil de riesgo moderado obtenido con el modelo MVC. En la tabla 4.12., se muestra el régimen de inversión sugerido, donde los porcentajes mínimos y máximos han sido redondeados al entero más cercano, incluyendo además el valor en riesgo máximo permitido para esta cartera, al ser uno de los conceptos que deben incluirse en el prospecto, de acuerdo a la normatividad.

Es importante reiterar que el portafolio invertirá únicamente en títulos referenciados a acciones emitidos en México, que coticen en la Bolsa Mexicana de Valores, y que cuenten con un formador de mercado para garantizar su liquidez. Así mismo, el fondo será dividido en unidades de participación, por lo que con reserva de establecer la mecánica operativa para la compra-venta de las mismas, se podrían realizar operaciones de reporto de manera transitoria para administrar la liquidez.

(19) La Ley de Sociedades de Inversión y la Circular Única de Sociedades de Inversión pueden ser consultadas en línea en la dirección electrónica de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores. http://www.cnbv.gob.mx/Paginas/Normatividad.aspx

Tabla 4.12. Régimen de inversión para la cartera de inversión propuesta

Tipo de valor	Subyacente / Concepto	Instrumentos	Mínimo %	Máximo %
Trac	Instrumentos de deuda	M5TRAC, M10TRAC, UDITRAC, UMSTRAC, COPTRC	-	96%
Trac	Acciones	NAFTRAC, ILCTRAC, IMCTRAC, IMXTRAC, ANGELD, DIABLOI	4%	9%
Trac	Apalancados mercado de capitales	ANGELD, DIABLOI	-	9%
Trac	Deuda de largo plazo con duración mayor a 5 años	M10TRAC, UDITRAC, UMSTRAC	27%	91%
Trac	Deuda de mediano plazo con duración mayor a uno y menor a 5 años	M5TRAC, COPOTRC	-	68%
Trac	Deuda soberana denominada en moneda extranjera	UMSTRAC	18%	68%
Valor en Riesgo	Simulación historica, 1000 escenarios y confianza 99%		-	1.65%

4.3.2. <u>Pruebas en condiciones extremas</u>

La estrategia de inversión propuesta ha sido diseñada a partir de la restricción de un valor en riesgo condicional máximo, por lo que incluye el desempeño de la cartera en condiciones extremas de los mercados financieros. Sin embargo, en este caso se trata de eventos inusuales e históricos que han ocurrido dentro de la ventana temporal de cuatro años utilizada para su diseño.

Dado lo anterior, resulta necesario conocer la forma en que reaccionaría el portafolio ante otras condiciones, también extremas no incluidas en dicha ventana, o a través de la simulación de otros escenarios.

Para ello, el portafolio propuesto para el perfil de riego moderado, fue sujeto a diversos escenarios de estrés utilizando el sistema ARA (*Algo Risk Application*) desarrollado por la empresa *Algorithmics* y representado en México por la empresa Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S.A. de C.V. (Valmer), filial del Grupo Bolsa Mexicana de Valores.

Dicho sistema para la administración de riesgos, permite conocer el impacto de diversos escenarios de crisis en carteras de inversión simuladas, por lo que se procedió a someter el portafolio propuesto a las cinco principales crisis de los últimos veinte años. Es importante señalar que a pesar de que los instrumentos utilizados no existían en la mayoría de los casos, el sistema recrea las condiciones de mercado específicas para conocer el impacto sobre las carteras actuales.

Los escenarios de crisis considerados en orden cronológico son: la crisis mexicana de 1994 (efecto tequila), la asiática de 1997 (efecto dragón), la rusa en 1998 (efecto vodka), la ocasionada por los atentados del 11 de septiembre de 2001, y finalmente, la multicitada crisis hipotecaria de los Estados Unidos en 2008 ("*sub-prime*"). La características concretas para la simulación de estos eventos de acuerdo al sistema utilizado, pueden ser verificadas en el anexo III del presente documento, sin embargo, resulta fundamental entender que estos eventos tuvieron alcances mundiales, por lo que marcan un referente en la historia de los mercados financieros al ser las primeras crisis financieras globales.

Los eventos críticos tuvieron distintas duraciones y alcances, por lo que los resultados, correspondientes a la pérdida máxima que el portafolio hubiera acumulado en cada una de las mencionadas crisis, se presentan en la tabla 4.13.

En la tabla de referencia puede observarse como las crisis mexicana y la hipotecaria de los Estados Unidos son las que mayor impacto tienen sobre el portafolio propuesto, determinando minusvalías máximas acumuladas de 1.82% y 2.48%, respectivamente, por evento. Hay que recordar que la cartera simulada fue la de menor riesgo, planteada en la tabla 4.11., y que dicha cartera está expuesta primordialmente al riesgo asociado a instrumentos de deuda gubernamental, y al tipo de cambio ligado a los bonos de deuda soberana mexicana.

Tabla 4.13. Pruebas de estrés para el portafolio propuesto[3(20)]

Evento	Pérdida máxima acumulada
Crísis México	-1.82%
Crísis asiática	-0.31%
Crisis Rusa	-0.52%
Crísis 1109	-0.04%
Crisis Subprime	-2.48%

Instrumento	Pérdida
UDITRAC	-3.92%
UMSTRAC	-3.70%
M5TRAC	-2.84%
M10TRAC	-1.26%

Instrumento	Pérdida
UDITRAC	-13.14%
UMSTRAC	-0.68%
M5TRAC	-9.25%
M10TRAC	-5.33%

Así mismo, es importante señalar que las máximas minusvalías por instrumento durante un periodo de crisis no se alcanzan en el mismo momento, y que no todos los activos registran pérdidas en estos eventos. En las crisis de referencia, mientras las inversiones en moneda nacional registraron enormes pérdidas, los activos en dólares presentaron ganancias similares por valuación como resultado de la devaluación del peso mexicano.

Así pues, si se presentara un evento similar a la crisis mexicana de 1994, la cartera propuesta llegaría a tener pérdidas por valuación de 1.82%, con minusvalías en todos los instrumentos, con máximos en el trac de tasa real (UDITRAC) de 3.92%, y el de deuda soberana en dólares (UMSTRAC) con 3.70%, como se aprecia en la tabla 4.13.

Igualmente, un evento similar a la crisis de 2008, representaría pérdidas máximas acumuladas de 2.48%, ligeramente menores al límite de CVaR fijado para un día, con minusvalías son mayores que en el caso anterior.

(20) Escenarios de crisis históricas simulados mediante el sistema ARA (*Algo Risk Application*) desarrollado por la empresa canadiense *Algorithmics*, representada en México por Valuación Operativa y Referencias de Mercado (Valmer).

Este análisis podría extenderse; sin embargo, las cifras hablan por sí solas, aunque puede afirmarse que la cartera propuesta se comporta de acuerdo a lo esperado, aún en las circunstancias críticas señaladas.

4.3.3. Riesgo de crédito y liquidez

Hasta este punto, todo el análisis realizado ha sido orientado a variables de riesgo de mercado. La propuesta de una estrategia integral de inversión debe también hacer consideraciones sobre los riesgos de crédito y liquidez asociados a una cartera de inversión.

El riesgo crediticio es propio de los instrumentos de deuda, por lo que en el caso de la cartera propuesta, solo las posiciones en tracs que incluyan deuda corporativa o bancaria serán sujetos de este tipo de crédito, pues la deuda gubernamental, por definición es libre de riesgo de crédito.

Así pues, entre los instrumentos considerados en el análisis, solo el CORPTRC incluye instrumentos de deuda de empresas con calificaciones AAA, AA y A. Sin embargo, en la cartera inicial que se propone, basada en la información de mercado conocida, apenas se incluye una proporción mínima, que resulta despreciable para efectos de riesgo crediticio. Si se aumentara el riesgo del fondo, recomponiendo la composición hacia la cartera más riesgosa, no se incluiría este instrumento, por lo que se trataría de una cartera libre de riesgo de crédito, aún y cuando se consideran posiciones que incluyen acciones de empresas privadas, que son parte del mercado de capitales.

Ahora bien, en el régimen de inversión propuesto, se indica que es posible una tenencia de hasta el 68% en tracs cuyos subyacentes sean instrumentos con una duración promedio entre uno y cinco años, donde se incluye el CORPTRC. Si en el futuro cambiaran las condiciones de mercado, y como producto del rebalanceo del portafolio, fuera necesario tomar mayores posiciones en este instrumento, estarían limitadas a dicho porcentaje, por lo que en el peor de los casos, se estaría asumiendo en esa magnitud, el riesgo de crédito derivado de inversiones en emisores corporativos.

El riesgo de liquidez presenta otra problemática. La cartera está compuesta por tracs que operan como acciones, independientemente de la naturaleza de sus activos subyacentes. En este caso, los diferenciales entre los precios de compra y venta representan un riesgo si es que la baja liquidez de un instrumento, implica que se deban asumir pérdidas, si la negociación se realiza a descuentos inusuales en el mercado.

Para estimar el riesgo de liquidez implícito en la cartera propuesta (moderada), se utilizó nuevamente el sistema ARA, donde a través de los diferenciales históricos observados en el mercado para cada instrumento se determina la pérdida que en promedio se deberá asumir en la venta de un activo contra su precio de valuación.

En este caso, el sistema arroja una pérdida esperada para la cartera propuesta de hasta 1.07% si fuera necesario liquidar el total del portafolio en un solo día. Aunque esto supondría una situación extrema, es indicador de la magnitud del riesgo en dicho supuesto. Dicho riesgo, de acuerdo a los resultados proporcionados por el sistema utilizado, se concentra mayoritariamente en dos de los tracs utilizados: El UDITRAC y el UMSTRAC, con diferenciales de compra-venta de 1.2% y hasta 1.3% respectivamente.

Para evitar la venta anticipada de posiciones con diferenciales inusuales en el mercado, se sugieren dos estrategias:

- Establecer días fijos para la compra-venta de acciones del fondo. Esto es, limitara la entrada y salida de inversionistas al fondo a una vez al mes con el objeto de planear la liquidez; y

- Abrir la posibilidad de subvaluar las unidades de participación del fondo en caso de que se presenten condiciones atípicas en los mercados. En este caso, se propone la aplicación de un diferencial de 1.07%, igual al riesgo de liquidez del portafolio para evitar que los inversionistas que no vendan asuman pérdidas extraordinarias.

Así mismo, para lograr una mejor administración de la liquidez, y permitir la maduración de la estrategia, es necesario aclara que el horizonte de inversión es de largo plazo, por lo que los eventuales inversionistas deberán asignar sólo excedentes de liquidez a este portafolio.

El análisis en relación a los riesgos de crédito y liquidez podría ampliarse más; sin embargo se considera que basta con los comentarios realizados para entender la repercusión que tienen estas variables en la cartera propuesta.

4.3.4. Gastos y estructura de comisiones

Los operadores de los títulos referenciados a acciones cobran comisiones por administración de los mismos, lo que motiva una desviación entre el rendimiento del índice subyacente el trac. En este caso, las cuotas de los tracs emitidos en México se muestran en la tabla 3.4., en el capítulo anterior.

Si se consideran las comisiones por administración y custodia de los fondos referenciados para las carteras de menor y mayor riesgo dentro del rango de soluciones factibles para el rendimiento mínimo y CVaR máximo, se obtiene que tendrían que pagarse comisiones ponderadas que van entre 30 y 44 puntos básicos al año; mismos que se verán trasladados inevitablemente al rendimiento del fondo.

Además de dichas comisiones, existen cargos por la compra-venta de estos instrumentos al ser operados como acciones. Se estima que podrían negociarse comisiones fijas de 0.125% sobre el monto de las operaciones, lo que implicaría un cargo total de 0.25% por la compra-venta (entrada y salida) de un título, y que se agregarían a las comisiones por administración, impactando aún más el rendimiento del portafolio.

Para evitar esta merma en el rendimiento, se propone trasladar estas comisiones al inversionista, de manera que se cobrará una cuota por compra-venta de acciones o unidades de participación del fondo equivalente al 0.125% del monto involucrado en cada operación.

Finalmente, el administrador de la cartera de tracs, cobrará una comisión por administración a los inversionistas, suficiente para cubrir los gastos no trasladados al cliente, que incluyen la custodia y administración de los títulos, gastos por la valuación de las acciones o unidades de participación, proveeduría de precios y cuotas a la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, entre otras. Estos gastos son relativamente fijos, y son absorbidos por el fondo, por lo que entre mayor sea su cartera, menor será el impacto en el rendimiento que se entrega al inversionista.

Así mismo, el administrador del fondo, deberá cobrar también, comisiones por administración suficientes para que la operación le resulte rentable, por lo que la cuota aplicada diariamente al precio de valuación de las unidades de participación deberá ser tal que cubra los gastos y la utilidad del administrador del fondo.

Dado lo anterior, se estima que una comisión por administración de 0.50% anual resulta razonable, toda vez que el fondo deberá tener activos en administración de al menos doscientos millones de pesos para llegar a su punto de equilibrio.

La tarea de comercializar una estrategia a manera de una sociedad de inversión en México, de acuerdo a la normatividad vigente, es compleja e incluye una larga lista de actividades. Sin embargo, se considera que lo aquí expuesto es suficiente para comprender los lineamientos generales en relación a la construcción de una sociedad de inversión a partir del modelo de selección de cartera expuesto en el presente trabajo de investigación.

C O N C L U S I O N E S

Una vez que se ha planteado y sustentado teóricamente el modelo de selección de carteras basado en dos medidas e incluyendo el concepto de coherencia de riesgo, que se han descrito los llamados títulos referenciados a acciones o tracs, y justificado su uso como activos materia de inversión con el objeto de descomponer el mercado mexicano en factores de riesgo, y que se ha realizado la experimentación necesaria para la validación del modelo, obteniendo como producto una estrategia tangible y susceptible de distribuirse a manera de una sociedad de inversión, es posible obtener varias conclusiones arrojadas de este proceso.

La conclusiones, son variadas, y las hay en relación al planteamiento teórico del modelo y a su implementación, y también al respecto de los activos utilizados y a los resultados obtenidos de las pruebas experimentales, por lo que a continuación se citan puntualmente las conclusiones obtenidas.

1. Conclusiones relativas al modelo de selección de cartera

El objetivo primordial de esta investigación es el de implementar un modelo de selección de cartera que incluyera el concepto de coherencia de riesgo, y que a la vez resultara simple en su planteamiento, con la finalidad de que fuera utilizado en la construcción de portafolios por la industria de administradores de carteras, cerrando la brecha entre el quehacer académico, basado en el conocimiento científico, y la aplicación práctica.

En este sentido, se concluye que es posible la integración del concepto de administración coherente de riesgos en los modelos de selección de carteras, mediante el uso del valor en riesgo condicional. Además, esto puede lograrse mediante un modelo simple, muy similar al tradicional de media-varianza, incluyendo una restricción adicional sobre CVaR máximo permitido, que indica las pérdidas que estaría dispuesto a asumir un inversionista en condiciones extremas de los mercados financieros, lo que resulta conveniente, dada la globalización de los mercados y las crisis económicas de los últimos años.

Así mismo, el hecho de que el modelo propuesto trabaje a partir de escenarios históricos, permite captar de una mejor forma los eventos críticos que los modelos paramétricos, al calcular el valor en riesgo condicional por el método de simulación histórica como el promedio de las pérdidas de los escenarios que se encuentran más allá del umbral del valor en riesgo.

Adicionalmente, el planteamiento del modelo en tiempo discreto, permite su programación mediante herramientas computacionales sencillas, al alcance de cualquier gestor de carteras, y sobre todo, resulta fácil de entender por quién carece de conocimientos de cálculo estocástico, optimización e informática.

El modelo, que se ha designado como MVC, proporciona resultados consistentes con el enfoque tradicional de media-varianza, acotando los resultados sobre la frontera eficiente a aquellos que cumplen con la restricción sobre el valor en riesgo condicional, y eventualmente llega a conclusiones diferentes al excluir aquellos activos o carteras que implican pérdidas extremas con independencia de la distribución de rendimientos.

Finalmente, fue posible la programación del modelo mediante una herramienta que permite la manipulación de información sin restricción en el número de activos y escenarios históricos utilizados, lo que permite su aplicación futura en la construcción carteras de inversión con independencia de la presentada en este trabajo de investigación.

2. Conclusiones relativas al uso de títulos referenciados a acciones en la construcción de estrategias de inversión.

Dada su versatilidad, cada vez es más común el uso de títulos referenciados a acciones o tracs como alternativas de inversión, y es frecuente encontrarlos en las estrategias de inversionistas en todo el mundo. El crecimiento de este mercado ha sido explosivo, y México no se ha quedado al margen de esta tendencia.

Más allá de la enorme oferta existente, es posible diseñar carteras de inversión basadas en los factores de riesgo del mercado, captados a través de estos instrumentos que replican índices de referencia específicos.

Si bien estos instrumentos representan portafolios en sí mismos, tras la investigación realizada, se concluye que es posible modelar carteras a partir de los mismos, siempre que su gestión no sea activa, que la composición del índice subyacente permanezca estable, y que el mecanismo de réplica sea físico y no sintético.

Así mismo, el mercado mexicano de títulos referenciados a acciones ha madurado, de suerte que es posible construir estrategias a partir de instrumentos emitidos y cotizados el país. Más aún, es factible plantear una estrategia diversa utilizando tracs mexicanos que representen los diferentes factores de riesgo de la economía nacional.

3. Conclusiones relativas a las pruebas experimentales, la metodología y a las carteras propuestas.

Para la aplicación del modelo MVC, fue posible definir una metodología específica para la construcción de carteras de inversión, que con independencia de la aplicación mostrada en esta investigación, puede aplicarse en el desarrollo de portafolios para necesidades concretas.

Tras las pruebas experimentales realizadas con el modelo MVC, utilizando como insumo únicamente títulos referenciados a acciones mexicanos, y a partir de la metodología descrita, fue posible construir carteras para diferentes perfiles de riesgo con distintas expectativas de riesgo y rendimiento.

A partir de dichas carteras, fue posible validar el modelo propuesto, y se verificó que los portafolios obtenidos se comportaron de acuerdo a lo previsto, por lo que se concluye que resulta factible su aplicación en el diseño de otras carteras.

Finalmente, fue posible plantear un fondo, a manera de una sociedad de inversión para su distribución en el mercado nacional a partir del modelo propuesto. Dicha cartera fue sometida a rigurosas pruebas de estrés que sirvieron para ratificar los resultados obtenidos, y por ende, apoyar la validación del modelo.

Si bien las descritas resultan las conclusiones más importantes, existen otros planteamientos relevantes que pueden encontrarse en la investigación. Sin embargo, el hecho más trascendente, es que fue posible el desarrollo de este proyecto a partir de lo que en su momento solo fue una idea dispersa de implementar un modelo de selección de cartera que encontrara acogida en la industria de administradores de activos, y que a la vez contara con sólidas bases teóricas.

BIBLIOGRAFIA

A. G., & BAPTISTA, A. (2004). A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model. *Management Science, 50*, 1261-1273.

ACERBI, C., & TASCHE, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal Bank. Finance, 26*, 1487-1503.

ALEXANDER, G. J. (2009). From Markowitz to modern risk managemente. *The European Journal of Finance, 5*(6), 451-461.

ANTON DE DIOS, E. (2011, 12 1). *http://etfroom.com*. Retrieved 08 11, 2012, from http://etfroom.com/2011/12/01/los-etfs-tracs-en-mexico/

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J., & HEAT, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance, 9*, 203-228.

AVELLANEDA, M. (2012). Arbitraje con ETFs. *Risk Mangement and Trading Conference* (pp. 1-84). Mexico, D.F.: Riskmathics, S.A. de C.V.

BASAK, S., & SHAPIRO, A. (2001). Value-at-Risk based risk management: Optimal policies and asset prices. *Financial Studies, 14*(2), 371-405.

Basel Commitee on Banking Supervision. (1996). *Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks.* Basilea: Basel Commitee on Banking Supervision.

BERKELAAR, A., KUMPERAYOT, P., & KOUWENBERG, R. (2002). The effecto of VaR based risk management on the asset prices and the volatility smile. *European Financial Management, 8*(2), 139-164.

Blackrock Advisors. (2011). *ETF Landscape, Industry Review 2011*. Londres: BlackRock Advisors (Reino Unido).

BlackRock Mexico, S.A. de C.V. (n.d.). *www.ishares.com.mx*. Retrieved 09 29, 2012, from http:/mx.ishares.com/

Bloomberg L.P. (29, Agosto 2012). *www.bloomberg.com*. Retrieved Agosto 2012, 29, from http://www.valmer.com.mx/VAL/

Bolsa Mexicana de Valores, (. (2012, Julio 27). *www.bmv.com*. Retrieved Julio 27, 2012, from http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_tracs_IM

BUCCOLA, S. (1982). Portfolio Selection Under Exponential and Quadratic Utility. *Western Journal of Agricultural Economics*, 43-51.

BUFFETT, W.; SOROS, G. (2011). *Exchange Traded Funds: Guía para el Inversionista Mexicano.* México, D.F.: Bolsa Mexicana de Valores.

CAPINSKI, M., & ZASTAWNIAK, T. (2003). *Mathematics for Finance, An Introduction to Financial Engineering.* Londres: Springer.

Casa de Bolsa BBVA Bancomer, S.A. de C.V. (2012, Agosto 23). *www.bancomer.com/Asset*. Retrieved Agosto 23, 2012, from http://www.bancomer.com/asset/asset6.asp?mainf=asset_tireac_main.html&leftf=asset_frame_menu.html

CHACKO, G., & VICEIRA, L. (2002). Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. *Papel de trabajo* . Boston: Harvard University, Graduate School of Business Administration.

CHUEH-YUNG, T. (2010). Portfolio selection based on the mean-VaR effcient frontier.

Circular Única de Sociedades de Inversión. (n.d.). *www.cnbv.gob .mx.* Retrieved from http://www.cnbv.gob.mx/Paginas/Normatividad.aspx.

COX, J., & HUANG, C. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asseta prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory, 49,* 33-83.

COX, S., LIN, Y., TIAN, R., & ZULUAGA, F. (2009). *Portfolio Risk Management with CVaR-Like Constraints.* North Dakota State University, Dept. of Accounting Finance and Information Systems.

DE LARA HARO, A. (2005). *Medición y Control de Riesgos Financieros.* México, D.F.: Limusa - Noriega Editores.

FLEMING, W., & HERNANDEZ-HERNADEZ, D. (2003). An optimal consumption model with stochastic volatility. *Finance and Stochastics, 7*, 245-262.

FREUND, R. (1956). The Introduction of Risk into a Programming Model. *Econometrica, 24*, 253-263.

GRINOLD, R., & KAHN, R. (2000). *Active Portfolio Management.* Nueva York: McGrw-Hill.

GRINOLD, R., & KAHN, R. (2000). *Active Portfolio Management, a Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk.* Nueva York: McGraw Hill.

GUERARD, J. (2009). *Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz Techniques* . Londres: Springer.

GUZMAN PLATA, M. D. (1997). El Modelo del Portafolio Aplicado a la Bolsa Mexicana de Valores. *Economía: Teoría y Practica*(7), 5-23.

HAIMES, Y., LASDON, L., & WISMER, D. (1971). On a bicriterion formulation of problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE, Systems Manufacturing and Cybernetics Society, I*, 296-297.

HESTON, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies, 6*, 327-344.

HULL, J. (2007). *Risk Management and Financial Institutions.* New Jersey: Pearson Education, Inc.

Impulsora y Promotora Blackrock México, S.A. de C.V. (2012, Agosto 23). *www.ishares.com.mx*. Retrieved Agosto 23, 2012, from http://mx.ishares.com/get_started/index.htm?cmp=producto_ishares&chn=PPC&c=google&kw=ishares&gclid=CPDI3KGm_rECFYlgTAodQwcAtg

J.P. MORGAN - REUTERS. (1996). *Riskmetrics - Technical Document.* J.P. Morgan, Nueva York.

JORION, P. (2003). Portfolio optimization with tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal, 59*(5), 70-82.

JORION, P. (2007). *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk.* Nueva York: McGraw Hill.

Jorion, P. (2007). *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, 3a. Edición.* Nueva York: McGraw-Hill.

KARATZAS, I., LEHOCZKY, J., & SHREVE, S. (1986). Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon. *Journal on Control and Optimization, 27*, 261-294.

KOESTERICH, R. (2008). *The ETF Strategist.* Londres: Penguin Books Ltd.

Koesterich, R. (2008). *The ETF Strategist: Balancing Risk and Reward for Superior Returns.* Nueva York: Penguin Group.

KONNO, H., SHIRAKAWA, H., & YAMAZAKI, H. (1993). A mean absolute deviation skewness portfolio optimisation model. *Ann.Oper. Res., 45*, 205-220.

KORN, R. (1997). *Optimal Portfolios, Stochastic Models for Optimal Investmente and Risk Management in Continuous Time.* Londres: World Scientific.

KRAFT, H. (2005). Optimal Portfolios and Heston´s Volatility Model: an explicit solution for power utility. *Quantitative Finance, 5*(3), 303-313.

KROKHMAL, P., PALMQUIST, J., & URYASEV, S. (2001). *Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objetive and Constraints.* University of Florida, Industrial adn Systems Engineering.

Landa Becerra, R., & Coello Coello, C. A. (n.d.). Solvin Hard Multiobjetive Optmization Problems using e-Constraint with Cultured Differential Evolution. *Evolutionary Computation Group CINVESTAV-IPN*. IPN.

Ley de Sociedades de Inversión. (2001, Junio 4). *www.cnbv.gob.mx.* Retrieved from http://www.cnbv.gob.mx/Normatividad/Ley%20de%20Sociedades%20de%20Inversi%C3%B3n.doc.

LIU, J. (2005). Portfolio selection in stochastic environments. *Papel de trabajo*. Los Angeles: UCLA.

MACAULAY, F. (1938). *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yield and stock prices int the United States since 1856*. New York: Columbia University Press.

MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance, 7*(1), 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959). *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments.* Universidad de Yale, Cowles Foundation for Research in Economics, Estados Unidos.

MERTON, R. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory, 3*, 373-413.

MERTON, R. (1972). An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7*(4), 1851-1872.

PFLUG, G. (2000). *Som remarks on the value-at-risk an the conditional value-at-risk.* Retrieved Noviembre 2011, from In Probabilistic Constrained Optimisation: Methodology and Applications. Edited by S. Uryasev: http://www.gloriamundi.org

PHAM, H. (2002). Smooth solutions to optimal investment models with stochastic volatilities and portfolio constraints. *Applied Mathematics and Optimization*(46), 55-78.

PLISKA, S. (1986). A Sthchastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research, 11*, 371-382.

Protego Casa de Bolsa, S.A. de C.V. (2012, Agosto 23). *www.smartshares.com*. Retrieved Agosto 23, 2012, from http://www.smartshares.com.mx/producto-smart-diabloi.html

Protego Casa de Bolsa, S.A. de C.V. (2012, Agosto 23). *www.smartshares.com.mx*. Retrieved Agosto 23, 2012, from http://www.smartshares.com.mx/producto-smart-angeld.html

ROCKAFELLAR, R. (1970). *Convex Analysis* (Vol. 28). New Jersey: Princeton University Press.

ROCKAFELLAR, R., & URYASEV, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk, 2*, 21-41.

ROCKAFELLER, R., & URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal Bank. Finance, 26*(7), 1443-1471.

ROMAN, D., DARABY-DOWMAN, K., & MITRA, G. (2007). Mean-Risk models using two risk measures: a multi-objetive approach. *Quantitative Finances, 7*(4), 443-458.

SAMUELSON, P. A. (1967). Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2*, 107-122.

SHARPE, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance, 19*(3), 425-442.

The MathWorks Inc. (2012, Jun 12). *www.mathworks.com/*. Retrieved Jun 12, 2012, from http://www.mathworks.com/

TSAO, C.-Y. (2010). Portfolio Selection based on the mean-VaR efficient frontier. *Quantitative Finance*, *10*(8), 931-945.

Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S.A. de C.V. (2012, Agosto 29). *www.valmer.com.mx*. Retrieved Agosto 29, 2012, from http://www.valmer.com.mx/VAL/

VENEGAS, F. (2005). Administración Coherente de Riesgos con Futuros del MexDer. *Premio Nacional de Derivados MexDer-Asigna, trabajo acreedor al segundo lugar*. México, D.F.

WANG, J. (2000). *Mean-variance-VaR based portfolio optimisation.* Retrieved from http://www.goriamundi.org

Weisstein, E. W. (n.d.). *Covariance Matrix*. Retrieved 1 6, 2012, from MathWorld - A Wolfram Web Resource: http://mathworld.wolfram.com/CovarianceMatrix.html

A P E N D I C E "A"

PROGRAMACION DEL MODELO MVC

El modelo de selección de cartera que es materia de la presente investigación no tendría sentido si no es acompañado de una programa de cómputo capaz de procesarlo adecuadamente. Modelos como el clásico de media-varianza pueden ser implementados mediante herramientas simples para la solución de problemas de optimización tales el "Solver" de la popular hoja de cálculo, Excel, desarrollada por Microsoft.

En el caso del modelo MVC descrito en el capítulo II, el número de variables de decisión y de restricciones aumentan en proporción directa a la cantidad de escenarios históricos considerados, por lo que resulta deseable poder trabajar con series de untamaño razonable sin comprometer su confianza estadística, debiendo conciliar entre la rapidez para el proceso de la información y la eficiencia requerida. En estos términos, la implementación del modelo multi-objetivo aquí descrito, requiere necesariamente del uso de herramientas de cómputo más robustas que las que puede proporcionar una hoja de cálculo.

En virtud de lo anterior, se optó por el uso del Matlab para la programación de un sistema capaz de aplicar el modelo que ha sido ampliamente descrito en el presente documento. Como se explicó en su momento, Matlab es un programa de cálculo numérico orientado a matrices que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio conocido como lenguaje M. Esta plataforma diseñada y distribuida por la empresa Mathworks Inc., posee una sólida base matemática, y resulta más sencillo de utilizar que otros sistemas similares, por lo que ha alcanzado una fuerte popularidad entre los desarrolladores de soluciones a problemas numéricos, y recientemente entre los diseñadores de aplicaciones en el terreno de las finanzas cuantitativas.

Así mismo, la orientación matricial de esta plataforma favorece la programación de modelos como el MVC descrito en este documento, lo que simplifica enormemente la solución del problema de optimización frente a otras herramientas disponibles.

Una de las fortalezas del Matlab para la solución de problemas matemáticos complejos, es que cuenta con una serie de cajas de herramientas que contienen funciones específicas para su aplicación en distintas áreas del conocimiento, tales como la estadística, sistemas de control y finanzas entre otras; y de manera concreta, cuenta con utilerías para la solución de problemas optimización.

Aquí se hará una breve semblanza de las herramientas aplicadas en el caso particular del modelo de selección de cartera MVC, sin embargo, puede encontrarse mayor información sobre el producto y sus herramientas específicas en la página de Internet del desarrollador de esta plataforma[1].

Así, para la solución del problema de optimización que implica el modelo de media-varianza-valor en riesgo condicional, fue necesario utilizar el Matlab versión 2012a, conjuntamente con la herramienta de optimización (*optimization toolbox*), que cuenta con diversos algoritmos para manejar desde los problemas de optimización más comunes, hasta sistemas más complejos y a gran escala. Es posible resolver problemas con o sin restricciones en tiempo continuo o discreto, e incluye funciones para programación lineal, cuadrática y entera, optimización no lineal y algoritmos de solución a problemas multi-objetivo entre otras características. Lo anterior proporciona una base suficiente para la optimización del sistema de programación cuadrática planteado en el capítulo II, y que es materia de este trabajo de investigación.

---

(1) Información general sobre el producto puede ser obtenida en www.mathworks.com, y para detalles específicos sobre las herramientas para finanzas y optimización, los manuales pueden ser consultados y/o descargados en http://www.mathworks.com/help/toolbox/finance/ y http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/, respectivamente.

Como su nombre lo indica, los problemas de programación cuadrática involucran la optimización de una función cuadrática multivariada sujeta a fronteras y restricciones lineales. Para la solución de estos sistemas, Matlab incluye diversos algoritmos de solución tales como el de punto interior convexo, utilizado para nuestro problema donde la función objetivo es estrictamente convexa como se analizó en su momento.

El uso de la herramienta de optimización de Matlab requiere que los problemas sean planteados en forma matricial, y específicamente en la forma y sintaxis requeridas por la aplicación, de suerte que es necesario re-escribir el problema.

Así mismo, Matlab solo resuelve problemas de minimización y bajo el supuesto de que todas las desigualdades son de la forma $C(x) \leq 0$, de modo que de ser necesario, la función objetivo y aquellas las restricciones mayores que cero deberán ser modificadas cambiando su signo.

En Matlab, un problema de programación cuadrática en forma matricial consiste en encontrar un vector de soluciones $\boldsymbol{X}$, tal que minimice la función:

$\min_X \left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + f^T\boldsymbol{X}\right\}$	función objetivo (cuadrática)

sujeto a las restricciones lineales:

$\boldsymbol{AX} \leq \boldsymbol{b}$	restricción de desigualdades
$\boldsymbol{A_{eq}X} \leq \boldsymbol{b_{eq}}$	restricción de igualdades
$\boldsymbol{lb} \leq \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{ub}$	matriz restricciones de frontera, donde *lb* y *ub* son los límites inferior y superior para las variables de decisión.

De acuerdo al planteamiento anterior, las restricciones de nuestro problema de optimización deben ser escritas en forma de tres juegos de vectores y matrices: uno para las restricciones que involucran igualdades, otro para las desigualdades, y finalmente las restricciones que determinan el rango de los posibles valores del vector de solución.

Así pues, el problema de optimización para el modelo MVC descrito en el Capítulo II, consiste en encontrar la estrategia óptima que minimice la varianza del portafolio, de modo que resolviendo el sistema propuesto para x_i, y_i y v, podemos encontrar la estrategia de inversión óptima para valores del rendimiento esperado mínimo requerido d, y el valor en riesgo máximo aceptable z dados. El problema de optimización es:

Minimizar

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}$$

donde:

$\boldsymbol{X}$ es el vector que representa la estrategia $x_1,\ldots,x_n$, y
$\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas.

Sujeto a

$\sum_{j=1}^{n} x_i \mu_i \geq d$	Restricción rendimiento mínimo
$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{M} p_i y_i - v \leq z$	Restricción CVaR máximo portafolio
$y_i \geq v - \sum_{j=1}^{n} x_i R_{ij}$	Restricción CVaR por escenario
$\sum_{j=1}^{n} x_i = 1$	Restricción suma posiciones
$0 \leq x_i \leq 1,\, y_i \geq 0$	Restricciones de frontera

con

$i \in 1,\ldots,M$ y $j \in 1,\ldots,n$

donde

x_j , es la proporción a invertir en el activo “j”, con $j = 1,\ldots,n$;

R_{ij}, es el rendimiento esperado para el activo “j” en el escenario “i”;

μ_i, es el rendimiento esperado para el activo”i”,

α , es el nivel de confianza requerido;

M, el número de escenarios;

p_i, es la probabilidad correspondiente a cada escenario;

d, es el rendimiento mínimo requerido para el portafolio, y

z, es el valor en riesgo condicional mínimo requerido para la solución óptima.

Planteando el problema MVC en términos de los requerimientos de Matlab, con el vector de decisión $\boldsymbol{X} = [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_M, v]$ y rescribiendo la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$ de dimensión $(n\ x\ n)$ dentro de otra matriz cuadrada, $\boldsymbol{\Sigma}'$ de tamaño $(n + M + 1)\ x\ (n + M + 1)$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ ocupa la esquina superior izquierda y con ceros en el resto de la matriz, y haciendo $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Sigma}'$ y $f = 0$ en el problema de optimización $\min_X \left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + f^T\boldsymbol{X}\right\}$, podemos encontrar la solución para MVC, toda vez que al minimizar para $\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{X}$ se minimiza también para la varianza del portafolio $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}$.

Ahora bien, al construir la función objetivo de la manera anterior, las restricciones deberán ser acordes al vector $\boldsymbol{X}$, a la vez que es necesario definir dos matrices: una para las igualdades y otra para las desigualdades. Sin embargo, antes es necesario expresar nuevamente las restricciones del problema pues la aplicación supone siempre desigualdades del tipo “menor o igual” que cero. Así mismo, por simpleza se supondrá que cada escenario ocurre con una probabilidad $p_i = {}^{1}\!/_{M}$. Por lo tanto, las restricciones quedarán como sigue:

$-\sum_{j=1}^{n} x_i \mu_i \leq -d$	Restricción rendimiento mínimo
$\frac{1}{\alpha M}\sum_{i=1}^{M} y_i - v \leq z$	Restricción CVaR máximo portafolio
$-\sum_{j=1}^{n} x_i R_{ij} - y_i + v \leq 0$	Restricción CVaR por escenario
$\sum_{j=1}^{n} x_i = 1$	Restricción suma posiciones

Una vez expresado el sistema en los términos correctos, es posible construir una matriz con las restricciones que implican desigualdades y otra con la única igualdad como se muestra en la figura I.

Construyendo la matriz descrita, es posible utilizar las herramientas de optimización proporcionadas por Matlab y solucionar el problema de optimización mediante el código de programación presentado en el Anexo II del presente documento.

Es importante señalar que se ha utilizado la versión 2012a de Matlab, que permite el uso de distintos algoritmos para la solución de problemas de optimización, función que no está disponible en versiones anteriores de este sistema.

Figura I. Estructura de las matrices de restricción para la optimización del problema MVC en Matlab.

n+M+1 columnas

	x_1	x_2	x3	…	x_n	y_1	y_2	y_3	…	y_M	v		v

Matriz de igualdades

1	1	1	1	…	1	0	0	0	…	0	0	=	1

Matriz de desigualdades

M+2 filas

1	$-\mu_1$	$-\mu_2$	$-\mu_3$	…	$-\mu_n$	0	0	0	…	0	0	>=	-d
2	$-R_{11}$	$-R_{12}$	$-R_{13}$	…	$-R_{1n}$	-1	0	0	…	0	1	>=	0
3	$-R_{21}$	$-R_{22}$	$-R_{23}$	…	$-R_{2n}$	0	-1	0	…	0	1	>=	0
4	$-R_{31}$	$-R_{32}$	$-R_{33}$	…	$-R_{3n}$	0	0	-1	…	0	1	>=	0
.	.	.	.	…		.	.	.	…	.	.	>=	.
.	.	.	.	…		.	.	.	…	.	.	>=	.
.	.	.	.	…		.	.	.	…	.	.	>=	.
M+1	$-R_{M1}$	$-R_{M2}$	$-R_{M3}$	…	$-R_{Mn}$	0	0	0	…	-1	1	>=	0
M+2	0	0	0	…	0	$1/\alpha M$	$1/\alpha M$	$1/\alpha M$		$1/\alpha M$	-1	>=	z

Otra característica de Matlab, es que cuenta con funciones expresas para la construcción de fronteras eficientes mediante el modelo de media-varianza[2], lo que permite contrastar fácilmente los resultados obtenidos con el modelo MVC contra el enfoque tradicional de Markowitz.

Así mismo, Matlab incluye otra función para obtener el punto de tangencia entre la curva de indiferencia y una frontera eficiente dados los puntos que la componen y un índice de aversión a riesgo específico como se indicó en el capitulo II[3].

Considerando la lógica descrita en la construcción de las matrices necesarias para codificar el modelo MVC de acuerdo a los requerimientos de Matlab, y utilizando las funciones especiales para la selección de carteras de inversión con que cuenta dicho programa, se diseño un código en lenguaje M, que a partir de una base de datos de precios diarios de longitud variable con “m” escenarios históricos para “n” activos en formato CSV[4], la tasa libre de riesgo, el valor en riesgo condicional máximo, el índice de aversión a riesgo requerido y el número de portafolios a calcular, se obtienen las fronteras eficientes y portafolios óptimos bajo los enfoques de media-varianza y media-varianza-valor en riesgo condicional, lo que permite validar el modelo descrito en este trabajo de investigación.

Es importante señalar que se requiere tener instalada la versión 7.14. o superior de Matlab para que el programa pueda ser ejecutado en condiciones normales debido al algoritmo específico que utiliza el motor de cálculo.

---

(2) Como parte de la caja de herramientas financieras (*Financial Toolbox*), Matlab incluye la función “*frontcon*”, mediante la cual se obtiene en un solo paso la frontera eficiente para un conjunto de activos dadas la matriz de covarianzas y sus rendimientos esperados.

(3) La función “*portallloc*” de la caja de herramientas financieras (*Financial Toolbox*) calcula el punto de tangencia entre la curva de indiferencia de un inversionista a partir de su índice de aversión al riesgo, y la frontera eficiente dados diversos puntos de la misma (riesgo – rendimiento) y la composición de cada uno de dichos portafolios.

(4) Los archivos CSV (*Comma Separated Values*) son un tipo de documento en formato abierto para representar datos en forma de tabla, en que las columnas se separan por comas y los renglones por saltos de línea. Este formato de archivo es muy popular debido a su compatibilidad con diversos manejadores de bases de datos y hojas de cálculo comerciales.

En la figura A-1 se presenta esquemáticamente la relación entre las entradas y salidas del sistema desarrollado en el que se ha realizado el análisis mostrado en esta investigación, por lo que para contar con el debido soporte el código se presenta por separado en el Anexo II de este documento. En dicho código se han incluido los comentarios necesarios para su comprensión.

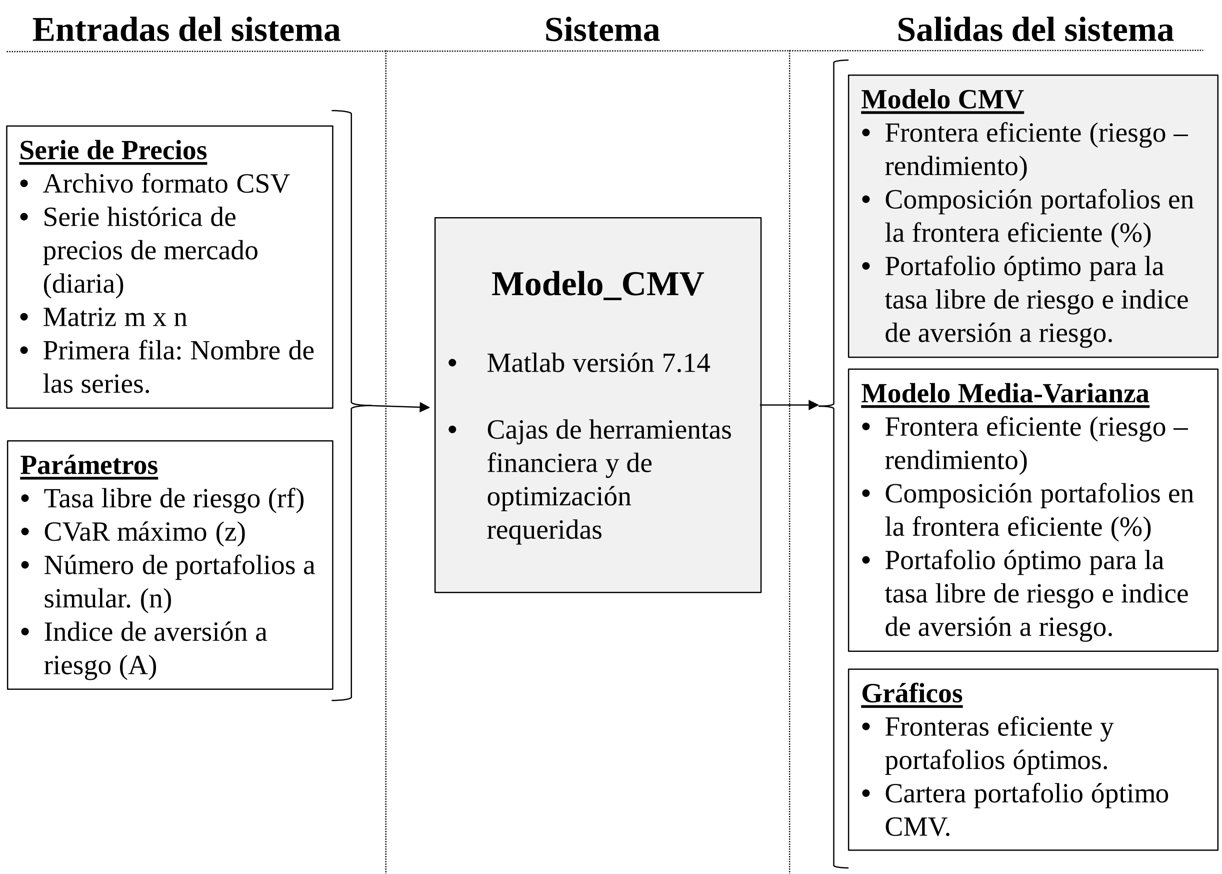


Figura A-1. Flujo de información del programa en Matlab

Finalmente, al final de este apéndice se muestran también los Figuras A-1 y A-2 donde se pueden observar ejemplos de las Figuras proporcionadas por el sistema para el caso de la frontera eficiente, y la composición de la cartera óptima correspondiente al grado de aversión al riesgo indicado previamente..

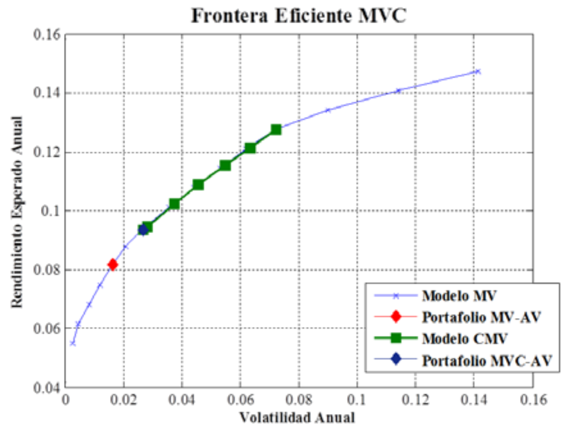


Figura A-1. Frontera eficiente construida mediante el Modelo MVC en Matlab

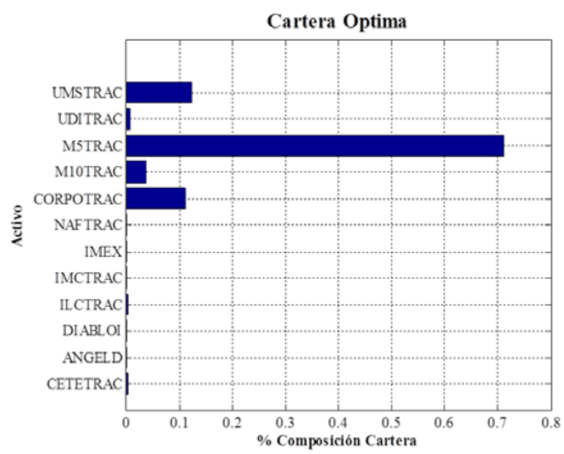


Figura A-2. Composición de cartera óptima para el Modelo MVC en Matlab

A N E X O I
TITULOS REFERENCIADOS A ACCIONES EMITIDOS EN MÉXICO

Clave de la emisora	Razón Comercial	Razón social	Operador	Subyacente	Descripción	Tipo
ANGELD	Smartshares - ANGELD	EVERCORE CASA DE BOLSA, S.A. DE C.V.	Smartshares	BBBOL, doble IPC	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización	Apalancado 2X
BRTRAC*	BRTRAC	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	Brasil15	15 emisoras brasileñas (ADR) con mayor capitalización en el SIC	Fisico, Réplica total
CETETRC	iShares LATixx Mexico CETETRC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - DJ LATixx CETES Index	ishares	Dow Jones LATixxx Mexico Government Cetes Index	Ponderado Certificados de la Tesorería de la Federación en circulación	Fisico, Réplica total
CHNTRAC*	CHNTRAC	NACIONAL FINANCIERA S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	China SX20	20 emisoras chinas (ADR) con mayor capitalización en el SIC	Fisico, Réplica total
CONSTRU*	BBVA- BMV México Construye RT TRAC	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV-Construye RT	Muestra de empresas del sector construcción cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora	Fisico, Réplica total
CONSUMO*	BBVA-BMV México Consumo Frecuente RT TRAC	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV México Consumo Frecuente	Muestra de empresas del sector consumo cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora	Fisico, Réplica total
CORPTRC	iShares Mexico Corporate Bond TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - VLMR	ishares	VLMR CORPOTRAC	Portafolio ponderado con emisiones de bonos corporativos AAA, AA y A en circulación	Fisico, Réplica total
DIABLOI	Smartshares - DIABLOI	PROTEGO CASA DE BOLSA, S.A. DE C.V.	Smartshares	DIBOL, inverso IF	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización	Apalancado -1X
ENLACE	BBVA- BMV México Enlace RT TRAC	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Casa de Bolsa BBVA Bancomer	BMV México Enla	Muestra de empresas del sector comunicaciones y transportes cotizadas en la BMV ponderadas por capitalizacón y un máximo de 12% por emisora	Fisico, Réplica total

Clave de la emisora	Razón Comercial	Razón social	Operador	Subyacente	Descripción	Tipo
ICMTRAC	iShares IRT CompMx Total Return TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - IRT COMPMX	ishares	Indice IPC CompMX de Retorno Total	Muestra de 60 emisoras de la BMV seleccionadas por valor de capitalización y rotación.	Fisico, Réplica total
IHBTRAC*	iShares HABITA Total Return TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. INDICE HABITA RT	ishares	IHB		Fisico, Réplica total
ILCTRAC	iShares IRT LargeCap Total Return TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - IRT LARGE CAP	ishares	IPC LargeCap	Indice compuesto por las 20 emisoras de mayor capitalizacón de la BMV.	Fisico, Réplica total
IMCTRAC	iShares IPC MidCap Total Return TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. IRT IPC MIDCAP	ishares	IPC MidCap	Indice compuesto por la2 20 emisoras entre los lugares 21 y 40 del índice IPC CompMx de retorno total	Fisico, Réplica total
IMXTRAC	iShares INMEX Total Return TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. INDICE INMEX RT	ishares	INMEX	Indice con las 20 empresas de mayor capitalizacíon en la BMV con un ponderación máxima del 10% por emisora.	Fisico, Réplica total
M10TRAC	iShares LATixx Mexico M10TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - DJ LATixx BONOS 5-10 year Index	ishares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 5-10 Year Index	Portafolio de bonos de tasa fija con duracón de 5 a 10 años emitidos por el gobierno federal	Fisico, Réplica total
M5TRAC	iShares LATixx Mexico M5TRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - DJ LATixx BONOS 1-5 year Index	ishares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government BONOS 1-5 Year Index	Portafolio de bonos de tasa fija con duracón de 1 a 5 años emitidos por el gobierno federal	Fisico, Réplica total
MEXTRAC	RENTABLE	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	Bancomer - Nafin	BMV Rentable	20 emisoras con mayor bursatilidad en la BMV	Fisico
NAFTRAC	Ishares NAFTRAC	NACIONAL FINANCIERA, S.N.C., INSTITUCION DE BANCA DE DESARROLLO	ishares	IPC	35 Empresas cn mayor capitalización en la BMV. Ponderado por capitalización	Fisico, Réplica total
UDITRAC	iShares LATixx Mexico UDITRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - DJ LATixx UDIS Index	ishares	Dow Jones LATixx Mexico M5TRAC Government UDIS Index	Portafolio de bonos de tasa real, denominados en unidades de inversión a cargo del gobierno federal	Fisico, Réplica total
UMSTRAC	iShares LATixx Mexico UMSTRAC	BANCO NACIONAL DE MEXICO, S.A. I.B.M. - DJ LATixx UMS Index	ishares	Dow Jones LATixx Mexico Government UMS Index	Portafolio de bonos de deuda soberana UMS a cargo del gobierno federl	Fisico, Réplica total

A N E X O II
CODIGO PROGRAMACION DEL MODELO MVC EN MATLAB

```
clearvars;
[precios, encabezado] =
xlsread('C:\Users\ADELMORAL\Documents\MATLAB\PRECIOS.xlsx','Hoja1');
clearvars raw;
% Variables Fijas
NumPort = 15; rf = 0.045/252; rc= 0.10/252; A = 3; d= 0.11300;
dimension = size(precios);
m = dimension(1)-1; n=dimension(2); alfa=0.01; a=round(alfa*m);
mediavar=zeros(NumPort,n+4);
serie = zeros(m,2);
bandera = 0;
% Constuccion matrices de rendimientos y covarianzas (varcovar) para n
% activos y m escenarios
rendimientos = tick2ret(precios);
r_promedio=mean(rendimientos);
for i = 1:n
        dife(:,i)=rendimientos(:,i)-r_promedio(i);
        bb = rendimientos(:,i); bb=sort(bb);
        cv(1,i) = r_promedio(i); cv(2,i)=std(rendimientos(:,i)); cv(3,i)=
bb(a); cv(4,i)= mean(bb(1:a));
end
varcovar =(dife'*dife)*(1/m); %matriz covarianzas diaria
% construccion de frontera eficiente por modelo de Media-Varianza
[PortRisk, PortReturn, PortWts] = frontcon(r_promedio,varcovar,NumPort);
[RiskyRisk, RiskyReturn, RiskyWts] = portalloc(PortRisk, PortReturn,
PortWts,rf, rc,A);
% Modelo de optimizacion y construccion de frontera eficiente
for k=1:NumPort
    r=PortReturn(k);
    % inicializar funcion objetivo
    Covarianza = zeros(m+n+1, m+n+1); Covarianza(1:n,1:n)=varcovar;
    c = zeros(m+n+1,1);
    % Construccion matriz igualdades
    Aeq = zeros(1,n+m+1);Aeq(1:n)=1; beq = 1;
    % Construccion matriz desigualdades
    Aineq = zeros(m+2,m+n+1);
    Aineq(1,1:n)=-r_promedio';
    Aineq(2:m+1,1:n)=-rendimientos;
    Aineq(2:m+1,n+1:n+m)=-eye(m);
    Aineq(2:m+1,n+m+1)=ones(m,1);
    Aineq(m+2,n+1:m+n)= 1/(alfa*m);
    Aineq(m+2,m+n+1)=-1;
    bineq=zeros(m+2,1);
```

```
    bineq(1,1)=-r; bineq(m+2,1)= d;
    % Limites variables decisión
     lb = zeros(m+n,1); ub=ones(n,1);
    % Optimizacion
    options = optimset('Algorithm','interior-point-convex');
    options = optimset(options,'Display','off','TolFun',1e-10);
    [x1,fval1, exitflag] =
quadprog(Covarianza,c,Aineq,bineq,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
    % Guardar resultados
    if exitflag == 1
        x = x1(1:n);
        rpor=rendimientos*x;
        bb=sort(rpor); cvar = mean(bb(1:a));
        mediavar(k,1)=(r_promedio*x); mediavar(k,2)= sqrt(x'*varcovar*x);
mediavar(k,3)=cvar; mediavar(k,4)= (mediavar(k,1)-rf)/mediavar(k,2);
mediavar(k,5:n+4)=x';
     else
        if bandera == 0
            tt = k;
        end
        bandera = 1;
        mediavar(k,1)= mediavar(k-1,1); mediavar(k,2)=mediavar(k-1,2);
    end
end
if bandera == 0
    tt = 15;
end


serie(:,2) = rendimientos*x;
serie(1,1)= 1; serie(1,2)= 100;
for i=2:m
    serie(i,1)=i; serie(i,2)=serie(i-1,2)*(1+serie(i,2));
end

% Crear Graficos
figure1 = figure('Color',...
    [0.831372559070587 0.815686285495758 0.7843137383461]);
axes1 = axes('Parent',figure1,'YGrid','on','XGrid','on',...
    'Position',[0.131767109295199 0.11 0.773232890704802
0.778888888888889],...
    'FontName','Times New Roman');
box(axes1,'on');
hold(axes1,'all');
plot(PortRisk*sqrt(252),
PortReturn*252,'Parent',axes1,'Marker','x','LineWidth',1,...
    'DisplayName','Modelo MV');
hold on;
plot(RiskyRisk*sqrt(252),RiskyReturn*252,'Parent',axes1,'MarkerFaceColor',[
1 0 0],'MarkerSize',8,...
   'Marker','diamond',...
```

```
   'Color',[1 0 0],...
   'DisplayName','Portafolio MV-AV');
plot(mediavar(:,2)*sqrt(252),
mediavar(:,1)*252,'Parent',axes1,'MarkerFaceColor',[0 0.498039215803146
0],...
   'Marker','square',...
   'LineWidth',2,...
   'Color',[0 0.498039215803146 0],...
   'DisplayName','Modelo CMV');
xlabel({'Volatilidad Anual'},'FontWeight','bold','FontName','Times New
Roman');
ylabel({'Rendimiento Esperado Anual'},'FontWeight','bold','FontName','Times
New Roman');
title({'Frontera Eficiente
MVC'},'FontWeight','bold','FontSize',14,'FontName','Times New Roman');
legend1 = legend(axes1,'show');
set(legend1,...
   'Position',[0.695947625944761 0.15261437908497 0.185905224787363
0.17843137254902],...
   'FontWeight','bold');


figure3 = figure;
axes3 = axes('Parent',figure3,'YGrid','on','XGrid','on');
box(axes3,'on');
hold(axes3,'all');
plot(serie(:,end),'LineWidth',2,'DisplayName','serie(:,end)');
xlabel('Tiempo','FontWeight','bold');
ylabel('Rendimiento','FontWeight','bold');
title({'Desempeño Portafolio seleccionado'},'FontWeight','bold',...
    'FontSize',12);

clear dife i j k dimension Aeq Aineq a b bb beq bineq c d lb options ub x
x1 RiskyFraction OverallRisk OverallReturn;
clear fval1 legend1 r bandera tt A NumPort alfa axes1 axes2 axes3 cvar
exitflag figure1 figure2 figure3 m n rf rpor;
clear rc;
```

A N E X O III
CARACTERISTICAS DE LOS ESCENARIOS DE CRÍSIS SIMULADOS

Los escenarios de las cinco crisis más importantes de los últimos años han sido simulados utilizando el sistema ARA (*Algo Risk Application*) que ha sido desarrollado por la empresa canadiense *Algorithmics*, y cuya distribución y adecuación para el mercado mexicano corresponde a la empresa Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S.A. de C.V., también conocida como Valmer, perteneciente al Grupo Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V.

Esta aplicación es utilizada por diversos intermediarios financieros en la gestión de riesgos de sus portafolios, y entre características, replica escenarios de crisis de los mercados financieros, simulando el comportamiento de carteras dichas condiciones.

El sistema es capaz de replicar los cinco escenarios que se describen brevemente a continuación, en orden cronológico.

1. Crisis mexicana, 1994

La crisis económica de México de 1994, fue provocada por la fuga de reservas internacionales como resultado de la incertidumbre generada por diversos acontecimientos que tuvieron lugar en aquel año. Esto ocasionó la devaluación del peso durante los primeros días del sexenio de Ernesto Zedillo.

En 1994, el último año del sexenio de Carlos Salinas de Gortari, hubo importantes emisiones de Tesobonos, un tipo de instrumento con cargo al gobierno federal, que aseguraba su pago en dólares americanos en vez de pesos mexicanos.

El 1 de diciembre de dicho año, las reservas del Banco de México eran claramente escasas para solventar los pasivos de corto plazo. La situación había sobrepasado la esfera de la cuenta corriente y la sobrevaluación del peso. Las consecuencias de esta crisis se denominaron “Efecto Tequila”.

La devaluación del peso desencadena la huida de capitales y el derrumbe del mercado financiero. En un día la banda de intervención de tipo de cambio se movió 15%, sin poder mantenerla, por lo que a principios de 1995 el gobierno de Zedillo decide establecer el sistema de libre flotación del peso.

Tan sólo en el periodo del 15 al 30 de diciembre de 1994, la tasa primaria de Cetes de 28 días subió de 13.75% a 31%, mientras que el tipo de cambio peso-dólar aumentó de 3.4606 a 4.995.

En marzo de 1995, el tipo de cambio ya había acumulado un incremento de más del 100%, y la tasa de Cetes a 28 días llegó a 69.54%, mientras que el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores registraba una caída acumulada del 54%.

2. Crisis asiática, 1997

La crisis financiera en Asia Oriental comenzó el 2 de julio de 1997 con la devaluación de la moneda Thailandesa, el Bath. Esto ocasionó un efecto dominó sobre las economías de la región, provocando devaluaciones en Malasia, Indonesia y Filipinas, que más tarde repercutieron también en Taiwan, Hong Kong y Corea del Sur.

Lo que parecía ser una crisis regional, se difundió rápidamente a occidente causando importantes caídas en todas las bolsas de valores del mundo, lo que se denominó el “Efecto Dragón”.

Con la primera gran crisis de la globalización, en México, del 15 de octubre al 5 de noviembre de 1997, la moneda se depreció de 7.70 a 8.80 pesos por dólar americano, la tasa primaria de los Cetes de 28 días aumentó de 17.92% a 20.16%, mientras que el IPC cayó un 10%, para pasar de 5,341 a 4,823 puntos.

3. Crisis rusa, 1998

La crisis financiera en Rusia, es marcada por una enorme devaluación del Rublo, y el descenso de los precios del petróleo ayudó a debilitar aún más la moneda. El 13 de agosto de 1998 el bono ruso y los mercados bursátiles colapsaron como consecuencia del temor de los inversionistas de que el gobierno ruso se negara a pagar la deuda doméstica.

Esta crisis, se produce en el contexto del comienzo de una desaceleración económica mundial. La fuga de capitales especulativos dio origen a lo que se conoce como "Efecto Vodka".

En particular, en México, el tipo de cambio aumentó un 11%, al pasar de 9.3018 a 10.3158, mientras que la tasa primaria de los Cetes de 28 días aumentó severamente de 21.49% a 47.86%, mientras que el IPC disminuyó un 4%.

4. Crisis 11 de septiembre de 2001

Los atentados terroristas del 11 de septiembre de 2001 no representan en sí una crisis financiera, sin embargo, su impacto en los mercados financieros fue generalizado.

Del 11 al 17 de septiembre los mercados de los Estados Unidos permanecieron cerrados, y a su apertura, el índice Dow Jones había perdido 7.1% en un solo día, y al final de la semana, la caída acumulaba ya 14.3%; a su vez, el IPC en el mismo periodo bajó 9.21%.

Así mismo, el índice S&P500 tuvo un descenso del 5%; y en Europa, el índice DAX de la bolsa alemana bajó 9% y el Euro aumentó de 0.90 a 0.92 dólares. En Japón el Nikkei 225 cayó 7%, mientras que el Yen cotizó de 121 a 118 yenes por dólar.

5. Crisis hipotecaria de Estados Unidos, 2008

En el 2001 se produjo una huida de capitales en dirección a los bienes inmuebles, ya que los tipos de interés fijados por la Reserva Federal de los Estados Unidos eran inusualmente bajos, con el objeto de reactivar el consumo y la producción a través del crédito. La combinación de ambos factores dio lugar a una burbuja inmobiliaria fundamentada en una enorme liquidez.

En el 2004, la Reserva Federal se vio obligada a subir los tipos de interés, pasando del 1% al 5.25% para el 2006. En ese año, la crisis inmobiliaria se había trasladado ya al mercado financiero, y el índice de construcción estadounidense cayó un 40%.

Tras varios meses de debilidad, el problema de la deuda hipotecaria “sub-prime” colapsó entre 2007 y 2008, causando la quiebra de medio centenar de bancos y entidades relacionadas con el mercado de las hipotecas inmobiliarias, como el banco de inversión Lehman Brothers y la aseguradora AIG.

En México, en el periodo de septiembre a octubre de 2008, el tipo de cambio se depreció un 25%, el IPC disminuyó 45%, y la tasa de mercado del bono más liquido de deuda gubernamental, con vencimiento en diciembre de 2024 pasó de 8.51% a 11.38%.