

UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ECEE
MAESTRÍA EN GESTIÓN DE RIESGO
INCORPORADA A LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
PÚBLICA RVOE 2007252

**“VALUACIÓN DE OPCIONES BARRERA SOBRE
ACCIONES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS: ÁRBOLES
BINO-TRINOMIALES Y SIMULACIÓN MONTE CARLO”**

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN GESTIÓN DE RIESGO

PRESENTA:
EZEQUIEL UGALDE ORTEGA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. FERNANDO CRUZ ARANDA

MÉXICO, D.F.

2012

A Martha, por su invaluable apoyo moral.

Agradecimientos

El entusiasmo transmitido por el Dr. Fernando Cruz Aranda durante sus clases relacionadas a los procesos estocásticos y productos derivados contribuyó en mi interés en dichos temas; aunado a ello, durante su dirección al presente trabajo, siempre permitió dar rienda suelta a mi curiosidad y creatividad, muchas gracias Doctor.

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Francisco Ortiz Arango por sus valiosas aportaciones y comentarios.

Humildemente agradezco a Dios, fuente incansable de Sabiduría y Paz.

A Martha por su confianza y fe en mí, lo cual ha contribuido a mi desarrollo como profesionista pero aún más como ser humano.

A Fernando por volverme a enseñar la importancia de las actividades lúdicas y de las sonrisas.

A mis Padres.

Mi eterno agradecimiento a la familia Salgado Ceballos: Hermelinda, Meli, Mimí y Cris.

Mi más profundo agradecimiento a la Familia Guzmán Arenas por sus ánimos y su confianza.

A mis grandes maestros M. en C. Lourdes Velasco Arregui, M. D. U. Gerardo Velasco Trujano y Quim. Guillermo Barraza Ortega; que su legado continúe y se fortifique.

A la Dra. María Del Rocío Elizondo Camejo, cuyos comentarios y experiencias me impulsaron a emprender este reto.

A la Dra. Elisa Yamazaki Tanabe, un profundo reconocimiento a su interés en mi desarrollo.

Contenido

Índice de cuadros y figuras	v
Índice de cuadros	v
Índice de figuras	vii
Resumen	xii
Introducción	1

Capítulo 1.....5

Modelos de valuación de opciones en tiempo discreto.....5

1.1 Los árboles binomiales.....	5
1.1.1 Modelo binomial de un solo paso.....	5
1.1.2 Valuación de un instrumento derivado utilizando el modelo binomial de un solo paso.....	8
1.1.3 Análisis del cociente “ q ”, Cox, Ross y Rubinstein (1979)	11
1.1.4 Modelo binomial de un solo paso: precio de un forward y de una opción de compra	13
1.1.5 Incrementos y decrementos proporcionales al precio inicial S_0	16
1.1.6 Árbol binomial o modelo binomial de varios pasos.....	18
1.1.7 Árbol recombinantes	21
1.1.8 El modelo Cox, Ross y Rubinstein (1979) o la incorporación de la volatilidad de la acción al modelo	23
1.2 Modelos en tiempo continuo.....	24
1.2.1 Procesos estocásticos	24
1.2.2 Procesos estocásticos en tiempo continuo.....	24

Capítulo 2.....29

Opciones Barrera.....29

2.1. Definiciones.....	29
2.2 Tipos de opciones barreras	30
2.3 Paridad In-Out.....	31
2.4 Árboles y opciones con barrera	33

2.4.1 Tipos de error al emplear árboles binomiales (error de cuantificación y error de especificación).....	33
2.4.2 Método binomial para opciones con barrera (Modelo CRR)	35
2.4.3 Método Derman para opciones con barrera	39
2.4.4 Método de árboles bino-trinomiales (BTT) para opciones con barrera	41
2.5 Valuaciones por medio de simulaciones Monte Carlo.....	46
2.5.1 Generadores de números pseudo-aleatorios (GNPA).....	47
2.5.2 Familias de generadores de números pseudo-aleatorios (GNPA).....	49
2.5.3 Aplicación de las simulaciones Monte Carlo en la valuación de opciones europeas tipo call.....	53
2.6. Valuaciones por medio de simulaciones Monte Carlo de opciones con barrera.....	57
2.6.1 Método Monte Carlo en la valuación de opciones con barrera	57
2.6.2 Método Monte Carlo Condicional en la valuación de opciones con barrera.....	58
2.7. Fórmulas cerradas para la valuación de opciones con barrera.....	60
Capítulo 3.....	62
Implementación de procedimientos numéricos para la valuación de opciones con barrera	62
3.1. Procedimientos numéricos utilizando árboles en la valuación de opciones con barrera	62
3.1.1. Valuación de opciones con barrera utilizando CRR	65
3.1.2. Valuación de opciones con barrera utilizando el Método Derman	67
3.1.3. Valuación de opciones con barrera utilizando el Método BTT	69
3.1.4. Comparación entre modelos (ejemplos numéricos)	73
3.2. Procedimientos numéricos utilizando simulaciones Monte Carlo en la valuación de opciones con barrera.....	80
Capítulo 4.....	84
Análisis del rendimiento de los métodos basados en árboles	84
4.1. Análisis del orden de convergencia al valuar opciones de compra “plain vanilla” ..	84
4.2. Análisis del orden de convergencia al valuar opciones con barrera.....	86
4.3. Análisis del costo computacional.....	91

4.4. Análisis de la estabilidad	96
Conclusiones	103
Abreviaturas y nomenclaturas.....	107
Glosario	108
Bibliografía.....	112
Apéndice 1. Desarrollo algebraico para la determinación del valor de un forward.....	116
Apéndice 2. Desarrollo algebraico para la determinación del valor interpolado $V(D)$ de acuerdo a la distancia entre la barrera especificada y las barreras efectiva y modificada.	118
Apéndice 3. Código de MatLab y SciLab utilizando el modelo BSM para valuar una opción donde el subyacente es una acción que no paga dividendos.....	120
Apéndice 4. Código de MatLab y SciLab del modelo CRR para obtener el valor de una opción, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos	121
Apéndice 5. Código de MatLab y SciLab para valuar opciones con barrera, usando fórmulas cerradas	123
Apéndice 6. Código de MatLab y SciLab del modelo CRR para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos	127
Apéndice 7. Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3001 a 3100	130
Apéndice 8. Código de MatLab y SciLab del Método Derman para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos	132
Apéndice 9. Código de MatLab y SciLab del Método BTT para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos	136
Apéndice 10. Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1800 a 2000	140
Apéndice 11. Errores absolutos generados por los Métodos CRR, Derman y BTT para 500, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 y 2100 pasos	141

Apéndice 12. Código de MatLab y SciLab para el Método Monte Carlo.....	142
Apéndice 13. Código de MatLab y SciLab para el Método Monte Carlo Condicional	144
Apéndice 14. Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente, el tiempo de maduración y de la barrera superior en una opción up-and-out utilizando el Método BTT y el Método Derman	147

Índice de cuadros y figuras

Índice de cuadros

Cuadro 2.1 <i>Función del valor final de opciones call con barrera.....</i>	35
Cuadro 2.2 <i>Función del valor de la opción con barrera en cada nodo del árbol, empleando el método CRR.....</i>	37
Cuadro 2.3 <i>Fórmulas analíticas para la valuación de opciones de compra con barrera.....</i>	60
Cuadro 2.4 <i>Fórmulas analíticas para la valuación de opciones de venta con barrera.....</i>	61
Cuadro 3.1 <i>Principales indicadores descriptivos de los resultados obtenidos al usar los Métodos CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000.....</i>	72
Cuadro 3.2 <i>Cuadro comparativo de los precios, al variar el número de pasos “N”, al aplicar los métodos CRR, Derman y BTT a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.....</i>	73
Cuadro 3.3 <i>Cuadro comparativo de los errores, al variar el número de pasos “N”, al aplicar los métodos CRR, Derman y BTT a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.....</i>	74
Cuadro 3.4 <i>Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; por medio de los métodos CRR, Derman y BTT, variando el número de pasos “N”.....</i>	75
Cuadro 3.5 <i>Cuadro comparativo de los precios al aplicar los métodos Derman y BTT a una opción up-and-out variando la volatilidad y el precio de ejercicio, manteniendo fijas $S= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$ y con 1,000 pasos.....</i>	79
Cuadro 3.6 <i>Resultados de aplicar el Método Monte Carlo para la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.....</i>	81

Cuadro 3.7 <i>Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; aplicando el Método Monte Carlo.....</i>	82
Cuadro 3.8 <i>Resultados de aplicar el Método Monte Carlo Condicional para la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.....</i>	82
Cuadro 3.9 <i>Cuadro comparativo de los precios, al variar el número de revisiones “N” y el número de simulaciones a generar, al aplicar los Métodos Monte Carlo y Condicional a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.....</i>	83
Cuadro 3.10 <i>Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; aplicando el Método Monte Carlo Condicional.....</i>	83
Cuadro 4.1 <i>Partición “N” a partir de la cual los errores, al emplear el método CRR, se encuentran por debajo de la cota, utilizando una k igual a uno.....</i>	87
Cuadro 4.2 <i>Partición “N” a partir de la cual los errores, al emplear el método BTT, se encuentran por debajo de la cota, utilizando una k igual a uno.....</i>	89
Cuadro 4.3 <i>Tasas de convergencia ρ de los Métodos, considerando particiones superiores a 100.....</i>	90
Cuadro 4.4 <i>Tiempo empleado al encontrar la mejor estimación, y la partición “N” correspondiente del intervalo del tiempo de vencimiento de la opción.....</i>	92
Cuadro 4.5 <i>Características descriptivas de los errores absolutos, con respecto al costo computacional, al utilizar el método Derman.....</i>	95
Cuadro A11.1 <i>Tiempo computacional, en segundos, errores absolutos, MAE y RMSE generados al valuar una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, barrera de 125, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; por medio de los métodos CRR, Derman y BTT, variando el número de pasos iguales a 500, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 y 2100.....</i>	141

Índice de figuras

Figura 1.1 Representación del cambio en el precio de una acción conforme al modelo binomial de un solo paso.....	5
Figura 1.2 Representación del modelo binomial de un solo paso.....	7
Figura 1.3 Representación del modelo binomial de un solo paso con incrementos y decrementos proporcionales al precio inicial S_0	17
Figura 1.4 Representación del modelo binomial de tres pasos.....	19
Figura 1.5 Representación del modelo binomial recombinante de tres pasos.....	22
Figura 1.6 Representación del modelo binomial recombinante de tres pasos, considerando $ud=1$	22
Figura 2.1 Ejemplificación gráfica del comportamiento del precio de un subyacente con respecto a sus barreras.....	30
Figura 2.2 Barrera efectiva vs. barrera especificada o contractual.....	34
Figura 2.3 Representación del valor de la opción con barrera en cada nodo del árbol considerando las alternativas del precio del activo subyacente.....	37
Figura 2.4 Ejemplo de un árbol binomial, de siete pasos, para la valuación de una opción call up-and-out con precio de ejercicio “K” y barrera knockout (o barrera especificada) igual a S_H	38
Figura 2.5 Ejemplo para la interpolación del valor de la opción para la barrera especificada “B”.....	41
Figura 2.6 Árbol bino-trinomial (BTT) con barreras “H” y “L”. El precio inicial de S_0	42
Figura 2.7 Trayectorias generadas por el Método Monte Carlo para un subyacente con precio inicial, S_0 , de 50, μ de 0.1, y, σ de 0.3.....	55
Figura 3.1 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra tipo europea.....	63
Figura 3.2 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra tipo europea, con partición del periodo del tiempo en	

<i>milésimas</i>	64
Figura 3.3 <i>Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea</i>	65
Figura 3.4 <i>Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 100 a 2000</i>	66
Figura 3.5 <i>Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1 a 100</i>	67
Figura 3.6 <i>Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 100 a 2000</i>	68
Figura 3.7 <i>Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1500 a 2000</i>	69
Figura 3.8 <i>Resultados obtenidos al usar el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1 a 100</i>	70
Figura 3.9 <i>Resultados obtenidos al usar el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000</i>	71
Figura 3.10 <i>Histograma de los resultados proporcionados por el CRR y el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000</i>	72
Figura 3.11 <i>Resultados de la valuación de una opción de compra up-and-out tipo europea, proporcionados por el Método Derman, el Método BTT y las fórmulas cerradas (FC), variando el precio inicial “S” del activo subyacente</i>	76
Figura 3.12 <i>Errores relativos al valorar una opción de compra up-and-out tipo europea, proporcionados por el Método BTT y el Método Derman, variando el precio inicial “S” del activo subyacente</i>	78
Figura 4.1 <i>Convergencia del modelo CRR con respecto al modelo BSM. Considerando una partición del periodo del tiempo de 1 a 200</i>	86

Figura 4.2 <i>Convergencia de los errores absolutos utilizando el modelo CRR con respecto al resultado de la fórmula cerrada.....</i>	<i>87</i>
Figura 4.3 <i>Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método Derman con respecto al resultado de la fórmula cerrada.....</i>	<i>88</i>
Figura 4.4 <i>Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método BTT con respecto al resultado de la fórmula cerrada.....</i>	<i>90</i>
Figura 4.5 <i>Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método Derman, contrastados con cotas con tasas de convergencia $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{11}$.....</i>	<i>91</i>
Figura 4.6 <i>Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el modelo CRR.....</i>	<i>93</i>
Figura 4.7 <i>Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el modelo BTT.....</i>	<i>94</i>
Figura 4.8 <i>Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el Método Derman.....</i>	<i>95</i>
Figura 4.9 <i>Variabilidad de los errores absolutos, con respecto a su media por intervalo de costo computacional, para los métodos CRR, Derman y BTT.....</i>	<i>97</i>
Figura 4.10 <i>Variabilidad de los errores absolutos, con respecto a su media por intervalo de costo computacional, para el Método Derman.....</i>	<i>97</i>
Figura 4.11 <i>Precios para una opción up-and-out de compra, tipo europeo; con diferentes precios iniciales del subyacente y diversos tiempos de maduración, con una volatilidad del 20%, precio de ejercicio de 100 y una barrera de 125.....</i>	<i>98</i>
Figura 4.12 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método CRR.....</i>	<i>99</i>
Figura 4.13 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT.....</i>	<i>100</i>
Figura 4.14 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción</i>	

<i>up-and-out utilizando el Método Derman.....</i>	101
Figura 4.15 <i>Resumen gráfico del análisis de los resultados proporcionados por los métodos CRR, BTT y Derman.....</i>	102
Figura A2.1 <i>Ejemplo para la interpolación del valor de la opción para la barrera especificada “B”.....</i>	119
Figura A7.1 <i>Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3000 a 3100.....</i>	130
Figura A7.2 <i>Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3075 a 3089.....</i>	131
Figura A10.1 <i>Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1800 a 2000.....</i>	140
Figura A14.1 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 105.....</i>	147
Figura A14.2 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 110.....</i>	148
Figura A14.3 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 115.....</i>	148
Figura A14.4 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 120.....</i>	149
Figura A14.5 <i>Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 105.....</i>	149

Figura A14.6 *Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 110.....150*

Figura A14.7 *Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 115.....150*

Figura A14.8 *Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 120.....151*

Resumen

El objetivo general del trabajo es: analizar y determinar la convergencia, el costo computacional, así como la estabilidad y la calidad de los resultados proporcionados por los métodos basados en árboles binomiales y bino-trinomiales para la valuación de opciones con barrera, sobre acciones que no pagan dividendos, contrastando los resultados con los obtenidos por medio de fórmulas cerradas y simulaciones Monte Carlo y Monte Carlo Condicional. Es decir, se analizarán las ventajas y desventajas al aplicar los métodos discretos a un fenómeno en tiempo continuo.

A lo largo del trabajo se examina la teoría que sustenta los métodos y posteriormente, debido a la naturaleza analítica del estudio, emplear técnicas numéricas para la valuación de las opciones, además del uso de software científico para su implementación, en particular MatLab y SciLab.

Así mismo, el conocimiento de las ventajas y desventajas en los métodos de valuación, basados en árboles y simulaciones Monte Carlo, fomentará el uso de este tipo de opciones en el creciente mercado de derivados de México.

Introducción

El avance de en la ingeniería financiera ha permitido crear productos derivados más sofisticados. Tal es el caso de las opciones, las cuales han evolucionado de los tradicionales productos “plain vanilla” hacia contratos que cubren nuevas necesidades de clientes o, en su defecto, son producto de la inventiva de los especialistas financieros, proporcionando una amplia gama de opciones en el mercado.

Producto de dicha inventiva se encuentran las opciones exóticas, las cuales han permitido cubrir necesidades de carácter fiscal, contable, regulatorio y legal o, simplemente, los productos han sido creados por la expectativa de movimientos futuros en el tiempo y de los cuales se quiere obtener un beneficio para los inversionistas, así como una disminución en los costos y exposiciones tanto de los tenedores como de los emisores de estos productos (Hull, 2009).

Las opciones con barrera, de esta manera, surgen como un producto “exótico”; las cuales se alejan de las opciones convencionales en que su estructura de pagos no sólo dependerá del precio del activo subyacente al vencimiento de la opción, sino también de la trayectoria del precio a lo largo de la vida de ésta, en la que la opción pierde su vigencia o cobra su vigencia cuando el precio del activo subyacente alcanza un nivel preestablecido. Es decir, la “activación” o su “expiración sin valor” de la opción dependerá del comportamiento del precio del bien subyacente a lo largo de toda la vida de la opción (Brandimarte, 2002).

Paralelamente, pero con menor dinamismo, se ha ido fortaleciendo la teoría subyacente para la valuación de estos productos; por ejemplo, en valuaciones con modelos en tiempo discreto sobresalen los trabajos tanto de Pliska (1999) como los de Shreve (2000a) convirtiéndose en referencia para los analistas especializados. En teoría de tiempo continuo el mayor referente sobre opciones con barrera ha sido el trabajo desarrollado por Rubinstein y Reiner (1991), del cual se han hecho excelentes compilación en libros técnicos, entre los que se

encuentran la obra de Tomas Björk (2004) (Capítulo 18) y el volumen II de cálculo estocástico, Capítulo 7, tocante a modelos de tiempo continuo de Shreve (2000b). Además, Kyrianiou, Schoutens y Wilmott (2005) han compilado los desarrollos realizados en la valuación de productos derivados, remplazando el supuesto de la aleatoriedad del movimiento Browniano por procesos de Lévy.

Sin embargo, y de acuerdo a lo señalado por Dai y Lyuu (2010), el creciente dinamismo de las innovaciones financieras en productos derivados no ha estado acompañado de su respectivo avance analítico que pudiera llevarnos a una expresión cerrada, en el mejor de los casos se han alcanzado aproximaciones analíticas, haciendo de las opciones europeas un caso muy singular y un hito en la valuación de productos derivados, al desarrollarse, en la década de 1970, la célebre fórmula cerrada a partir del modelo de Fisher Black, Mayron Scholes y Robert C. Merton (BSM) para obtener su valuación (Black y Scholes, 1973; y Merton, 1973). Cabe señalar que en 1973, Robert Merton en su artículo de “Theory of Rational Option Pricing” publicado en el Bell Journal of Economics and Management Science estudia las opciones con barrera y da lugar a posteriores investigaciones al respecto.

En consecuencia, han existido desarrollos analíticos como los de Rubinstein (1991), Rubinstein y Reiner (1991), Broadie *et. al.* (1997) y Taksar (1997) para la valuación para diversos tipos de opciones exóticas (considerando los valores iniciales y condiciones de frontera). En otras palabras, el modelo BSM ha permitido crear fórmulas cerradas para la valuación de opciones con barrera, y aunque éstas dependen de la trayectoria del precio, durante la vida de la opción, esta dependencia se ha considerado débil (Cekic, 2008).

No obstante, las investigaciones de Luo (2001) han indicado que los desarrollos analíticos podrían originar grandes y graves errores de precisión. En ese caso se encuentran modificaciones en las opciones con barrera que se salen de las características típicas, y por ende, es necesario seguir investigando, profundizando y desarrollando métodos numéricos para obtener una solución más precisa.

De tal manera que se ha regresado a la implementación de métodos numéricos para obtener una valuación más exacta, pero con otro tipo de complicaciones, como se estudiará más adelante. El primero método utilizado, por excelencia, fue el de CRR debido a su sencillez, su amplio entendimiento y su flexibilidad pero, de acuerdo a Kuan y Webber (2003), con graves problemas en la convergencia¹. La convergencia no sólo es el único problema a enfrentar, sino también el tiempo o costo computacional empleado (algunos métodos han priorizado exactitud a costa del tiempo de respuesta), su número finito de escenarios y en la creación de errores de especificación los cuales genera precios sesgados (Boyle y Lau, 1994; Derman *et. al.*, 1995; y Sherwani, 2007).

Posteriormente, Boyle y Lau (1994) desarrollan un método por medio del cual la red del árbol permite calcular un conjunto de nodos muy cercanos o totalmente coincidentes con las barreras especificadas en el contrato. Las investigaciones continúan y Derman *et. al.* (1995) introduce un método por medio del cual aumenta la convergencia del método CRR al realizar interpolaciones de los precios de los activos subyacentes, sobre los puntos críticos o de condición de frontera.

Así mismo, Dai y Lyuu (2010) desarrollan un método denominado binotrinomial, por medio del cual generan una red con un conjunto de nodos coincidentes con el valor de las barreras indicadas, para disminuir el error relativo a las condiciones de frontera. Este modelo se basa en la generación de un árbol CRR truncado en sus dos primeros periodos pero con nodos en las barreras; mientras que en los dos primeros pasos se genera un árbol trinomial, el cual cumple con los supuestos de log normalidad del precio de la acción y parece ser un método muy adecuado para la valuación de este tipo de productos.

El documento está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se describen el modelo de valuación de opciones de tipo europeo en tiempo discreto y el modelo en tiempo continuo, donde el activo subyacente de la opción son acciones que no pagan dividendos. Particularmente, se explicará el modelo de

¹ La convergencia utilizando CRR es muy lenta, muy errática e impredecible.

árbol binomial y la valuación en tiempo continuo. En el capítulo 2, por otro lado, se estudian las características y tipos de opciones barrera, así como la explicación de los 1) métodos de árboles binomiales; 2) métodos de árboles bino-trinomiales; 3) simulaciones Monte Carlo para la valuación de opciones con barrera; y 4) se enuncian las fórmulas cerradas de Rubinstein. En el capítulo 3 se implementan los procedimientos numéricos, tanto de los métodos relativos a los árboles como los relativos a simulaciones Monte Carlo, para la valuación de opciones con barrera, haciendo uso de software científico especializado. En el capítulo 4 se analizan los resultados de las valuaciones al utilizar los procedimientos numéricos anteriores e incluyendo los resultados obtenidos por medio de las fórmulas cerradas propuestas en la literatura especializada para la valuación de este tipo de opciones. Finalmente, en el último capítulo, se realiza un análisis sobre la eficiencia, los costos y los beneficios de los métodos numéricos abordados con respecto a la valuación de opciones con barrera.

Capítulo 1

Modelos de valuación de opciones en tiempo discreto

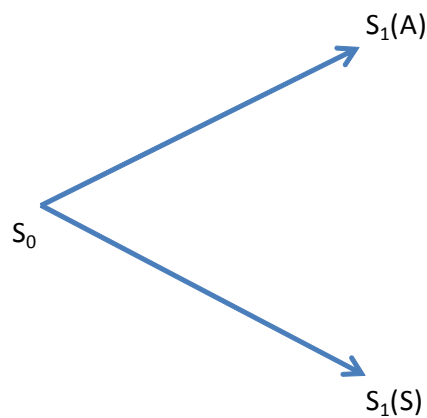
1.1 Los árboles binomiales

El primer acercamiento para realizar una valuación de una opción siempre ha sido a través de árboles binomiales, debido principalmente a su sencillez y que en éstos se evidencia visualmente las diferentes trayectorias a seguir por la acción, aunado a ello, el supuesto básico es que el precio de la acción siga una caminata aleatoria, Hull (2009).

1.1.1 Modelo binomial de un solo paso

El modelo más básico de los árboles binomiales es donde el precio de la acción es monitoreado en un solo paso con punto inicial en el tiempo igual a cero ($t=0$) y un punto final en el tiempo igual a uno ($t=1$); por lo tanto, el precio de la acción, dato conocido en el punto $t=0$, sólo tiene dos alternativas, una de incrementar su valor y la otra de disminuir, como se puede observar en la Figura 1.1.

Figura 1.1 Representación del cambio en el precio de una acción conforme al modelo binomial de un solo paso.



Fuente: Shreve (2000a)

En la figura anterior, se puede observar que al final del periodo, el precio de la acción puede tomar cualquiera de los dos valores positivos $S_1(A)$ y $S_1(S)$, los cuales están ligados al resultado simbólico de arrojar una moneda y obtener “águila” o “sol”, como sinónimos de éxito o fracaso o como un incremento en el precio de la acción o una disminución en ésta, siguiendo la idea y nomenclatura de Shreve (2000a). Así mismo, el incremento puede denotarse con una letra “ u ” por la sigla en inglés de “up” o, en el caso de una baja en el precio de la acción, por una “ d ”, proveniente de la palabra inglesa “down”, identificación más frecuente en la literatura especializada. A lo largo del trabajo se utilizará la segunda acepción salvo que explícitamente se indique el uso de la primera caracterización con el objetivo de hacer más claros los conceptos; por lo tanto los dos valores posibles de la acción al final del periodo uno serán $S_1(u)$ y $S_1(d)$.

Cabe mencionar que, los árboles binomiales de un solo periodo se convierten en una representación de un caso continuo tratado como discreto, pero en palabras de Pliska (1999), este tipo de modelos “*tienen la virtud de ser matemáticamente simples así como ser capaces de ilustrar muchos de los principios económicos importantes asociados con los modelos continuos y más complejos*” de ahí su importancia como medio de estudio y de comprensión de los problemas financieros.

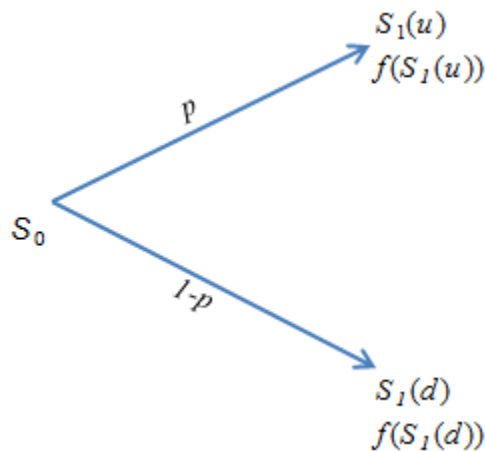
Hasta este momento, sólo se ha hecho mención a la aleatoriedad en los precios $S_1(u)$ y $S_1(d)$, pero relacionados a los precios se encuentra su probabilidad de aumento “ p ” y de disminución “ $1-p$ ”². Así mismo, se supondrá la existencia de

² En este caso se solicita que $p > 0$ para obtener aleatoriedad en los precios de la acción, por lo tanto, se cumplen las condiciones de una medida de probabilidad en el espacio muestral, pues al existir sólo dos eventos, incremento (éxito) o decremento (fracaso) en el precio de la acción, se satisfacen las tres condiciones necesarias a saber (Ross, 1997:4):

- i. para cualquier evento “E”, se tiene que $0 \leq p \leq 1$;
- ii. si “S” es el espacio muestral, entonces $P(S)=1$;
- iii. la unión de eventos mutuamente excluyentes, en este caso el éxito y el fracaso, es la suma de sus probabilidades.

un producto derivado donde el subyacente objeto de la operación será dicha acción, por lo cual deberá contemplarse el pago asociado a éste al inversionista. El pago deberá estar en función, o condicionado, al valor alcanzado por la acción en el momento final y el cual se denominará como el “*payoff*”³ del producto derivado; por ejemplo, en el caso de los futuros, donde el precio de entrega, o bien el precio de ejercicio, se ha estipulado en “*K*” unidades económicas, el *payoff* será igual a $S_1(u)-K$, en caso de que el precio de la acción suba, o a $S_1(d)-K$, si el precio de la acción baja. Para fines prácticos, se determinará analíticamente al *payoff* del producto derivado como “*f(x)*”, es decir, que para el caso del modelo binomial de un paso, este será: $f(S_1(u))$ o $f(S_1(d))$. Por lo tanto, la representación gráfica del modelo binomial de un solo paso se podrá observar en la Figura 1.2.

Figura 1.2 Representación del modelo binomial de un solo paso.



Fuente: Hull (2009) y Shreve (2000a)

Solo resta, para tener completo el modelo, una tasa de referencia, la cual será proporcionada por el mercado de dinero y servirá para medir el valor del

³ Término en inglés usado en la literatura sobre el pago proveniente de contratos derivados.

dinero en el tiempo, dicha cantidad es tal que si en el tiempo $t=0$ se tiene una cantidad $B_0 = 1$ y al final del punto $t=1$ se tendrá que $B_1 > 1$. Es decir, se supondrá la existencia de un bono, el cual otorgará una tasa conocida en el tiempo cero de tal forma que los rendimientos al final del periodo uno serán conocidos y sin ningún efecto de aleatoriedad⁴. Sea esa tasa conocida igual a “ r ”, y el precio del bono igual a B_0 al inicio del periodo, por lo tanto, al final del periodo el valor del bono será igual a $B_1 = B_0 e^{1 \times r}$. Cabe mencionar, que también se podrá pedir prestado a dicha tasa “ r ” Baxter y Rennie (1997:11) y Pliska (1999:1).

1.1.2 Valuación de un instrumento derivado utilizando el modelo binomial de un solo paso

La siguiente tarea es determinar el precio del producto derivado en el tiempo inicial, para ello se utilizará el modelo binomial de un solo paso y las características señaladas en la sección anterior, es decir:

- i.* una acción negociable que no paga dividendos;
- ii.* un conjunto de posibles precios de la acción al final del tiempo $t=1$, en este caso son sólo dos posibilidades, de que incremente el precio o decrezca;
- iii.* una medida de probabilidad para los resultados posibles; y
- iv.* una tasa de interés para medir el valor del dinero en el tiempo a través de un bono en el mercado de dinero.

Existirán tres supuestos adicionales, el primero es la inexistencia de oportunidades de arbitraje, Hull (2009: 237); el segundo, el inversionista podrá prestar y pedir prestado a la tasa “ r ”, sin límites, para poder hacer frente a las posibles responsabilidades provenientes del payoff del derivado; y el tercero, el inversionista podrá comprar o vender porciones de acciones.

⁴ En otras palabras, la tasa de referencia se considerará determinista.

De esta manera y de acuerdo a Baxter y Rennie (1997), al inicio del periodo se generará un portafolio conformado por una participación en la acción subyacente y una inversión o préstamo a la tasa de referencia en el mercado de dinero.

Siguiendo la nomenclatura de Baxter y Rennie (1997), el portafolio se podrá caracterizar por (ϕ, ψ) ; donde ϕ es la cantidad invertida en la acción, la cual tendrá un precio de S_0 , al inicio del periodo, y ψ es la cantidad invertida o emitida en el mercado de dinero; es decir, el portafolio creado tendrá la forma analítica indicada en (1.1).

$$\phi S_0 + \psi B_0 \tag{1.1}$$

Ahora bien, en el tiempo $t=1$ el valor de la acción podrá tomar cualquiera de los valores $S_1(u)$ o $S_1(d)$, por lo tanto, el valor del portafolio ⁵ obtendrá, respectivamente, cualquiera de los siguientes valores⁶

$$\phi S_1(u) + \psi B_0 \exp(rt) \tag{1.2}$$

$$\phi S_1(d) + \psi B_0 \exp(rt). \tag{1.3}$$

No obstante, asociado a cada uno de los valores del portafolio anteriores se encuentra el payoff del instrumento derivado, el cual corresponde a $f(S_1(u))$ o $f(S_1(d))$ respectivamente. De esta manera se tendrá el sistema de ecuaciones (1.4).

$$\begin{cases} \phi S_1(u) + \psi B_0 \exp(rt) = f(S_1(u)) \\ \phi S_1(d) + \psi B_0 \exp(rt) = f(S_1(d)) \end{cases} \tag{1.4}$$

La solución al sistema de ecuaciones anteriores para la dupla (ϕ, ψ) , está dada por

⁵ Tomando además en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

⁶ En este caso, debido a que el periodo en estudio corresponde a un periodo “ t ” es igual a uno.

$$\phi = \frac{f(S_1(u)) - f(S_1(d))}{S_1(u) - S_1(d)} \quad (1.5)$$

y

$$\psi = B_0^{-1} \exp(-rt) \left(f(S_1(u)) - \frac{f(S_1(u)) - f(S_1(d))}{S_1(u) - S_1(d)} S_1(u) \right). \quad (1.6)$$

Lo que realmente indica el sistema de ecuaciones (1.4) y su solución, representada en (1.5) y (1.6), es que no importa cuál sea el precio final de la acción en el tiempo $t=1$ el portafolio será capaz de replicar el payoff del producto derivado, es decir, se ha sintetizado el derivado.

Por lo tanto, el valor del portafolio indicado en (1.1) al sustituir el valor para la dupla (ϕ, ψ) que replica el payoff del derivado será:

$$V = \phi S_0 + \psi B_0.$$

$$V = \frac{f(S_1(u)) - f(S_1(d))}{S_1(u) - S_1(d)} S_0 + \exp(-rt) \left(f(S_1(u)) - \frac{f(S_1(u)) - f(S_1(d))}{S_1(u) - S_1(d)} S_1(u) \right). \quad (1.7)$$

La relación entre la expresión anterior y el precio del producto derivado queda de manifiesto utilizando el supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje de la siguiente manera:

- Supóngase que en el mercado el producto derivado se vende a un precio V' , tal que $V' > V$, un inversionista podrá entonces asumir 1) una posición corta en el derivado, 2) una posición larga en el portafolio, y 3) la diferencia $(V' - V)$ invertirla en el mercado de dinero a la tasa libre de riesgo y obtener una ganancia, lo cual contradice el supuesto de la inexistencia de oportunidad de arbitraje.
- Supóngase ahora que en el mercado el producto derivado se vende al precio V' , tal que $V' < V$, un inversionista podrá entonces asumir 1) una

posición larga en el derivado, 2) una posición corta en el portafolio, y 3) la diferencia $(V - V')$ invertirla en el mercado de dinero a la tasa libre de riesgo y obtener una ganancia la cual se traduciría en pedir prestado a una tasa menor a la tasa de referencia, lo cual contradice el supuesto de la inexistencia de oportunidad de arbitraje.

Por lo tanto, el único precio para el producto derivado que evita la violación de la inexistencia de oportunidad de arbitraje será igual al indicado en la expresión (1.7) anterior.

Cox, Ross y Rubinstein (1979), así como Baxter y Rennie (1997) proponen definir a “ q ” como lo señalado en (1.8)

$$q \equiv \frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)}, \quad (1.8)$$

para obtener una simplificación algebraica de (1.7), la cual se muestra en (1.9).

$$V = \exp(-rt) [qf(S_1(u)) + (1 - q)f(S_1(d))]. \quad (1.9)$$

La expresión anterior tiene una representación probabilística, pero antes de su exploración se considera conveniente hacer el análisis de la sección siguiente.

1.1.3 Análisis del cociente “ q ”, Cox, Ross y Rubinstein (1979)

Para el análisis del cociente indicado en (1.8) se hará nuevamente uso del supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje. Bajo ese escenario se analizará el signo y rango de “ q ”.

- Signo del cociente.- Conforme lo indicado en la sección 1.1.1 “*Modelo binomial de un solo paso*” los dos valores posibles de la acción al final del periodo serán $S_1(u)$ y $S_1(d)$, representando el primero un movimiento ascendente y el segundo un movimiento descendente; como consecuencia la diferencia entre ellos será positiva, es decir, que por construcción, el denominador del cociente (1.8) será positivo.

Por lo tanto, sólo resta analizar $S_0 \exp(rt) - S_1(d)$; ahora bien, suponga que el primer término es tal que $S_0 \exp(rt) \leq S_1(d)$, eso querría decir que un inversionista podría pedir prestado S_0 u.e. a la tasa de referencia “ r ” y comprar la acción; al final del periodo no importará si ésta tiene un movimiento a la alza o la baja pues el inversionista obtendrá una ganancia de $S_1(u) - S_0 \exp(rt)$ ó $S_1(d) - S_0 \exp(rt)$, en otras palabras, el inversionista obtendrá una ganancia segura y libre de riesgo, violando el supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje.

En conclusión, “ q ” siempre será positiva en el modelo binomial como método de valuación de derivados.

- Rango del cociente.- del inciso anterior se deriva que $S_0 \exp(rt) > S_1(d)$, lo siguiente es averiguar cómo es $S_0 \exp(rt)$ con respecto $S_1(u)$; así mismo, de forma análoga a dicho inciso, suponga que $S_0 \exp(rt)$ es mayor o igual a $S_1(u)$. De esta manera, un inversionista podría pedir prestada la acción y venderla al inicio del periodo por S_0 u.e. para posteriormente invertir el efectivo a la tasa de referencia “ r ”. Al final del periodo el inversionista obtendría $S_0 \exp(rt)$ y saldría al mercado de capitales a comprar la acción para devolverla al prestamista. El resultado de esa estrategia, nuevamente, sería una ganancia para el inversionista independientemente del

movimiento de la acción. En términos analíticos, la ganancia sería de $S_0 \exp(rt) - S_1(u)$, ante un movimiento a la alza, o de $S_0 \exp(rt) - S_1(d)$, ante un movimiento a la baja. En otras palabras, el inversionista obtendrá una manera una ganancia segura y libre de riesgo, violando el supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje.

Uniando el resultado del inciso precedente y el resultado del párrafo anterior, se deberá cumplir la relación indicada en (1.10).

$$S_1(d) < S_0 \exp(rt) < S_1(u) \quad (1.10)$$

De forma inmediata se obtiene el rango del cociente “ q ”:

$$0 < q = \frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} < 1. \quad (1.11)$$

En conclusión “ q ” y “ $1-q$ ” se encontrarán dentro del intervalo (0,1), lo cual nos permitirá manejar dicha cantidades como probabilidades⁷. Como consecuencia, gracias a la igualdad (1.9) anterior, el precio del derivado es el valor esperado futuro o “esperanza”⁸ de los payoffs, bajo “ q ”, traídos a valor presente. Es imperante hacer notar que no fue necesario hacer ningún supuesto sobre la probabilidad de aumento, “ p ”, o disminución, “ $1-p$ ”, de la acción subyacente para poder derivar la expresión (1.9).

1.1.4 Modelo binomial de un solo paso: precio de un forward y de una opción de compra

Hasta el momento se ha obtenido el valor teórico de cualquier derivado por medio de la ecuación (1.9). Pero para fines ilustrativos considere que un inversionista necesita saber, analíticamente, 1) el precio de un *forward* así como 2) el precio de una opción de compra el día de hoy utilizando para ello el modelo binomial de un solo paso.

⁷ La cantidad “ q ” y “ $1-q$ ” representan las probabilidades, bajo “ q ”, de éxito y de fracaso, respectivamente. Así mismo, dichas cantidades cumplen con las condiciones indicadas en el pie de página número uno.

⁸ A manera de recordatorio, la esperanza de una variable aleatoria discreta está definida como $E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$; por ejemplo, para el caso en que la variable X se distribuya como una Bernoulli con parámetro “ p ”, su esperanza será $E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$ Ross (1997:36).

1.1.4.1 Valuación de un forward

Suponga que un inversionista necesita conocer el precio, al día de hoy, de un contrato forward donde el subyacente es una acción que no paga dividendo, y el precio futuro fijado es igual a “ K ”. El inversionista decide utilizar para ello el modelo binomial de un solo paso.

Lo primero es determinar el payoff del forward al final del periodo; sin embargo, al final de éste, el precio de la acción será igual a $S_1(u)$ o a $S_1(d)$ dependiendo si el precio de la acción sube o baja respectivamente. Supongamos que el inversionista tiene una posición larga en el contrato, por lo tanto, al final del periodo el inversionista tendrá una ganancia o una pérdida igual a

$$f(S_1(u)) = S_1(u) - K,$$

$$f(S_1(d)) = S_1(d) - K.$$

Las expresiones anteriores junto con el cociente $q \equiv \frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)}$, indicado en (1.8), nos permitirán, con un poco de álgebra⁹, encontrar el valor del contrato forward utilizando la identidad (1.9). Es decir,

$$V = S_0 - K \exp(-rt),$$

lo cual coincide con lo esperado¹⁰.

1.1.4.2 Valuación de una opción de compra

Suponga que un inversionista desea conocer el precio, al día de hoy, de una opción call donde el subyacente es una acción que no paga dividendo y el precio

⁹ Véase el Apéndice 1.

¹⁰ Venegas (2008) demuestra que el precio de equilibrio de un contrato forward sobre una acción está dado por $V = S_0 - K \exp(-r(T - t))$, Venegas, (2008).

de ejercicio es igual a “ K ”. El inversionista decide utilizar para ello el modelo binomial de un solo paso.

Nuevamente, lo primero es determinar el payoff del contrato al final del periodo; sin embargo, al final de éste, el precio de la acción será igual a $S_1(u)$ o a $S_1(d)$ dependiendo si el precio de la acción sube o baja respectivamente. Supongamos que el inversionista tiene una posición larga en el contrato, por lo tanto, al final del periodo el inversionista tendrá una ganancia o una pérdida igual a

$$f(S_1(u)) = (S_1(u) - K)^+,$$

$$f(S_1(d)) = (S_1(d) - K)^+.$$

Donde $(S_1(x) - K)^+$ significa el máximo entre $S_1(x) - K$ y cero.

Nótese que bajo el supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje, la expresión $f(S_1(d)) = (S_1(d) - K)^+$ es igual a cero, pues si no fuese así en el modelo de un solo paso, un inversionista podría obtener ganancias libres de riesgo. Suponga lo contrario, es decir $f(S_1(d)) = (S_1(d) - K)^+ \neq 0$ eso implica que $S_1(d) > K$; por lo tanto, el potencial tenedor de la opción call podría realizar la siguiente estrategia al inicio del periodo:

- Pedir prestada la acción y venderla en el mercado a un precio de S_0 .
- Invertir en el mercado de dinero, a la tasa de referencia, el resultado de la venta.
- Comprar la opción call.

Al final del periodo el inversionista tendrá una entrada en efectivo de $S_0 \exp(rt)$ por su participación en el mercado de dinero, el cual deberá cumplir con la desigualdad (1.10), en particular con $S_1(d) < S_0 \exp(rt)$ y debido al supuesto de $K < S_1(d)$ se tendrá que

$$0 < f(S_1(d)) = S_1(d) - K < S_0 \exp(rt) - K.$$

En otras palabras, al final del periodo el inversionista ejercerá la opción y regresará la acción al prestatario, el flujo por ejercer la opción será de

$$S_1(d) - K,$$

el cual es menor a la inversión en el mercado de dinero, por lo tanto, la estrategia producirá una ganancia de $0 < S_0 \exp(rt) - S_1(d)$ sin riesgo alguno; por lo tanto, la desigualdad $f(S_1(d)) = (S_1(d) - K)^+ \neq 0$ no es posible sin violar el supuesto de no arbitraje.

Finalmente, al substituir las expresiones del payoff en la igualdad (1.9) tendremos que el valor de la opción será $V = \exp(-rt)qf(S_1(u))$, es decir

$$V = \exp(-rt)q(S_1(u) - K)^+.$$

1.1.5 Incrementos y decrementos proporcionales al precio inicial S_0

Hasta el momento se ha denota el movimiento en el precio de la acción como $S_I(u)$ o $S_I(d)$, en el caso de un incremento o decremento en el precio respectivamente, pero no se ha especificado cómo será dicho cambio. Sin embargo, usualmente al final del periodo se indica el precio final como un cambio en términos proporcionales o porcentuales al precio inicial.

De esta forma, si la acción incrementa su precio para alcanzar un valor igual a $S_I(u)$, éste se representará de manera proporcional al precio inicial S_0 , es decir,

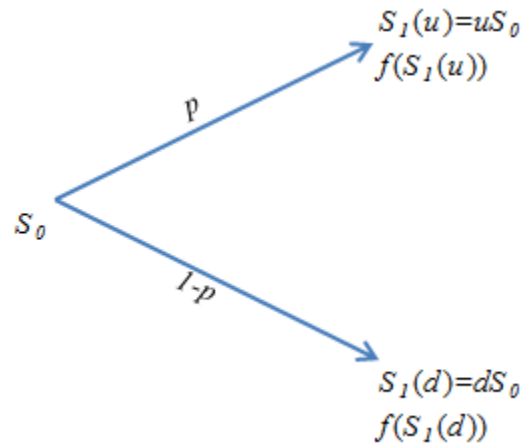
$$S_1(u) = uS_0. \tag{1.12}$$

Mientras que en el caso contrario, si la acción disminuye su precio, el nuevo valor $S_1(d)$ tendrá un cambio proporcional denotado como

$$S_1(d) = dS_0. \quad (1.13)$$

Por lo tanto, en caso de un incremento en el precio, el inversionista esperaría tener una tasa de retorno igual a “ $u-1$ ”, o a “ $d-1$ ”, el primero con una probabilidad de “ p ” y el segundo con una probabilidad de “ $1-p$ ”¹¹. Con esto en mente, la representación gráfica del modelo binomial de un solo paso se podrá observar en la Figura 1.3.

Figura 1.3 Representación del modelo binomial de un solo paso con incrementos y decrementos proporcionales al precio inicial S_0 .



Fuente: Hull (2009) y Shreve (2000a)

¹¹ Véase la Sección 1.1.

Así mismo, al utilizar los cambios proporcional al precio inicial S_0 , la desigualdad indicada en (1.10), $S_1(d) < S_0 \exp(rt) < S_1(u)$, se simplifica de la siguiente manera

$$d < S_0 \exp(rt) < u; \quad (1.14)$$

de forma similar, el cociente (1.8) de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se reduce a

$$q \equiv \frac{\exp(rt) - d}{u - d}. \quad (1.15)$$

1.1.6 Árbol binomial o modelo binomial de varios pasos

En las secciones anteriores el análisis del comportamiento del precio de una acción se realizó para un periodo ¹²; sin embargo, el análisis de dicho comportamiento se podrá extender dentro del periodo, haciendo subdivisiones del lapso del tiempo en estudio. Por ejemplo, supóngase que el intervalo hipotético era de un día (de 24 horas), por lo tanto, las subdivisiones posteriores por el analista podría ser dividiendo el periodo en 2 (de 12 horas cada uno), o en 3 (de 8 horas cada uno) y así sucesivamente hasta realizar “ n ” particiones (de $24/n$ horas cada una).

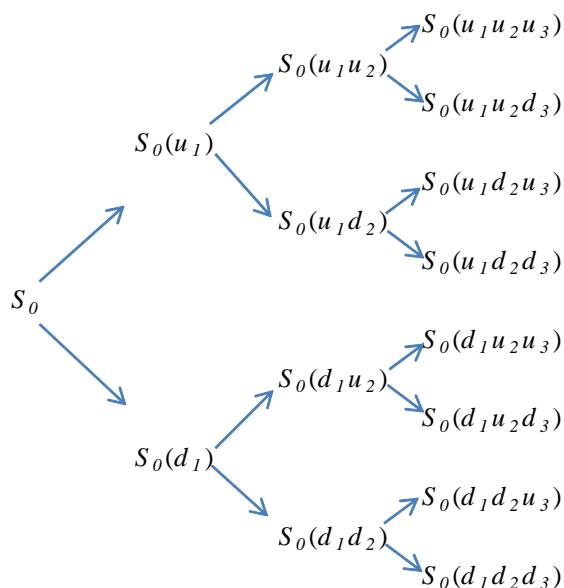
Considere ahora el punto inicial en el periodo de tiempo igual a cero ($t=0$) y, para fines prácticos, el punto final en el tiempo igual a T ($t=T$); por lo tanto, siguiendo la idea del párrafo anterior y al realizar “ n ” particiones, éstas serán de

¹² Donde el punto inicial en el tiempo es igual a cero ($t=0$) y un punto final en el tiempo igual a uno ($t=1$).

una longitud igual a " $\delta t=T/n$ ". En ese caso se denominará al resultado de las subdivisiones como un árbol binomial de " n " pasos. Es importante señalar que en cada una de las particiones la acción podrá incrementar o disminuir su valor; en forma ilustrativa en la Figura 4 se podrá observar un "árbol" donde el periodo de tiempo se ha dividido en tres ($T/3$).

En dicha figura, claramente se puede observar que por cada paso hay dos posibles resultados del precio o nodo precedente, uno hacia arriba y otro hacia abajo, de ahí el nombre de árbol **binomial**. Por ejemplo, del nodo $S_0(d_1)$ las siguientes posibilidades del precio de la acción son $S_0(d_1u_1)$, ante un movimiento a la alza, y $S_0(d_1d_1)$, si el movimiento en el precio es a la baja. En forma general, para cada paso tendremos 2^i posibles precios; por ejemplo, para el primer paso se tendrán 2 posibilidades ($S_0(u_1)$ y $S_0(d_1)$), para el segundo paso se tendrá $2^2=4$ posibles precios ($S_0(u_1u_2)$, $S_0(u_1d_2)$, $S_0(d_1u_2)$ y $S_0(d_1d_2)$), por lo tanto, si el intervalo de tiempo es dividido en " n " pasos, al final de éste se tendrán 2^n posibles precios.

Figura 1.4 Representación del modelo binomial de tres pasos.



Fuente: Shreve (2000a)

Nótese que en cada paso, para cada uno de los 2^i nodos se tendrá un movimiento ascendente o descendente, excepto para el último paso, pues ahí es donde se iniciará el análisis del payoff del producto derivado (“ $f(x)$ ”). Siguiendo la nomenclatura de Shreve (2000a), sea “ $X_{j,i}$ ” tal que incluye toda la *historia* de incrementos y decrementos precedentes para alcanzar, sin pérdida de generalidad, al nodo j del paso i ¹³ donde $j=\{1, \dots, 2^i\}$ e $i=\{1, \dots, n\}$; por ejemplo, para el nodo donde el precio es igual a $S_0(u_1u_2u_3)$ se tendrá $X_{1,3}=[u_1u_2u_3]$; en el caso de $S_0(d_1u_2d_3)$, el vector historia será $X_{6,3}=[d_1u_2d_3]$. De esta manera en el paso “ $n-1$ ” y para el nodo j , el precio $S_0(X_{j,n-1})$ podrá incrementar su valor a $S_0(X_{j,n-1}u_n)$ o reducir su valor a $S_0(X_{j,n-1}d_n)$ en el n -simo paso y la determinación del payoff para esos dos precios será $f(S_0(X_{j,n-1}u_n))$ o $f(S_0(X_{j,n-1}d_n))$, pero fue así precisamente como se inició el desarrollo del modelo binomial de un solo paso, es decir, es idéntica la estructura en cada nodo a lo estudiado anteriormente; por lo tanto, de forma similar se llegará a la correspondiente expresión (1.9)

$$f_{j,n-1} = \exp(-r\delta t) \left[q_{j,n-1} f \left(S_0(X_{j,n-1}u_n) \right) + (1 - q_{j,n-1}) f \left(S_0(X_{j,n-1}d_n) \right) \right], \quad (1.16)$$

donde el cociente “ $q_{j,n-1}$ ” está determinado por

$$q_{j,n-1} \equiv \frac{S_0(X_{j,n-1})\exp(\delta rt) - S_0(X_{j,n-1}d_n)}{S_0(X_{j,n-1}u_n) - S_0(X_{j,n-1}d_n)}. \quad (1.17)$$

Nuevamente, la igualdad (1.16) anterior es el valor esperado futuro o “esperanza” de las reclamaciones, bajo “ q ”, pero en este caso, traídos a valor presente al nodo j del paso $n-1$; en forma general, para cada uno de los nodos de la estructura generada en el árbol se tendrá

$$f_{j,i} = \exp(-r\delta t) \left[q_{j,i} f \left(S_0(X_{j,i}u_n) \right) + (1 - q_{j,i}) f \left(S_0(X_{j,i}d_n) \right) \right]. \quad (1.18)$$

Como consecuencia, empezando en el último paso o $i=n$ y realizando el proceso “hacia atrás” y recursivamente se podrá obtener el precio del derivado al tiempo $t=0$.

¹³ Por lo tanto, la dimensión del vector *historia* es “ i ”.

1.1.7 Árbol recombinantes

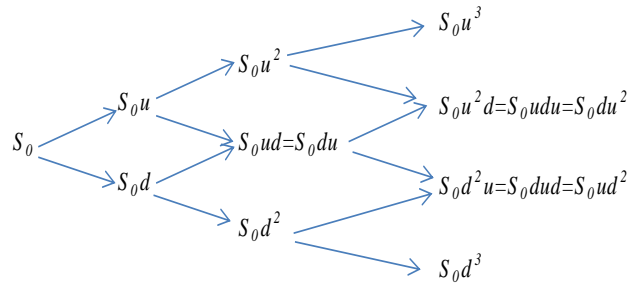
En la sección anterior se describió la forma general de un árbol binomial; sin embargo, ese tipo de árboles representan un gran costo computacional, pues en cada paso se generan 2^i nodos, y en cada uno de ellos se debe calcular el correspondiente cociente $q_{j,i}$. Esto es ocasionado porque en cada paso la tasa de crecimiento " u_{i-1} ", o " d_{i-1} " varía, generando un árbol denso.

Una de las primeras simplificaciones se obtiene al eliminar el efecto aleatorio a las tasas de crecimiento, lo que originará un aumento o disminución plenamente determinista y constante en cada paso del modelo.

Tal simplificación ocasiona una dramática disminución en el número de nodos en cada paso, pues de tener 2^i nodos se tendrán sólo " $i+1$ " nodos distintos¹⁴. La disminución en el número de los nodos se origina debido a que una trayectoria con un movimiento a la alza seguida por un movimiento a la baja del precio de la acción, generará el mismo nodo que una trayectoria conformada por un movimiento a la baja seguida de un movimiento a la alza. Aunado a ello y viendo el árbol como incrementos y decrementos proporcionales al precio inicial S_0 cada nodo estará representado por un producto de incrementos y decrementos de la forma $u^j d^k S_0$ donde j representa el número de incrementos en el precio de la acción mientras que k representa el número de decrementos en ésta; sin embargo, el número de incrementos y decrementos está acotado al número de paso en análisis, es decir, para el paso i -ésimo sólo se podrá tener a lo más tanto i número de incrementos como de decrementos. Por lo tanto, el precio en cada nodo estará dado por $u^j d^{i-j} S_0$ con $j = \{1, \dots, i\}$. En la Figura 5 se podrá observar un "árbol recombinante" donde el periodo de tiempo se ha dividido en tres ($T/3$).

¹⁴ Son $i+1$ nodos distintos, pero seguirán existiendo 2^i trayectorias para el paso i -ésimo Pliska (1999:103).

Figura 1.5 Representación del modelo binomial recombinante de tres pasos.



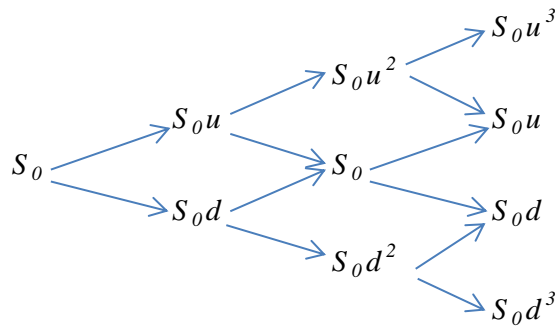
Fuente: Hull (2009) y Shreve (2000a)

Así mismo, la simplificación de incrementos y decrementos constantes a lo largo de los pasos no es la única simplificación comúnmente utilizada. También es frecuente la relación

$$d = \frac{1}{u}, \tag{1.19}$$

la cual permitirá una mayor simplificación, como se puede observar en la Figura 1.6.

Figura 1.6 Representación del modelo binomial recombinante de tres pasos, considerando $ud=1$.



Fuente: Hull (2009).

1.1.8 El modelo Cox, Ross y Rubinstein (1979) o la incorporación de la volatilidad de la acción al modelo¹⁵

En 1979 Cox, Ross y Rubinstein publican en Journal of Financial Economics el modelo binomial donde ajustan las variables “ p ”, “ u ” y “ d ” para obtener, en sus propias palabras, resultados “*más realistas*” conforme se van incrementando el número de pasos, es decir, cuando $n \rightarrow \infty$ (ó $\delta t = T/n \rightarrow 0$). Aunado a ello, es necesario tomar consideraciones sobre la probabilidad de aumento en los precios, pues la probabilidad de grandes incrementos será pequeña en un periodo de intervalo corto comparado con respecto a uno largo (véase Cox, Ross y Rubinstein, (1979)).

Para realizar los ajustes en los parámetros “ u ” y “ d ” los autores le demandan al árbol binomial recombinante de la sección 1.1.7 que al menos la esperanza y la varianza de los precios generados por el modelo igualen la esperanza y la varianza mostrada por la acción en el mercado. Tal requerimiento al modelo lo consiguen a través de las igualdades indicadas en (1.20) y (1.21), relativas a los cambios proporcionales en el precio de la acción.

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{T/n}\right) \quad (1.20)$$

$$d = \exp\left(-\sigma\sqrt{T/n}\right) \quad (1.21)$$

A lo largo de estas secciones se ha estudiado un fenómeno continuo como discreto; sin embargo, al incrementar el número de pasos en el periodo de tal forma que $n \rightarrow \infty$ (ó $\delta t = T/n \rightarrow 0$) el modelo tenderá hacia su límite, donde se supondrá una distribución *lognormal* del precio de la acción; de forma general, el límite tenderá hacia los modelos de tiempo continuo.

¹⁵ Esta sección proviene del artículo The pricing options and corporate Liabilities (Cox, Ross y Rubinstein, 1979).

1.2 Modelos en tiempo continuo

En la sección anterior se valuó una opción por medio de un método discreto, en esta sección se describirá el modelo continuo en la valuación de opciones, cuya dinámica en el precio del activo es guiada por una ecuación diferencial estocástica, Black-Scholes y Merton (1973).

1.2.1 Procesos estocásticos

Uno de los conceptos fundamentales en la teoría financiera es el relativo a “proceso estocástico”; como lo describe Venegas (2008:33), “un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio”; entendiéndose como fenómeno aleatorio cualquier variable financiera o económica. En el caso de estudio de este trabajo, el fenómeno se refiere particularmente al comportamiento del precio de una acción que no paga dividendos a lo largo del tiempo.

Los procesos estocásticos pueden considerarse discretos o continuos con respecto al tiempo y a la variable aleatoria. Para cuestiones de esta sección se referirá solo aquellos procesos estocásticos continuos tanto en el tiempo como en las observaciones de la variable aleatoria, es decir, el comportamiento del precio de la acción.

1.2.2 Procesos estocásticos en tiempo continuo

Una de las características solicitadas al proceso estocástico del precio de la acción es que sea una martingala, es decir, si se conoce toda el flujo de información (o filtración) hasta el tiempo “ t ” entonces se conocerá el valor de la variable aleatoria “ S_t ”; así mismo, el valor esperado de la variable aleatoria para un

tiempo posterior, sólo conociendo la forma hasta el tiempo “ t ”, será el mismo valor “ S_t ”. Ahora bien, un proceso estocástico cumplirá con la propiedad de Markov, si el futuro es independiente del pasado dado el valor presente del proceso, Hull (2009), Pliska (1999) y Shreve, (2000b).

Un caso particular de los procesos estocásticos con la propiedad de Markov son los denominados procesos Wiener. Un proceso estocástico W será un proceso Wiener si cumple con las siguientes condiciones, Björk, (2004:36):

1. $W(0)=0$,
2. El proceso W tiene incrementos independientes, es decir, si $r < s \leq t < u$ entonces $W(u)-W(t)$ y $W(s)-W(r)$ son variables estocásticas independientes,
3. Para $s < t$ la variable estocástica $W(t)-W(s)$ tiene una distribución Gaussiana $N[0, \sqrt{t-s}]$ ¹⁶, y
4. W tiene una trayectoria continua.

Suponga que el modelo del precio de la acción es un proceso estocástico con la siguiente dinámica local:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu(t, S(t))\Delta t + \sigma(t, S(t))\Delta W(t)$$

donde

$$\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$$

y W es un proceso Wiener; suponga además la condición de frontera $S(0) = a$. Ahora bien, si se permite tender a cero a Δt se obtendrá la siguiente expresión (Björk, 2004:37-38):

$$\begin{cases} dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW(t) \\ S(0) = a. \end{cases} \quad (1.22)$$

¹⁶ $N[\mu, \sigma]$ denota una distribución Gaussiana con valor esperado μ y desviación estándar σ .

En la expresión anterior, el término $\mu(t, S(t))$ es conocido en la literatura especializada como tasa “drift” o tasa media de retorno y a $\sigma(t, S(t))$ como tasa de “varianza”, volatilidad o difusión, es importante señalar que ambas funciones son consideradas deterministas.

Un caso particular de la ecuación (1.22) es cuando $\mu(t, S(t)) = \mu S(t)$ y $\sigma(t, S(t)) = \sigma S(t)$, con μ y σ escalares, en este caso, la ecuación anterior toma la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) & (1.23) \\ \Rightarrow dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \\ \Rightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu dt + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación diferencial estocástica correspondiente a un Movimiento Geométrico Browniano. Sin embargo, es importante conocer el comportamiento de la función $F(S, t) = \ln(S(t))$, utilizando para ello el lema de Itô. El comportamiento de la función F se muestra a continuación

$$dF(S, t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t). \quad (1.24)$$

La ecuación diferencial estocástica anterior, aplicando el cálculo de Itô tendrá como solución¹⁷

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}. \quad (1.25)$$

Considere, así mismo, una opción europea, con precio de ejercicio igual a K , donde el subyacente es una acción que no paga dividendos y donde su precio

¹⁷ Para una mayor profundidad al respecto véase (Shreve, 2000b:125-148).

muestra una dinámica como la indicada en (1.23) y sea $f(S(t),t)$ el precio de dicha opción europea. Debido a que trata de una opción europea se debe cumplir la condición de frontera al vencimiento de $f(T)=\max\{S(T)-K,0\}$.

Utilizando argumentos sobre “*valuación neutral al riesgo*”¹⁸ el valor de la opción estará dado por el valor presente, utilizando la tasa libre de riesgo, de la esperanza de su *payoff*, es decir,

$$c = e^{-rt} \mathbb{E}[(S(T) - K)^+]. \quad (1.26)$$

Considerando la distribución de (1.25) y definiendo a Z como una $N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T\right)$, $S(T)$ podrá escribirse como $S(T) = S_0e^{rT+Z}$; por lo tanto (1.26) se expresa como

$$c = e^{-rt} \mathbb{E}[(S_0e^{rT+Z} - K)^+] \quad (1.27)$$

Al resolver la integral indicada por la esperanza en (1.27) se encuentra la solución cerrada en el caso de una opción europea sobre una acción que no paga dividendos. Dicha solución corresponde a la famosa fórmula de ***Black-Scholes***, la cual se encuentra indicada en (1.28), cabe mencionar que la determinación de dicha fórmula va más allá del alcance de este trabajo (Baxter y Rennie, 1997: 90-91; Hull, 2009:292 y Neftci, 2008:222-223).

$$C = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (1.28)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

¹⁸ En un mundo con valuación neutral al riesgo, la tasa de retorno esperada en todos los activos disponibles para los inversionistas es igual a la tasa libre de riesgo r , Hul, (2009:290).

Es conveniente señalar que la esperanza de los payoffs de ciertas opciones puede complicarse (por las condiciones de frontera) y no poder obtener una solución cerrada, es por ello la importancia de recurrir a métodos numéricos, los cuales se estudiarán en los próximos capítulos, específicamente en la valuación de opciones barrera.

Capítulo 2

Opciones Barrera

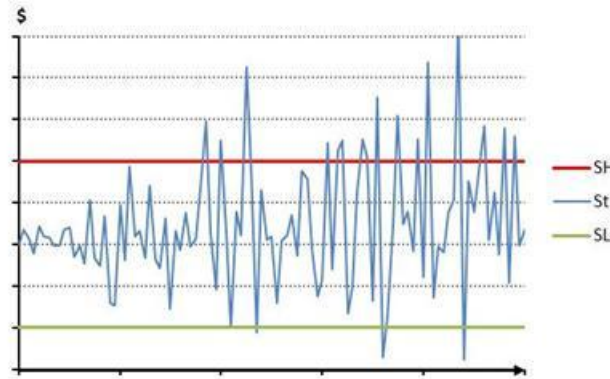
En el capítulo anterior se explicaron los modelos básicos de valuación de opciones europeas sobre un subyacente que no paga dividendos; sin embargo, el interés de este trabajo radica en la valuación de opciones barrera tipo europeo.

En este capítulo se describirá inicialmente las características de las opciones barrera, los métodos de valuación con modelos “discretos”, la simulación Monte Carlo como método para valuar opciones, así como la presentación de las fórmulas cerradas propuestas por Rubinstein para este tipo de derivados.

2.1. Definiciones

Una opción barrera es aquella donde se activa si el precio del bien subyacente alcanza o cruza ciertos niveles previamente determinados, denominados *barreras*. Para el caso de este trabajo, se considerará que al activarse la opción, ésta será “*plain vanilla*” y por lo tanto su *payoff* dependerá si el precio del bien subyacente alcanza o cruza las barreras, Brandimarte (2002:119). Así mismo, si la barrera se encuentra por encima del precio actual del subyacente ésta se denominará S_H , por otro lado, si el precio de la acción se encuentra por arriba de la barrera se le denominará S_L , usando la nomenclatura de Dai y Lyuu (2010). En la Figura 2.1 se podrá observar la ejemplificación gráfica del comportamiento del precio de un subyacente con respecto a sus barreras.

Figura 2.1 Ejemplificación gráfica del comportamiento del precio de un subyacente con respecto a sus barreras.



Fuente: Baxter y Rennie (1997).

2.2 Tipos de opciones barreras

En el caso de una opción barrera, con fecha de vencimiento T , el derecho a ejercer la opción estará en función a si cruza o no la barrera o las barreras como se indica a continuación.

Suponga que el precio del bien subyacente cruza cualquiera de las barreras (S_H o S_L) y si la opción deja de existir, la opción barrera se denominará “*knock out*”. En contraposición, si la opción empieza a existir, o se activa, una vez que el precio del bien subyacente cruza alguna de las barreras, la opción se denominará “*knock in*”.

Ahora bien, si el precio del bien subyacente cruza la barrera S_L , la opción “*knock out*” se calificará como “*down-and-out*”. Así mismo, si el precio del bien subyacente cruza la barrera S_H , la opción “*knock in*” se calificará como “*up-and-in*”. De forma similar se tendrán las opciones “*up-and-out*” y “*down-and-in*”; es

importante señalar que se pueden combinar entre sí las alternativas, por ejemplo se podrá negociar una opción “*doble barrera knock out*”¹⁹. Sólo restaría agregar el tipo de opción concertada, es decir, indicar si se trata de un call o de un put (por ejemplo “*down-and-in call*”)²⁰, Neftci, (2008:301-302).

2.3 Paridad In-Out

Existe una relación entre las opciones típicas (o “*plain vanilla*”) y las opciones barreras, misma que se describirá brevemente en esta sección. Los resultados de esta subsección, cabe mencionar, provienen de Neftci (2008:302-303).

Considere un inversionista que adquiere dos opciones barreras call, una down-and-out (DaO) y otra down-and-in (Dal), ambas sobre el mismo activo subyacente, con el mismo precio de ejercicio K y con barrera igual a S_B ; además, suponga que el precio actual del subyacente es S_t , como consecuencia es conveniente analizar los siguientes casos:

Caso 1: $S_t \leq S_B$ al inicio del contrato

En este evento, el precio del bien subyacente ya cruzó la barrera “ S_B ”, lo cual se traduce en que la opción barrera DaO vencerá sin valor, por otro lado, la opción Dal ya se encuentra activada, por lo tanto, su payoff será similar al de una opción call plain vanilla, es decir:

Si $S_t < S_B$, entonces DaO + Dal = Dal = Opción call plan vanilla

Caso 2: $S_B < S_t$ al inicio del contrato

Este caso tiene dos subcasos dependiendo del comportamiento del precio del bien subyacente durante el plazo remanente de la opción, pues éste

¹⁹ En este caso se combinaron las opciones tipo up-and-out y down-and-out.

²⁰ Es decir, se tendrán ocho distintos tipo de opción barrera.

tendrá una y sólo una de las siguientes dos posibilidades: 1) que el precio del subyacente cruce la barrera en algún punto de la vida de la opción, y 2) que el precio del subyacente siempre se mantenga por arriba de la barrera acordada.

Caso 2.1: $S_t < S_B$, para alguna $t \in (0, T]$

Este subcaso es idéntico al indicado en el Caso 1, por lo tanto:

$$\text{DaO} + \text{Dal} = \text{Dal} = \text{Opción call plan vanilla.}$$

Caso 2.2: $S_B < S_t, \forall t \in [0, T]$

En esta ocasión la opción barrera DaO ya se encuentra activada (y, por el supuesto, continuará de esa manera durante toda la vida de la opción); por lo tanto, la opción tendrá el mismo payoff al de una opción plain vanilla. Así mismo, bajo este escenario, la opción barrera Dal vencerá sin valor alguno. Es decir, se tendrá la siguiente relación:

Si $S_B < S_t, \forall t \in [0, T]$, entonces $\text{DaO} + \text{Dal} = \text{DaO} = \text{Opción call plan vanilla}$

Reuniendo los resultados de los dos casos arriba descritos, se tiene la ecuación conocida como la *paridad in-out*.

$$\text{DaO} + \text{Dal} = \text{Opción call plan vanilla}$$

Es importante señalar que la paridad anterior, es válida siempre y cuando no exista un “*rebate*”, es decir una compensación otorgada por el emisor al poseedor de la opción barrera por el evento de que el precio del activo subyacente haya cruzado alguna de las barreras; sin embargo, para fines de este trabajo, no se considerará la existencia de tal indemnización Brandimarte (2002:119).

2.4 Árboles y opciones con barrera

En esta sección se estudiarán tres modelos discretos para obtener el precio de opciones con barrera. Los métodos serán: 1) árboles binomiales; 2) árboles binomiales usando la técnica indicada por Derman *et. al.* 1995, el cual será denominado a lo largo de este trabajo como “*Método Derman*”; y 3) árboles binotrinomiales.

En el Capítulo 1 se indicó que el uso de los árboles binomiales es una forma de estudiar un fenómeno continuo como discreto, lo cual es una fuente de error. Sin embargo, no es el único origen de inexactitud al utilizar los métodos discretos, como se indica en la siguiente subsección.

2.4.1 Tipos de error al emplear árboles binomiales (error de cuantificación y error de especificación)

Dos problemas surgen, principalmente, al utilizar el método de árboles binomiales en las opciones con barrera, los cuales originan inexactitudes en el precio resultado. Estos problemas son denominados como error de cuantificación y error de especificación.

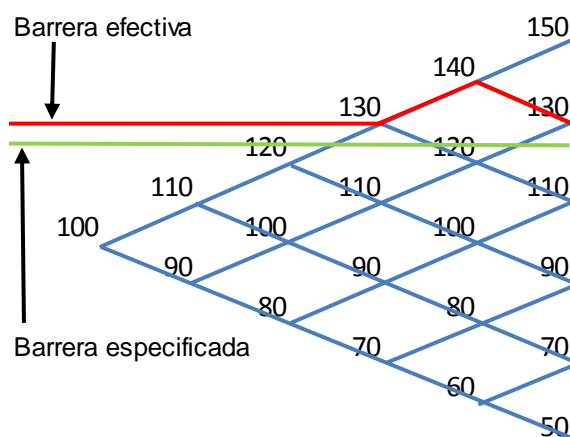
El error de cuantificación surge al describir un fenómeno continuo por medio de un modelo discreto. En el caso de los métodos de árboles binomiales, al precio de la acción se le permite tomar sólo los valores generados por la “red”, la cual depende de la partición del periodo de vida de la opción. Este error es reducido al incrementar el número de particiones, pues el precio de la acción podrá tomar un conjunto mayor de valores, ya que al tratarse de un modelo binomial recombinante se generan “ $n+1$ ” nodos finales y 2^n trayectorias posibles, lo cual permite incrementar la exactitud en el precio del contrato. No obstante, Derman *et. al.* (1995) señala que el número de las particiones tiene que ser de tal forma que ante un pequeño cambio en éste, no tenga substanciales efectos en el resultado final.

El error de especificación, por otro lado, se origina por la incapacidad del modelo de mimetizar completamente las condiciones del contrato. De forma similar al tipo de error anterior, una vez que se ha generado el tamaño de la

partición del periodo, se especifica la red y por ende los precios en los que fluctuarán los valores de la acción. El problema radica, en que el conjunto de precios generados por la “red” podrían no incluir aquellos precios críticos²¹ estipulados por el contrato. En el caso de las opciones con barrera, el conjunto de precios de la red, podría no contener los nodos precisos que indican cuando el precio de la acción ha cruzado las barreras; como consecuencia, la valuación proporcionada por el modelo será imprecisa, pues se está obteniendo el valor de una opción con características contractuales distintas a la original.

En el caso de las opciones con barrera, la generación de la red se traducirá en que los precios observados de la acción, con relación a las barreras, se aproximarán a los valores de los nodos más cercanos. Cuando este es el caso, a la primera línea de puntos donde se hace palpable el efecto de la barrera se le denomina: “*barrera efectiva*”, contra “*barrera especificada*” por el contrato (véase la Figura 2.2). El caso ideal es cuando las barreras “efectiva” y “especificada” son la misma o existen nodos ubicados en ella.

Figura 2.2 *Barrera efectiva vs. barrera especificada o contractual.*



Fuente: Derman *et. al.* (1995)

²¹ El caso más común es el precio de ejercicio en las opciones.

2.4.2 Método binomial para opciones con barrera (Modelo CRR)

Como se mencionó en el capítulo anterior, lo primero es determinar el *payoff* del producto derivado al final del periodo, en este caso se trata de una opción con barrera. Sin embargo, dadas las características de este tipo de derivados, el pago esperado al final estará en función tanto del precio de ejercicio como de la barrera o barreras pactadas.

En el caso de las opciones plain vanilla europeas su *payoff* estará dado por²² $f(S(T)) = (S(T) - K)^+$, donde “K” es el precio de ejercicio pactado. A esta condición sólo le resta incluir el efecto de las barreras. Por ejemplo, en el caso de una opción call up-and-out con barrera S_H , el pago al vencimiento estará dado por la expresión (2.1), Björk (2004) y Pliska (1999).

$$f(S(T)) = \begin{cases} (S(T) - K)^+ & \text{Si } S(t) < S_H, \forall t, t \in [0, T] \\ 0 & \text{e. o. c} \end{cases} \quad (2.1)$$

De forma ilustrativa, en el Cuadro 2.1 se muestran los *payoff* para opciones call tipo “knock out” y “knock in” (el *payoff* en el caso de las opciones put es muy similar a las mostradas en dicho cuadro).

Cuadro 2.1 *Función del valor final de opciones call con barrera*

Tipo de opción barrera		Payoff	
knock out	up-and-out	$f(S_T) = \begin{cases} (S_T - K)^+ \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Si } S(t) < S_H, \forall t, t \in [0, T] \\ \text{e. o. c} \end{cases} \quad (2.1)$
	down-and-out	$f(S_T) = \begin{cases} (S_T - K)^+ \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Si } S(t) > S_L, \forall t, t \in [0, T] \\ \text{e. o. c} \end{cases}$
knock in	up-and-in	$f(S_T) = \begin{cases} 0 \\ (S_T - K)^+ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Si } S(t) < S_H, \forall t, t \in [0, T] \\ \text{e. o. c} \end{cases}$
	down-and-in	$f(S_T) = \begin{cases} 0 \\ (S_T - K)^+ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Si } S(t) > S_L, \forall t, t \in [0, T] \\ \text{e. o. c} \end{cases}$

Fuente: Elaboración propia con información de Björk (2004).

²² Véase la sección “1.1.4.2 Obtención del precio de una opción call”.

Nótese que, la principal diferencia entre las opciones europeas plain vanilla y las opciones barreras, es que el payoff del producto derivado no solamente dependerá del precio del bien subyacente al vencimiento del contrato, es decir en el tiempo “ T ”, sino del comportamiento del precio del bien a lo largo de la vida del derivado. Es por ello que este tipo de opciones son conocidas como dependientes de la trayectoria o “path-dependent”, por su nombre en inglés. Por lo tanto, el uso del método CRR, en cada nodo, para la valuación de este derivado, deberá evaluarse si se ha superado o no la barrera especificada “ B ”. De esta forma, la expresión (1.18) deberá incluir la evaluación de la condición indicada por la barrera.

$$(1.18): \quad f_{j,i} = \exp(-r\delta t) \left[q_{j,i} f(S_0(X_{j,i}u_n)) + (1 - q_{j,i}) f(S_0(X_{j,i}d_n)) \right]$$

Por ejemplo, en el caso de una opción call up-and-out con barrera S_H deberá analizarse si el precio ha superado la condición para poder realizar la valuación.

$$f(S_0(X_{j,i}u_n)) = \begin{cases} (S_0(X_{j,i}u_n) - K)^+ & \text{Si } S_0(X_{j,i}u_n) < S_H \\ 0 & \text{e. o. c} \end{cases}$$

$$f(S_0(X_{j,i}d_n)) = \begin{cases} (S_0(X_{j,i}d_n) - K)^+ & \text{Si } S_0(X_{j,i}d_n) < S_H \\ 0 & \text{e. o. c} \end{cases}$$

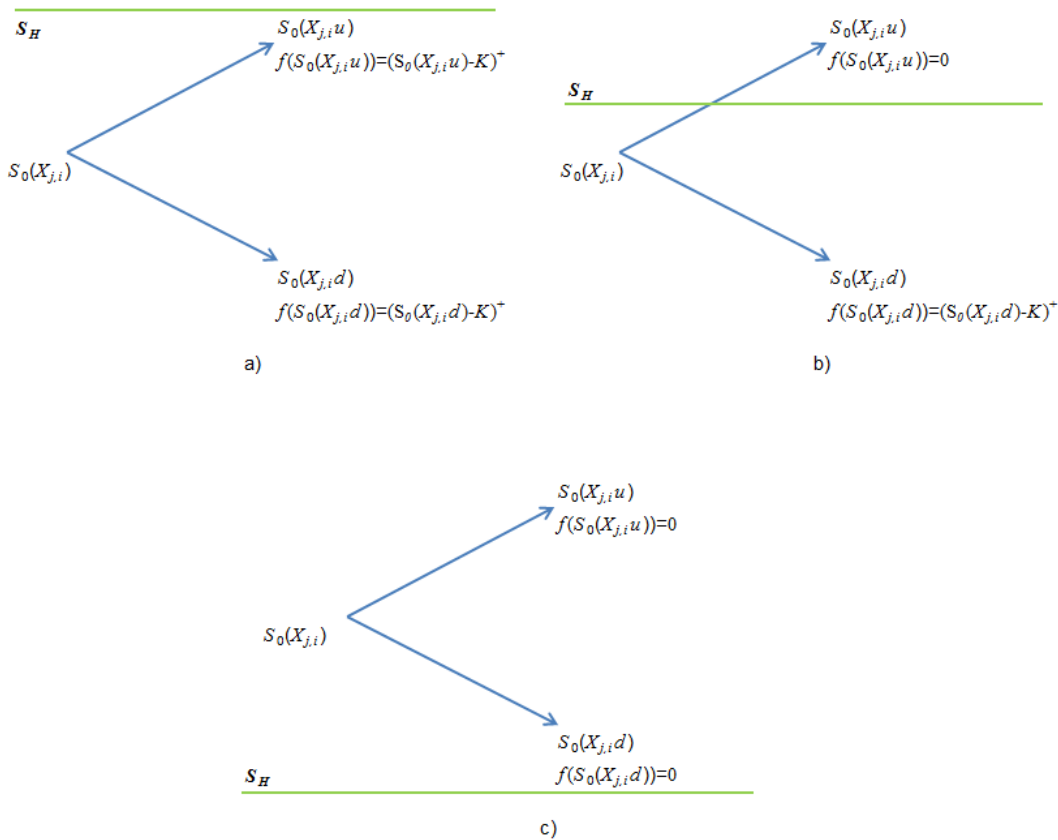
Por lo tanto, la expresión (1.8), para el nodo j,i podrá obtener los valores indicados en el Cuadro 2.2. Cabe mencionar que la representación gráfica de los posibles resultados indicados en dicho cuadro se encuentra en la Figura 2.3. En la Figura 2.3.a, se muestra el cambio en el precio del bien subyacente y su correspondiente payoff cuando el precio se encuentran por debajo de la barrera; en la Figura 2.3.b, el payoff del contrato cuando el nodo superior sobrepasa la barrera; mientras que en Figura 2.3.c, tanto el nodo superior e inferior se encuentran por arriba de la barrera.

Cuadro 2.2 Función del valor de la opción con barrera en cada nodo del árbol, empleando el método CRR

Payoff en el nodo j,i	Condición
$f_{j,i} = \exp(-r\delta t) \left[q_{j,i}(S_0(X_{j,i}u_n) - K)^+ + (1 - q_{j,i})(S_0(X_{j,i}d_n) - K)^+ \right]$	Si $S_0(X_{j,i}u_n) < S_H$ y $S_0(X_{j,i}d_n) < S_H$; es decir, ninguno de los valores procedente de j,i cruzaron la barrera.
$f_{j,i} = \exp(-r\delta t) \left[(1 - q_{j,i})(S_0(X_{j,i}d_n) - K)^+ \right]$	Si $S_0(X_{j,i}u_n) > S_H$; es decir, el nodo superior, procedente de j,i cruzó la barrera.
$f_{j,i} = 0$	Si $S_0(X_{j,i}u_n) > S_H$ y $S_0(X_{j,i}d_n) > S_H$; es decir, los nodos procedentes de j,i cruzaron la barrera

Fuente: Elaboración propia con información de Björk (2004).

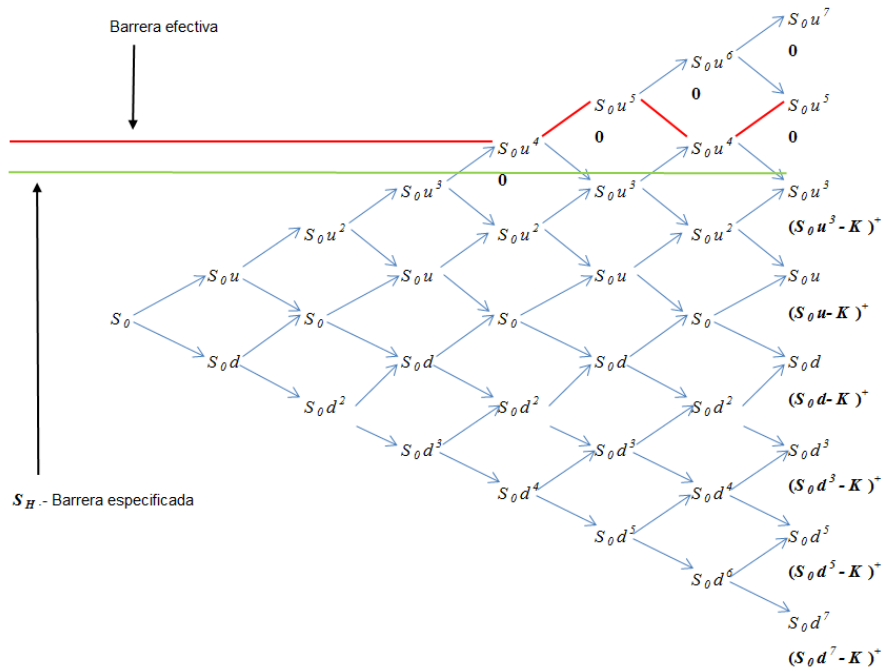
Figura 2.3 Representación del valor de la opción con barrera en cada nodo del árbol, considerando las alternativas del precio del activo subyacente.



Fuente: Elaboración propia.

A manera de ejemplo, la Figura 2.4 muestra la representación del modelo binomial recombinante de siete pasos. Es este árbol se exhibe el valor del payoff del derivado en los nodos finales, así como en los nodos donde el valor del precio del bien subyacente se encuentra por arriba de la barrera especificada S_H .

Figura 2.4 Ejemplo de un árbol binomial, de siete pasos, para la valuación de una opción call up-and-out con precio de ejercicio " K " y barrera knockout (o barrera especificada) igual a S_H .



En este ejemplo se supone, que no existe conjunto de nodos en la red coincidente con el valor de la barrera especificada.

Fuente: Elaboración propia con información de Derman *et. al.* (1995).

De forma general, una vez determinado los payoff en los nodos finales y en los nodos por arriba de la barrera sólo restará realizar el proceso "hacia atrás", empezando en el último paso o $i=n$, y recursivamente se podrá obtener el precio del derivado al tiempo $t=0$ (como se indicó en el Capítulo I).

Es importante señalar, que por medio de este método se podría reducir el error de cuantificación, cuando $n \rightarrow \infty$, pero no el error de especificación si la barrera efectiva fuera distinta a la barrera especificada.

2.4.3 Método Derman para opciones con barrera

Esta sección está encaminada en explicar el procedimiento desarrollado por Derman *et. al.* 1995, el cual está enfocado en perfeccionar el método binomial en las opciones con barreras. El objetivo principal de este método es proporcionar un precio más acorde con las características de las opciones con barrera, tratando de reducir tanto el error de cuantificación como el de especificación.

Para la descripción de este modelo se considerará una opción call up-and-out; es decir, una vez que el precio de la acción haya superado la barrera superior S_H el precio de la opción será igual a cero. El Método Derman considera un pago al tenedor de la opción como compensación, conocido como “rebate” o $T(S)$, por el vencimiento sin valor de la opción como resultado de que el precio de la acción haya cruzado la barrera; sin embargo, en el caso de este trabajo, dicha compensación será igual a cero.

El algoritmo de modificación de la barrera del Método Derman supone que la barrera especificada se encuentra entre dos conjuntos de nodos, unos por arriba y otros por debajo de la barrera especificada. El algoritmo para realizar el ajuste en el valor de la opción por medio de este método es el siguiente:

1. Obtener el valor $V(D)$ de la opción en el nodo “ D ”, ubicado por debajo de la barrera especificada, tomando en cuenta la barrera efectiva.
2. Al conjunto de nodos por debajo de la barrera efectiva se le denominará “barrera modificada” y, de forma similar al punto anterior, se deberá obtener el valor de la opción $V(D)$ y del “rebate” o compensación $T(D)$ en el nodo “ D ”, pero utilizando la barrera modificada como si fuera la barrera pactada. Bajo esta “nueva” barrera, el valor de la opción en el nodo correspondiente será $V(D)=0$, conservándose sólo el valor relativo a $T(D)$.

3. Con esos valores, es decir, con $T(D)$ y $V(D)$, deberá interpolarse para obtener el valor correspondiente a la barrera especificada (véase la Figura 2.5). El objetivo de la interpolación es reconocer la influencia (o nivel de cercanía) de la barrera especificada sobre la barrera modificada y, por ende, su efecto sobre la el valor de la opción. Es decir, obtener una valuación más precisa para el nodo por debajo de la barrera efectiva, por medio de $\tilde{V}(D)$, quien tiene la siguiente expresión analítica²³:

$$\tilde{V}(D) = \frac{B - D}{U - D}V(D) + \frac{U - B}{U - D}T(D)$$

Donde:

B .- Es el valor de la barrera especificada.

U .- Es el valor del nodo ubicado por arriba de la barrera especificada “ B ”. Este nodo pertenece a la barrera efectiva.

D .- Es el valor del nodo ubicado por debajo de la barrera especificada “ B ”. Este nodo pertenece a la barrera modificada.

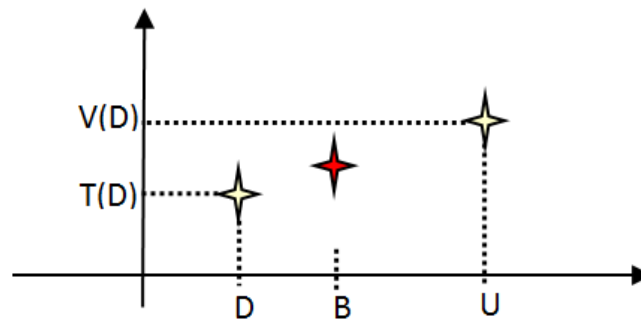
$V(D)$.-El valor de la opción en el nodo “ D ”, tomando en cuenta la barrera efectiva.

$T(D)$.-El valor del “rebate” en el nodo “ D ”, tomando en cuenta la barrera efectiva.

4. Los valores de la opción en la barrera modificada será los obtenidos por medio de la expresión de $\tilde{V}(D)$.
5. Obtener el valor de la opción, por medio del método de inducción hacia atrás (backward induction) usado en el método binomial de CRR (véase Capítulo I).

²³ En el Apéndice 2 se encuentra el desarrollo de la interpolación.

Figura 2.5 Ejemplo para la interpolación del valor de la opción para la barrera especificada "B".



Fuente: Elaboración propia con información de Derman *et al.* (1995).

2.4.4 Método de árboles bino-trinomiales (BTT) para opciones con barrera

En las secciones previas se describieron los Métodos CRR y Método Derman como herramientas para valorar opciones con barrera. El Método de Árbol Bino-Trinomial, o BTT por sus siglas en inglés, surge como herramienta para disminuir el error de especificación²⁴; en palabras de los autores Dai y Lyuu (2010), el BTT es esencialmente un árbol binomial²⁵ con estructuras trinomiales para proveer de flexibilidad, particularmente en los puntos críticos donde se pudieran originar errores de especificación; el resultado es una convergencia suave y con menos oscilaciones. El método principalmente adapta la red de un árbol a los puntos especificados en el contrato, en el caso de nuestro interés, adecua la red a las barreras del contrato. Es importante señalar que, los resultados y definiciones de esta sección provienen de Dai y Lyuu (2010).

El método se basa en crear un árbol CRR trunco en sus dos primeros pasos, pero unido al precio inicial del activo subyacente, S_0 , por medio de una estructura trinomial (véase la Figura 2.6). Así mismo, el árbol generado incluye un

²⁴ Véase la sección 2.4.1.

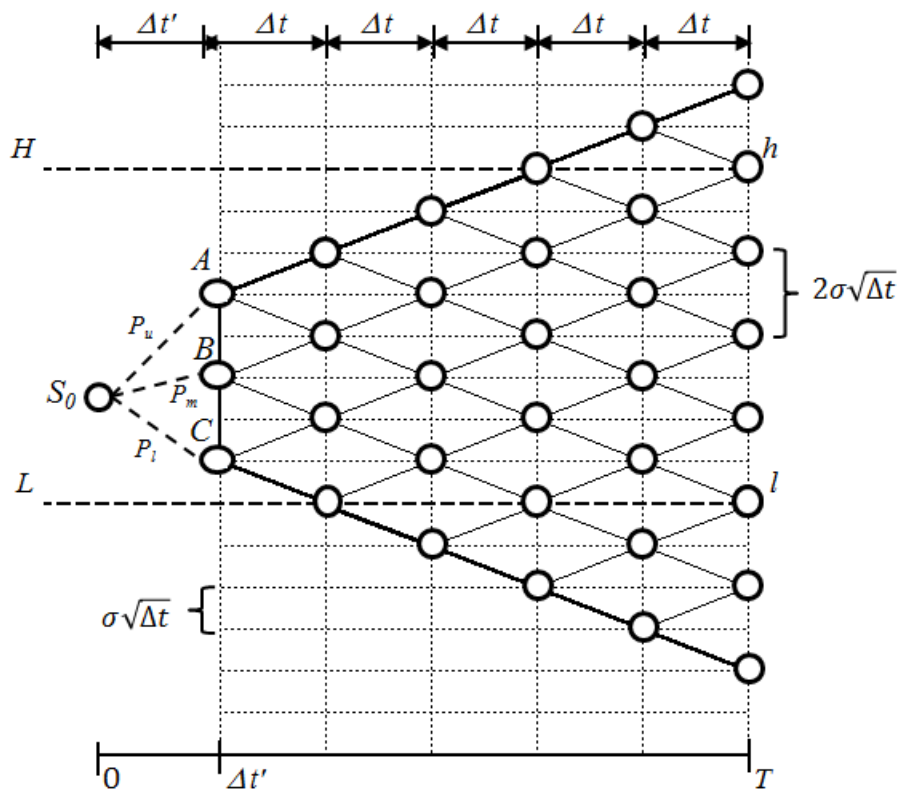
²⁵ Como consecuencia, el método reduce el error de cuantificación, cuando $n \rightarrow \infty$.

conjunto de nodos coincidentes con las barreras, para ello se ajusta la altura de los nodos. El supuesto del modelo, como el de los anteriores, es la distribución log-normal del activo subyacente:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma dW_t} \quad (1.25)$$

donde “ r ” es la tasa anual libre de riesgo.

Figura 2.6 Árbol bino-trinomial (BTT) con barreras “H” y “L” y precio inicial de S_0 .



Fuente: Dai y Lyuu (2010)

Antes de describir los pasos del algoritmo para el método BTT, es conveniente definir el V-log-precio del precio de un bien V' como $\ln(V'/V)$. En consecuencia, y por definición, un V-log-precio de z , implica un precio del bien

igual a $Vexp(z)$.²⁶ Usando esta definición, la altura existente entre cada línea de nodos será de $\sigma\sqrt{\Delta t}$ en términos del S_S -log-precio. Esta cantidad es obtenida a través de los incrementos y decrementos indicados por (1.20) y (1.21), pero, nuevamente, en términos del S_S -log-precio:

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{T/n}\right), \quad (1.20)$$

$$d = \exp\left(-\sigma\sqrt{T/n}\right). \quad (1.21)$$

Por lo tanto, la distancia entre dos nodos adyacentes de un mismo pasó será igual a $2\sigma\sqrt{\Delta t}$.

El algoritmo para realizar el ajuste de la red para coincidir con las barreras y, con ello, reducir el error de especificación en el valor de la opción, se muestra a continuación:

1. Se debe obtener el S_S -log-precio de “ H ” y “ L ”, los cuales se denominarán: “ h ” y “ l ” respectivamente. Así mismo, para asegurar que h y l se encuentren en la red del CRR generado es necesario tomar en cuenta la distancia existente entre los nodos, de tal forma que el cociente $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = k$ corresponderá a un número entero.
2. Suponga un árbol CRR completo de “ m ” pasos, es decir, el intervalo del tiempo está dividido en “ m ” lapsos de longitud igual a $\Delta\tau \equiv \frac{T}{m}$. Sin embargo, esa longitud no garantizará que la distancia entre las barreras, $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}}$, sea un número entero; para ello, Dai y Lyuu (2010), definen Δt como:

$$\Delta t = \left(\frac{h-l}{2\kappa\sigma}\right)^2$$

donde $\kappa = \left\lceil \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}} \right\rceil$.

²⁶ El V-log-precio de un bien con valor de $V' = Vexp(z)$ será igual a $\ln\left(\frac{V'}{V}\right) = \ln\left(\frac{Vexp(z)}{V}\right) = z$.

Sólo resta generar los nodos partiendo de “L” con incrementos de magnitud $\pm 2\sigma\sqrt{\Delta t}$, de esta manera, habrá un nodo coincidente con “H”.

3. El CRR, para formar el árbol binomial trunco del método BTT, tendrá $\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$ pasos, por lo tanto, será necesario determinar el tamaño del primer paso para complementar todo el periodo de vida de la opción. El tamaño del primer pasó será igual a $\Delta t' = T - \left(\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1 \right) \Delta t$.
4. El siguiente paso es determinar los nodos “A”, “B” y “C” en el paso $\Delta t'$. El precio inicial S_0 estará conectado hacia esos nodos creando el árbol trinomial justamente para este paso (véase la Figura 2.6). Además, es necesario que en esos nodos se cumpla con el supuesto de log-normalidad del precio, en particular para el primer y segundo momentos²⁷; para ello se define la función de la media y de la varianza de la siguiente manera:

$$\mu(x) \equiv \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) x \quad (2.2)$$

$$Var(x) \equiv \sigma^2 x \quad (2.3)$$

Haciendo uso de la función S_S -log-precio, la media y la varianza de los nodos “A”, “B” y “C” en el paso $\Delta t'$ será $\mu(\Delta t')$ y $Var(\Delta t')$ conforme lo indicado en las ecuaciones (2.2) y (2.3). Los nodos potenciales estarán distribuidos a lo largo del paso $\Delta t'$ siguiendo la relación indicada en (2.4.a) y (2.4.b):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lfloor l + 2j\sigma\sqrt{\Delta t} & \text{Si el árbol CRR trunco tiene un número de pasos par,} \\ \lfloor l + (2j + 1)\sigma\sqrt{\Delta t} & \text{e.o.c.} \end{array} \right. \quad (2.4.a)$$

$$(2.4.b)$$

²⁷ “El momento r -ésimo de una variable aleatoria “X” alrededor de la media μ , también llamado el momento central r -ésimo, se define como:

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r]$$

donde $r = \{0, 1, 2, \dots\}$. Se deduce que el $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 1$, es decir, el segundo momento central o segundo momento alrededor de la media es la varianza” (Spiegel, Schiller y Srinivasan, 2003:86).

El primer nodo a identificar, será aquél que su S_S -log-precio se encuentre en el intervalo de $[\mu(\Delta t') - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu(\Delta t') + \sigma\sqrt{\Delta t}]$, dicho nodo se denominará como “B”, por otro lado, los nodos “A” y “C” serán el nodo adyacente superior e inferior, respectivamente.

5. Una vez determinado el nodo “B” se obtendrá su S_S -log-precio, el cual se denominará como $\hat{\mu}$. Nótese que, sin pérdida de generalidad, el S_S -log-precio de “B” será de la forma $\hat{\mu} = l + k\sigma\sqrt{\Delta t}$ ²⁸; por lo tanto, el S_S -log-precio de “A” y “C” serán respectivamente $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ y $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Posteriormente se determinará la distancia entre cada uno de estos precios y la media en $\Delta t'$, dicha distancia se encuentra definida en las ecuaciones siguientes:

$$\beta \equiv \hat{\mu} - \mu(\Delta t') \quad (2.5)$$

$$\alpha \equiv \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\gamma \equiv \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}. \quad (2.7)$$

6. Es necesario determinar las probabilidades de las trayectorias de S_0 para alcanzar cada uno de los nodos “A”, “B” y “C”. Lo cual se consigue resolviendo el sistema indicado por las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} P_u \alpha + P_m \beta + P_d \gamma = 0 \quad (2.8) \\ P_u \alpha^2 + P_m \beta^2 + P_d \gamma^2 = Var(\Delta t') \quad (2.9) \\ P_u + P_m + P_d = 1 \quad (2.10) \end{array} \right.$$

Las dos primeras ecuaciones corresponden al primer y segundo momentos de la distribución de log-normalidad del precio; la tercera igualdad, por otro lado, corresponde a la probabilidad del espacio muestral,

²⁸ Donde $k \in \mathbb{Z}$ y será par si el árbol CRR truncado tiene un número de pasos par, en otro caso será impar (véase 2.4).

obtenida por la suma de los tres eventos excluyentes correspondientes a los nodos “A”, “B” y “C”.

7. Finalmente, se deberá obtener el valor de la opción, por medio del método de inducción hacia atrás (backward induction) usado en el método binomial de CRR (véase Capítulo I).

El algoritmo anterior está diseñado para valorar opciones con dos barreras; no obstante, éste mismo se puede emplear para el caso particular cuando las opciones cuenten con una sola barrera, como es el caso de este trabajo.

Para valorar opciones con una sola barrera, suponga una barrera superior “*H*”, sólo será necesario adaptar a la red del CRR trunco el V-log-precio de la barrera, es decir “*h*”. Así mismo, no será necesario realizar el ajuste para obtener pasos “enteros” en el árbol tipo CRR, ya que, al no incorporar la otra restricción de la barrera, la tradicional partición proporcionará un número entero al árbol BTT. Por lo tanto, se simplifica a los pasos del 4 a 7 del algoritmo.

2.5 Valuaciones por medio de simulaciones Monte Carlo

Los métodos que involucran árboles, como se mencionó en las secciones anteriores, realizan una simulación del precio continuo del bien subyacente por medio de un modelo discreto; a diferencia de ello, el método Monte Carlo proporciona una “solución probabilística” al problema de la valuación de las opciones por medio de simulaciones aleatorias del precio del activo, Kwok, (2008). En palabras de De Lara (2008), las simulaciones Monte Carlo “consisten en crear escenarios de rendimientos o precios de un activo mediante la generación de números aleatorios. Posteriormente se observa el comportamiento del activo simulado”.

La justificación sobre utilizar el Método Monte Carlo²⁹ radica en la ley fuerte de los grandes números o ley fuerte de Kolmogorov³⁰ (Jäckel, 2002:18). Así

²⁹ Se usará indistintamente en este trabajo simulación Monte Carlo o Método Monte Carlo.

mismo, el uso más común, de este método, dentro de las finanzas, es encontrar el valor esperado de una función $f(x)$, dada una determinada distribución probabilística, $\psi(x)$ sobre el dominio de “ x ”, de forma general, $x \in \mathfrak{R}^n$ (Jäckel, 2002:7). Es decir:

$$v = E_{\psi(x)}[f(x)].$$

Sin embargo, el punto medular en la implementación del Método Monte Carlo es el uso de números aleatorios que satisfagan una función de distribución³¹ específica; en este punto al respecto, el método se basa en los avances teóricos tanto para la generación de números aleatorios como de mecanismos de validación de dicha “aleatoriedad”. La incapacidad real de las computadoras en generar números aleatorios, debido a que están diseñadas a seguir un conjunto de pasos plenamente determinados por procesos algebraicos, da origen a lo que se denomina *números pseudo-aleatorios* (NPA).

2.5.1 Generadores de números pseudo-aleatorios (GNPA)

Como se mencionó anteriormente, el método de simulaciones Monte Carlo estudia sistemas con componentes aleatorios; sin embargo, debido al principio determinista de los algoritmos para mimetizar el comportamiento de los números aleatorios surgen los números pseudo-aleatorios, los cuales están descritos, usualmente³², por medio de una semilla, x_0 , y por un conjunto de variables de estado, E , a las cuales se les aplicará una función de transición iterativa, τ , para obtener un nuevo número o variable de estado x_i ; finalmente se aplicará una

³⁰ La ley fuerte de los grandes números indica lo siguiente: Sean X_1, X_2, \dots, X_n una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas, tales que:

$$E[X_i] = \mu.$$

Entonces, con probabilidad 1,

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \rightarrow \mu$$

cuando $n \rightarrow \infty$ (Ross, 1997:73).

³¹ Generalmente es producir variables aleatorias distribuidas uniformemente para posteriormente transformarlas hacia otro tipo de distribuciones (Glasserman, 2004:39).

³² Se adoptó la nomenclatura utilizada por Lemieux (2009), a excepción de la letra “ S ” que dicho autor utiliza en la identificación del conjunto de las variables estado, pero podría causar confusión, pues dicha letra es usada, a lo largo de este trabajo, para identificar al activo subyacente en los productos derivados.

función ξ para obtener las variables de salida o conjunto T (Jäckel, 2002:65-66 y Lemieux, 2009:59).

Un verdadero generador de números aleatorios debiera ser capaz de generar una secuencia de variables aleatorias independientes U_1, U_2, \dots , con distribución uniforme entre cero y uno; esencialmente, en otras palabras, se pide que no exista correlación entre pares de variables y, en forma general, la variable U_i no dependa de las $i-1$ variables anteriores (Glasserman, 2004:40). En contraste, los generadores de números pseudo-aleatorios (GNPA) pueden presentar alguna de las siguientes características, las cuales les impiden generar números completamente aleatorios (Glasserman, 2004:40, Lemieux, 2009:24 y (Jäckel, 2002:67-70):

1. El método podría incluir “puntos fijos” a partir de los cuales el algoritmo no sea capaz de generar otro número. Estos puntos también son considerados inestables o “repelentes” pues cualquier número, dentro de una vecindad centrada en el punto fijo, al aplicarle el método será repelido fuera de la vecindad.
2. El algoritmo, después de un cierto periodo, repetirá números; es decir, son cíclicos. Sin embargo, el perfeccionamiento de métodos generadores está enfocado en incrementar el periodo de repetición³³.
3. Los GNPA producen secuencias finitas de valores.

Junto con el avance en la generación de NPA han surgido pruebas para evaluar la calidad del generador, los cuales permiten calificar a los algoritmos como “buenos” o como “malos” (en este último caso se podrían obtener resultados inválidos) (Lemieux, 2009:24,57).

De acuerdo a Lemieux (2009), se podría implementar, en sus propias palabras, un generador de “verdaderos” números aleatorios basado en dispositivos

³³ De acuerdo a Lemieux (2009) el método “MRG32k3a” de L’Ecuyer tiene un periodo de 2^{191} , mientras que el método “Mersenne-Twister” de Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura, tiene un periodo de $2^{19937}-1$.

físicos; a pesar de ello, no es lo más conveniente por las siguientes razones (Lemieux, 2009:24,58):

1. Los errores de medición y errores técnicos serían difíciles de medir, además de sesgar los resultados.
2. Los generadores podrían ser muy lentos para la generación de millones de datos.
3. Se perdería la propiedad de repetitividad de secuencias de números aleatorios, como consecuencia, no podrían desarrollarse técnicas de reducción de varianza o procesos de “*debugging*” en el algoritmo mismo.

2.5.2 Familias de generadores de números pseudo-aleatorios (GNPA)

Existen varios tipos de familias de GNPA, pero los más comunes se muestran a continuación³⁴:

1. **Recurrencias lineales.**- Ejemplos de esta familia de generadores incluye los siguientes tipos:
 - 1.1. Generador lineal de congruencia o LCG, por sus siglas en inglés. En este tipo de generadores el conjunto estado es $E = \mathbb{Z}_m$; la función de transformación es de la forma $\tau(x) = (ax + c) \bmod m$, con $m > 1$; y la función de salida es $\xi(x) = \frac{x}{m}$. En la función de transformación se le pide, tanto a la constante “ a ” como a “ c ”, sean números enteros distintos de cero, a dichos números se les conoce como “multiplicador” e “incremento”, respectivamente; además, la semilla debe ser un número entero entre 1 y $m-1$ (Brandimarte, 2002:225, Glasserman, 2004:41 y Lemieux, 2009:61).
 - 1.2. Generador recursivo múltiple, o MRG por sus siglas en inglés. En este caso, el conjunto estado es de la forma $E = \mathbb{Z}_m^k$ donde $k \geq 1$ y m un número primo, así mismo, se requiere una variable de estado inicial

³⁴ Se citan los métodos más difundidos; sin embargo, para el lector interesado en este tema, Glasserman (2004) y Lemieux (2009) proporcionan una vasta bibliografía sobre la generación de números pseudoaleatorios.

$y_i = (x_i, \dots, x_{i-k+1})$ para el paso i ; la función de transformación es de la forma $x_i = \tau(y_i) = (\sum_{j=1}^k a_j x_{i-j}) \bmod m$, con $k \geq i$; y la función de salida es $\xi(y_i) = \frac{x_i}{m}$; igual al caso anterior, cada una de las “ a_j ” deberán ser números enteros distintos a cero. Es importante señalar que, existen algunos casos especiales de los MRG, los cuales se muestran a continuación (Lemieux, 2009:62-63):

1.2.1. Si k es igual a uno, se tendrá un LCG, donde el incremento es igual a cero. A dicha subfamilia de generadores se les conoce como multiplicativos (MLCG, por sus siglas en inglés).

1.2.2. En los Generadores Fibonacci con Rezagos aditivos la función de transición está regida por funciones con la siguiente forma:

$$x_i = (x_{i-r} + x_{i-k}) \bmod m.$$

1.2.3. Combinación de generadores.- En este tipo de generadores se combinan “ J ” generadores en paralelo para obtener un periodo mucho más largo. Por ejemplo, L’Ecuyer, citado por Glasserman (2004), recomienda la combinación de dos MRG: a) el primero con módulo $2^{31}-1$ y coeficientes:

$$a_1 = 0, a_2 = 63,308, a_3 = -18,3326;$$

por lo tanto tendrá un periodo de 93; el segundo con módulo 2,145,483,479 y coeficientes

$$a_1 = 86,098, a_2 = 0, a_3 = -539,608;$$

tendrá un periodo cercano a 93; al combinar estos dos generadores se producirá un generador con un periodo cercano a 2^{185} .

1.3. Generadores basados en recurrencias módulo 2. Este tipo de generadores se sustentan en el procesamiento binario de las computadoras (Lemieux, 2009:64). Dentro de esta familia de generadores se encuentran los de registro de cambio y retroalimentación lineal (LFSR, por sus siglas en inglés), los cuales poseen una función de transición dictada por

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^k a_j x_{i-j} \right) \text{mod } 2,$$

mientras que la función de salida es de la forma

$$\xi(x_i) = \sum_{j=1}^L x_{iv+j-1} 2^{-j},$$

donde el paso “ v ” y “ L ” son números enteros positivos.

Este método se puede generalizar cambiando los bits “ x_i ” por vectores “ x_i ” con “ L -bits”, es decir, $x_i \in \mathbb{R}^L$. Es importante señalar que, dentro de este tipo de generalizaciones pertenece el famoso método *Mersenne-Twister*³⁵, el cual, de acuerdo a Lemieux (2009), es el generador por default en MatLab 7.4.

2. **Generadores con acarreo.** La función de transición en este tipo de generadores es de la forma (Hechenleitner, 2004:12):

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^k a_j x_{i-j} + c_{i-1} \right) \text{mod } m;$$

$$c_i = \left\lfloor \left(\sum_{j=1}^k a_j x_{i-j} + c_{i-1} \right) / m \right\rfloor,$$

donde a c_i se le denomina acarreo.

Dentro de esta familia se encuentran los métodos add-with-carry (AWC) y subtract-with-borrow (SWB). En el caso del generador AWC la función de transición es

$$x_i = (x_{i-r} + x_{i-k} + c_i) \text{mod } m,$$

donde

$$c_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{i-r} + x_{i-k} + c_i < m \\ 1 & \text{si } x_{i-r} + x_{i-k} + c_i \geq m; \end{cases}$$

además $k > r$ son números enteros (Marsaglia y Zaman, 1991:465). Por otro lado, el generador SWB, de forma similar, está descrito por

$$x_i = (x_{i-r} - x_{i-k} - c_i) \text{mod } m,$$

³⁵ En la página web del “Mersenne Twister” se encuentra tanto la explicación del método como el código para distintos lenguajes: <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html>. Así mismo, sus autores señalan que este método fue diseñado tomando en cuenta los defectos de los generadores existentes hasta ese momento, además de ser un generador rápido y con uso eficiente de memoria (Matsumoto y Nishimura, 2011).

pero en este caso el acarreo estará conformado por (Marsaglia y Zaman, 1991:466):

$$c_{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i-r} + x_{i-k} + c_i < b \\ 0 & \text{si } x_{i-r} + x_{i-k} + c_i \geq b. \end{cases}$$

3. **Generadores no lineales.** Como su nombre lo indica, en este tipo de generadores ni la función de transición ni la función de salida son lineales, por lo que su estructura es más compleja. Un ejemplo de esta familia de generadores es el generador de congruencia inversa o ICG, por sus siglas en inglés; en este generador la función de transición y de salida son de la forma $x_i = (ax_{i-1}^- + c) \bmod m$ y $\xi = \frac{x_i}{m}$, respectivamente; donde x_i^- , es tal que $x_i^- x_i \equiv 1 \bmod m$ (Lemieux, 2009:67 y Hechenleitner, 2004:12).

Aunque, este tipo de generadores es computacionalmente demandante y muy lentos, pueden ser de gran utilidad “para comparar resultados en casos donde las deficiencias de un generador de números [pseudo] aleatorios sea la causa de preocupación” (Glasserman, 2004:53).

Finalmente, se deberá tener en cuenta las siguientes consideraciones para la creación de GNPA (Glasserman, 2004:42):

- a) **Longitud del periodo.**- Como se ha mencionado anteriormente, es conveniente contar con método donde el periodo de repetición sea muy prolongado, de esta manera se generarán distintos valores antes de su repetición.
- b) **Repetitividad.**- La cual ha sido considerada en la sección anterior.
- c) **Velocidad.**- El generador será utilizado (o llamado) varias veces durante las simulaciones, de ahí lo beneficioso de contar con un GNPA veloz.
- d) **Portabilidad.**- El generador no deberá depender de la plataforma computacional, es decir, no deberá estar subordinado al lenguaje de programación, compilador o equipo de cómputo. También deberá ser de fácil implementación (Lemieux, 2009:60).

- e) **Aleatoriedad.**- El generador deberá someterse a un riguroso escrutinio estadístico para probar su calidad.

2.5.3 Aplicación de las simulaciones Monte Carlo en la valuación de opciones europeas tipo call

El punto inicial al utilizar simulaciones Monte Carlo en la valuación de productos financieros es la generación de las posibles trayectorias o escenarios de los activos subyacentes. En el caso de las opciones tipo “vainilla” aunque realmente lo importante es conocer el valor del activo subyacente al momento del vencimiento del derivado, hay ciertos contratos, como las opciones con barrera, donde su valor dependerá de la trayectoria del activo subyacente, de ahí la relevancia en conocer toda la trayectoria, o, en su defecto, el valor en ciertos instantes (Brandimarte, 2002:430).

2.5.3.1 Creación de Escenarios o trayectorias

Sin embargo, en la construcción de los escenarios o trayectorias, por medio del Método Monte Carlo, se generan dos tipos de errores (Brandimarte, 2002:430):

1. error de la muestra y
2. error de discretización.

El primer error está relacionado con la naturaleza “aleatoria” del Método Monte Carlo; mientras que el segundo error es resultado de la discretización de un modelo en tiempo continuo, debido a la incapacidad de las computadoras en atacar problemas continuos. La forma más común de discretización de una ecuación diferencial estocástica es por medio del Método Euler; por ejemplo, la ecuación diferencial estocástica de Itô

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t,$$

se escribe en su forma discreta como:

$$\delta S_t = S_{t+\delta t} - S_t = a(S_t, t)\delta t + b(S_t, t)\sqrt{\delta t}\epsilon,$$

donde δt es el paso de discretización y ϵ es un número aleatorio con distribución normal estándar (Brandimarte, 2002:430-431 y Seydel, 2009:11,34 y 102).

De forma análoga, la versión discreta de la dinámica del precio del bien subyacente correspondiente a un movimiento geométrico browniano como en (1.23), es decir:

$$(1.23): \quad dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (2.11)$$

tendrá la siguiente forma (Brandimarte, 2002: 431 y Venegas, 2008:856):

$$S_{t+\delta t} = (1 + \mu\delta t)S_t + \sigma S_t\sqrt{\delta t}\epsilon. \quad (2.12)$$

El problema con esta adaptación discreta es que cada uno de los valores $S_i = S(i\delta t)$ así generados se distribuyen como una normal, en lugar de distribuirse como una *lognormal*, lo cual es el supuesto del comportamiento del activo subyacente. Este error puede aminorarse reduciendo el tamaño de los pasos δt en la discretización, a costa de tiempo y recursos computacionales (Brandimarte, 2002: 431).

2.5.3.2 Simulación del movimiento geométrico browniano

El problema de la versión discreta presentada en la ecuación (2.12) se soluciona aplicando el lema de Itô a $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ obteniendo la ecuación:

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t. \quad (2.13)$$

Al utilizar las propiedades de la distribución *lognormal* y definiendo a $v = \mu - \sigma^2/2$, se tendrá que:

$$S_t = S_0 \exp\left(vt + \sigma \int_0^t dW(\tau)\right)$$

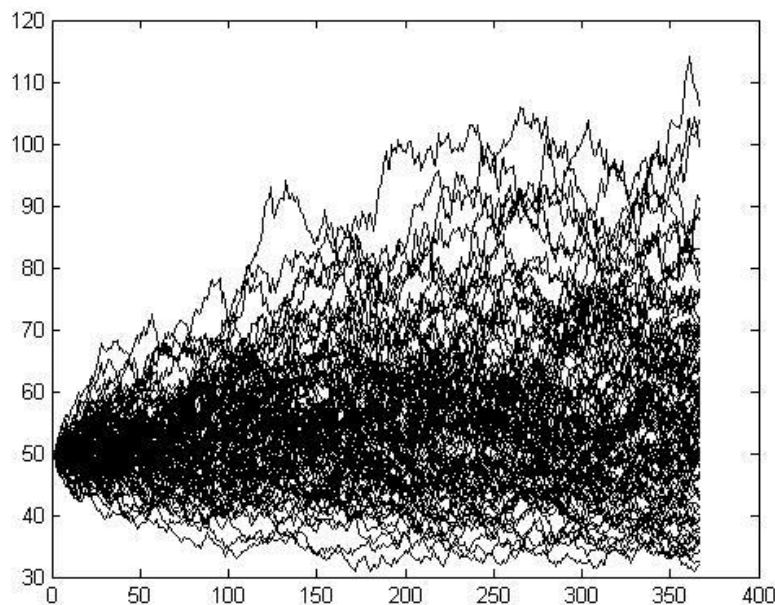
consecuentemente, la versión discreta con pasos de tamaño δt estará dada por la ecuación (2.14),

$$S_{t+\delta t} = S_t \exp(v\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\epsilon), \quad (2.14)$$

por medio de la cual se podrán generar trayectorias para el activo subyacente (Brandimarte, 2002: 431-432 y Venegas, 2008:856).

En la Figura 2.7 se presenta un ejemplo de simulación de cien escenarios del precio del activo, generados por medio de simulaciones Monte Carlo y la versión discreta indicada en (2.14), donde el activo inicia con precio de \$50, y con una tasa media de retorno, μ , de 10% y una tasa de volatilidad, σ , de 30%.

Figura 2.7 *Trayectorias generadas por el Método Monte Carlo para un subyacente con precio inicial, S_0 , de 50, μ de 0.1, y, σ de 0.3.*



En la figura se muestran 100 trayectorias del precio del activo para un año, con pasos de un día.

Fuente: Brandimarte (2002)

2.5.3.3 Valuación de productos derivados utilizando el Método Monte Carlo

En la valuación de productos derivados aplicando el Método Monte Carlo se supondrá que la dinámica del precio del bien subyacente corresponde a un

movimiento geométrico browniano, como en (2.11), y recurriendo a argumentos sobre *valuación neutral al riesgo* se tendrá la dinámica

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (2.15)$$

Por lo tanto, la valuación del producto derivado será el valor presente, aplicando la tasa libre de riesgo “ r ”, de la esperanza de su payoff, representado por la función f , en el tiempo T , es decir, $e^{-rt}E[f(S(T))]$.

En consecuencia, para evaluar la esperanza por medio del Método Monte Carlo es necesario simular trayectorias del precio del activo subyacente sobre el intervalo $[0, T]$, y para cada una de las trayectorias se calculará el valor presente del payoff, $e^{-rT}(f(S(T)))$, posteriormente se obtendrá el promedio de los valores presentes, es decir:

$$P_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} (f(S_i(T))) \quad (2.16)$$

donde S_i representa la trayectoria o escenario i -ésimo del comportamiento del activo subyacente del producto derivado y n es el número total de escenarios considerados.

El resultado del promedio aritmético, indicado en (2.16) se considerará como el estimado del precio del producto derivado proporcionado por las simulaciones Monte Carlo (Glasserman, 2004:30).

2.5.3.4 Valuación de una opción europea de compra utilizando el Método Monte Carlo

Para emplear el método Monte Carlo en la valuación de opciones europeas se utilizará la ecuación diferencial estocástica indicada en (2.15). Así mismo, el payoff de la opción de compra en el momento T será $f(T) = (S(T) - K)^+$, donde K representa el precio de ejercicio.

Por lo tanto, de manera similar a la subsección anterior, el precio de la opción de compra por medio del Método Montecarlo, empleando n escenarios, será igual a al promedio indicado en (2.17) (Venegas, 2008:856).

$$P_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} ((S_i(T) - K)^+). \quad (2.17)$$

2.6. Valuaciones por medio de simulaciones Monte Carlo de opciones con barrera

En la sección anterior se utilizó el Método Monte Carlo para la valuación de productos derivados en forma general y las opciones tipo vainilla como un caso particular. En esta sección se estudiará el caso de opciones con barrera, derivados donde su payoff depende del comportamiento de la trayectoria del activo subyacente. Es importante señalar que el material presentado aquí está ampliamente basado en Brandimarte (2002) y Lemieux (2009).

2.6.1 Método Monte Carlo en la valuación de opciones con barrera

La ecuación (2.16), indicada en la sección previa, es el estimador del precio del producto derivado por medio de simulaciones Monte Carlo, en dicha fórmula sólo deberá remplazarse la función general del payoff “ f ” por la correspondiente función relativa a las opciones con barrera.

Suponga una opción de venta “down-and-in” cuyo payoff está indicado por medio de la expresión (2.18).

$$f(S_T) = \begin{cases} (K - S_T)^+ & \text{si } \exists t \in [0, T] \text{ tal que } S(t) < S_L \\ 0 & \text{e. o. c.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Utilizando una función indicadora, la expresión anterior puede describirse como:

$$f(S_T) = I(S)(K - S_T)^+, \quad (2.19)$$

donde

$$I(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_j < S_L \text{ para alguna } j \\ 0 & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el Método Monte Carlo se formula de la siguiente manera:

$$(2.16): \quad P_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} \left(f(S_i(T)) \right)$$

$$P_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-rT} (I(S_i)(K - S_T)^+), \quad (2.20)$$

donde S_i representa la trayectoria o escenario i -ésimo del comportamiento del activo subyacente del producto derivado y n es el número total de escenarios considerados. Dicho de otra forma, de manera general, sólo es necesario verificar si la trayectoria cruzó en algún punto las barreras, y se procederá con el procedimiento para la valuación de productos derivados por medio de simulaciones Monte Carlo (Brandimarte, 2002:446).

2.6.2 Método Monte Carlo Condicional en la valuación de opciones con barrera

La varianza del estimador Monte Carlo es de la forma:

$$E[(\bar{X}(n) - \mu)^2] = Var(\bar{X}(n)) = \frac{\sigma^2}{n}$$

lo cual indica que una manera de reducir la varianza es por medio del incremento de simulaciones, con una tasa de convergencia del orden de $1/\sqrt{n}$. Dicha tasa es considerada extremadamente lenta³⁶, dando lugar al uso de técnicas de *reducción de varianza*.

El propósito de las técnicas de reducción de varianza queda mejor explicado a través de la “Integración Monte Carlo”, en la cual se construye un estimador para integrales de la forma $\int_V f(x) dx$, donde $f(x)$ es una función definida sobre el dominio “ V ”, es decir: $I(f) = \int_V f(x) dx$; como se mencionó anteriormente, el incremento en el número de simulaciones reducirá la volatilidad del estimador, no obstante, se han desarrollado técnicas (o métodos) para reducir la varianza reduciendo el numerador. El objetivo es encontrar una función ϕ , de tal forma que

³⁶ Por ejemplo, si se requiriera reducir el error por un factor de 10, se deberá incrementar el tamaño de la muestra en 100 ($1/\sqrt{100} = 1/10$).

su integral también sea $I(f)$, pero con una menor varianza, de ahí el nombre de técnicas de reducción de varianza³⁷ (Lemieux, 2009:2 y 12).

Para el caso de las valuaciones de opciones con barrera se utilizará la “reducción de varianza por condicionamiento” o “Método Monte Carlo Condicional”; en este método, se calcula la esperanza del payoff condicionado al valor tomado por otra función auxiliar (Lemieux, 2009:119).

Con la finalidad de valorar las opciones con barrera por medio de simulaciones Monte Carlo Condicional es necesario determinar el punto j^* de la trayectoria donde el precio del activo subyacente haya cruzado las barreras y, como efecto, se haya activado un producto derivado plain vanilla. Es decir, la activación estará condicionada al tiempo $t^*=j^*dt$ y al precio S_{j^*} , que es el precio del activo subyacente por medio del cual se detectó el cruce de la barrera. Por ejemplo, una opción de venta “down-and-in” se comportará como una opción de venta plain vanilla a partir de t^* , lo cual permitirá el uso de la fórmula de BSM³⁸ para obtener el precio en ese momento, el cual representaremos como

$$BSM_P(S_{j^*}, K, T - t^*),$$

indicando que se trata del precio de un put tipo vainilla, con precio inicial del activo subyacente igual a S_{j^*} , precio de ejercicio igual a K , y un plazo residual de $T-t^*$. Consecuentemente, el precio de la opción con barrera, si el precio del activo subyacente cruza la barrera antes de la fecha de vencimiento del contrato, estará dada por:

$$E[I(S)(K - S_M)^+ | j^*, S^*] = e^{r(T-t^*)} BSM_P(S_{j^*}, K, T - t^*).$$

Por lo tanto, en una trayectoria “S”, el estimador del precio, generado por medio del Método Monte Carlo Condicional, será (Brandimarte, 2002:447-448):

³⁷ El estudio de las técnicas de reducción de varianza va más allá del objetivo de este trabajo; sin embargo, una profunda descripción de los métodos se puede encontrar en Glasserman (2004) y en Lemieux (2009).

³⁸ BSM.- Al modelo desarrollado por Fischer Black, Myron Sholes y Robert Merton, el cual conduce a una fórmula cerrada para la valuación de opciones plain vanilla.

$$I(S)e^{-rt^*} BSM_P(S_j^*, K, T - t^*).$$

2.7. Fórmulas cerradas para la valuación de opciones con barrera

En esta sección se muestra las fórmulas analíticas para la valuación de opciones con barrera (Wilmott, 2007: 308-309). Para estas fórmulas se requieren las siguientes expresiones:

$$a = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{-1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad b = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_2 = \frac{\log(S/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_3 = \frac{\log(S/S_b) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_4 = \frac{\log(S/S_b) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_5 = \frac{\log(S/S_b) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_6 = \frac{\log(S/S_b) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_7 = \frac{\log(SK/S_b^2) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_8 = \frac{\log(SK/S_b^2) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Las fórmulas para las opciones de compra se encuentran indicadas en el Cuadro 2.3.

Cuadro 2.3 Fórmulas analíticas para la valuación de opciones de compra con barrera

Tipo de opción	Fórmula
Up-and-out	$c_{uo} = S(N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))$
Up-and-in	$c_{ui} = S(N(d_3) + b(N(d_6) - N(d_8))) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_4) + a(N(d_5) - N(d_7)))$
Down-and-out	Si $K > S_b$: $c_{do} = S(N(d_1) - b(1 - N(d_8))) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2) - a(1 - N(d_7)))$ Si $K < S_b$: $c_{do} = S(N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_4) - a(1 - N(d_5)))$
Down-and-in	Si $K > S_b$: $c_{di} = Sb(1 - N(d_8)) - Ke^{-r(T-t)} a(1 - N(d_7))$ Si $K < S_b$: $c_{di} = S(N(d_1) - N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) + a(1 - N(d_5)))$

Fuente: Wilmott (2007)

De la misma forma, se muestran las fórmulas para las opciones de venta en el Cuadro 2.4.

Cuadro 2.4 Fórmulas analíticas para la valuación de opciones de venta con barrera

Tipo de opción	Fórmula
Up-and-out	Si $K > S_b$: $p_{uo} = -S(1 - N(d3) - bN(d6)) + Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d4) - aN(d5))$ Si $K < S_b$: $p_{uo} = -S(1 - N(d1) - bN(d8)) + Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d2) - aN(d7))$
Up-and-in	Si $K > S_b$: $p_{ui} = -S(N(d3) - N(d1) + bN(d6)) + Ke^{-r(T-t)}(N(d4) - N(d2) + aN(d5))$ Si $K < S_b$: $p_{ui} = -SbN(d8) + Ee^{-r(T-t)}aN(d7)$
Down-and-out	$p_{do} = -S(N(d3) - N(d1) - b(N(d8) - N(d6))) + Ee^{-r(T-t)}(N(d4) - N(d2) - a(N(d7) - N(d5)))$
Down-and-in	$p_{di} = -S(1 - N(d3) + b(N(d8) - N(d6))) + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d4) + a(N(d7) - N(d5)))$

Fuente: Wilmott (2007)

Capítulo 3

Implementación de procedimientos numéricos para la valuación de opciones con barrera

De acuerdo a (Derman, et. al., 1995:1) las opciones con barreras que actualmente se negocian no tienen fórmulas analíticas cerradas, principalmente porque los supuestos en los trabajos analíticos realizados se basan en:

- barreras simples fijas o con incrementos exponenciales;
- se asume una evolución lognormal del precio de la acción; y
- son opciones de tipo europeo.

Como consecuencia, debido a la inexistencia de formas cerradas, es necesario recurrir a soluciones numéricas.

En el capítulo anterior se analizaron tanto las características de las opciones con barrera como algunos métodos numéricos para su valuación; en este capítulo se mostrarán los resultados de la implementación de los métodos analizados anteriormente, es decir:

1. Método de árbol binomial o CRR
2. Método Derman
3. Método Bino-trinomial (BTT)
4. Método Monte Carlo y
5. Método Monte Carlo Condicional,

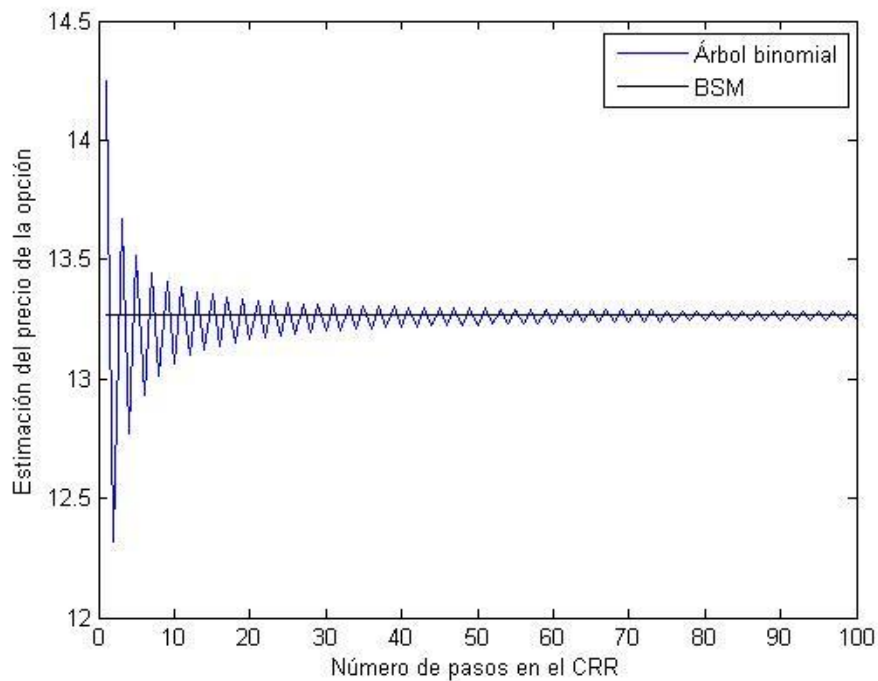
comparando los resultados contra las fórmulas cerradas.

3.1. Procedimientos numéricos utilizando árboles en la valuación de opciones con barrera

Dentro de las soluciones numéricas más citadas en la literatura especializada se encuentran los árboles binomiales, también conocidos como CRR. Sin embargo, el uso de árboles CRR presenta problemas de convergencia, inclusive en la valuación de las tradicionales opciones europeas. Por ejemplo, considere una

opción de compra, tipo europea, con las siguientes características: $S=100$, $K=100$, $T= 1$ año, $r=10\%$ y $\sigma = 20\%$; utilizando el modelo de BSM se obtiene un valor “analítico” de la opción call igual a 13.2697 u.e.³⁹; sin embargo, al realizar la valuación por medio de los árboles CCR⁴⁰ se puede observar una oscilación alrededor de este valor analítico, obsérvese la Gráfica Figura 3.1.

Figura 3.1 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra tipo europea.



En la figura se muestran los diversos valores obtenidos, dependiendo del número de pasos, para una opción europea de compra, tipo europeo, con las siguientes características: $S=100$, $K=100$, $T= 1$ año, $r=10\%$ y $\sigma = 20\%$. La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la fórmula de BSM.

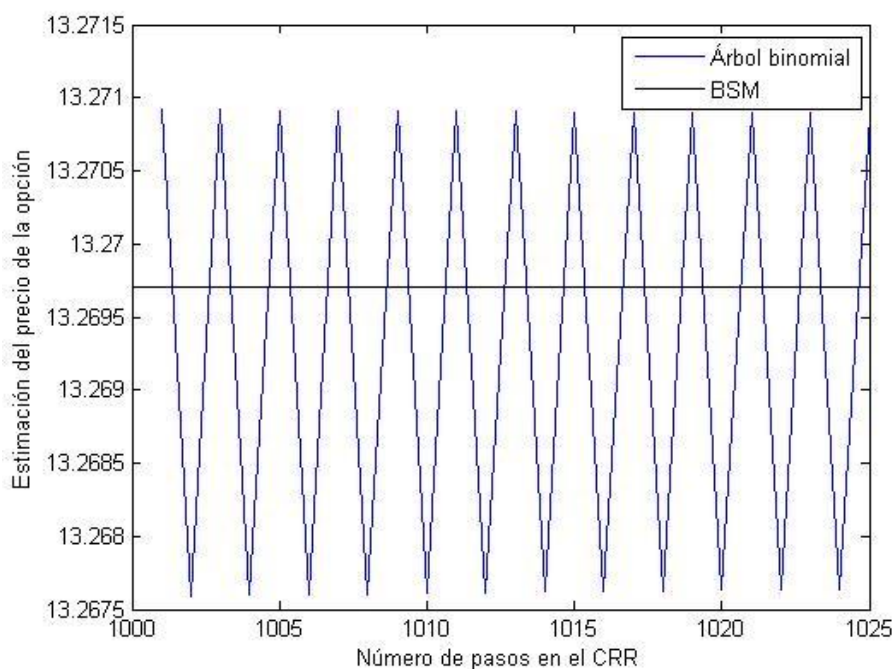
Fuente: Derman et. al. (1995).

³⁹ El código para obtener el valor de una opción, donde el activo subyacente es una acción que no paga dividendos, utilizando el modelo BSM se encuentra en el Apéndice 3.

⁴⁰ El código utilizado en la valuación de la opción por medio de CRR se encuentra en el Apéndice 4.

Aunque en la figura anterior prevalece la tendencia hacia el valor analítico, la oscilación persistirá a pesar de incrementar el número de pasos durante la vida de la opción; por ejemplo, en la Figura 3.2. se muestra el comportamiento oscilatorio de la valuación alrededor del valor proporcionado por BSM para una partición del periodo del tiempo en milésimas.

Figura 3.2 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra tipo europea, con partición del periodo del tiempo en milésimas.



En la figura se muestran los diversos valores obtenidos al realizar alrededor de 1000 pasos o particiones del periodo de vida de una opción europea de compra, tipo europeo, con las siguientes características: $S=100$, $K=100$, $T= 1$ año, $r=10\%$ y $\sigma = 20\%$. La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la fórmula de BSM.

Fuente: Derman et. al. (1995).

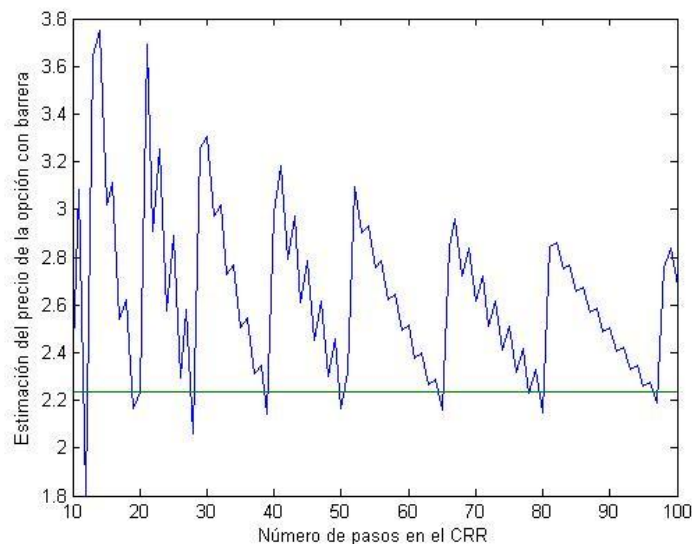
Este comportamiento oscilatorio nos acompañará a lo largo de la valuación de las opciones por medio de los árboles incluyendo a las opciones con barreras, aunque en este tipo de opciones la velocidad de convergencia será más lenta, con respecto al método CRR. Los métodos numéricos a analizar se aplicarán en la

valuación de una opción call barrera knock-out con las siguientes características: $S=100$, $K=100$, $T=1$, $r=10\%$, $\sigma=20\%$, y la barrera superior o KoU igual a 125. Además, se utilizará como referencia sobre la convergencia y variabilidad de los métodos numéricos de valuación el precio de 2.2338 u.e., proveniente del resultado de aplicar la correspondiente fórmula cerrada⁴¹ a la opción up-and-out descrita anteriormente.

3.1.1. Valuación de opciones con barrera utilizando CRR

Al realizar la valuación por medio de los árboles CRR⁴² en las opciones con barrera se puede observar un comportamiento tendencial hacia el correspondiente valor analítico; sin embargo, esta tendencia no es suave, sino más bien dramáticamente accidentada y muy lenta, generando lo que algunos autores han denominado *dientes de sierra*, como se muestra en la Figura 3.3.

Figura 3.3 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

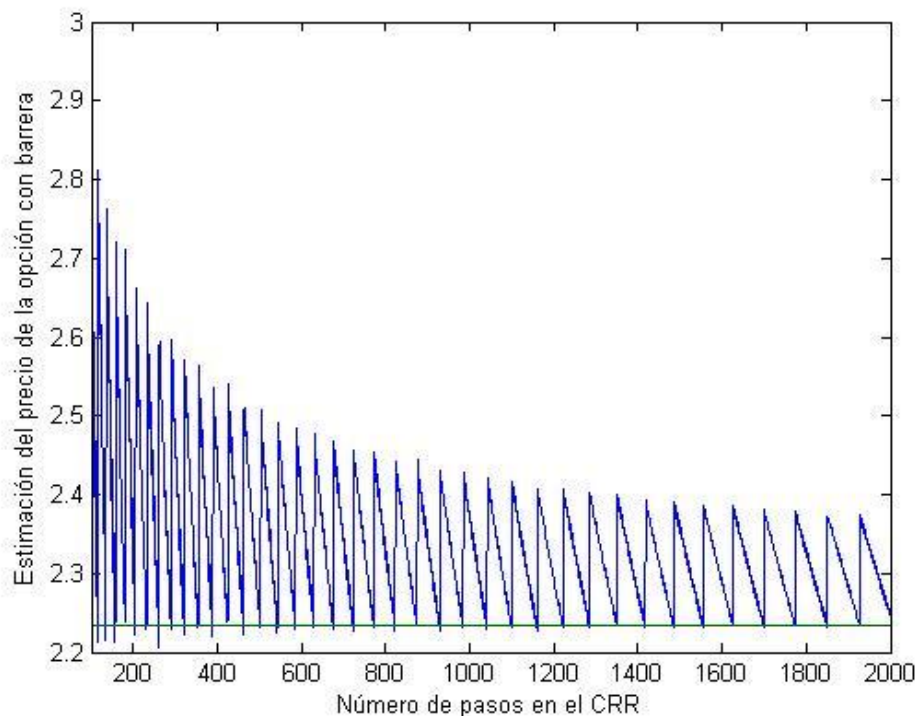
Fuente: Derman *et. al.* (1995).

⁴¹ El código utilizado de las formulas cerradas para opciones con barrera se encuentra en el Apéndice 5.

⁴² El código utilizado en la valuación de la opción con barrera por medio de CRR se encuentra en el Apéndice 6.

En la Figura 3.3 se muestran pasos o particiones del tiempo hasta en centésimas; lamentablemente, el incremento en el número de pasos no muestra una clara tendencia y convergencia, por ejemplo, en la Figura 3.4 se puede observar la alta volatilidad sobre el precio proporcionado por el CRR a pesar de considerar particiones mayores.

Figura 3.4 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 100 a 2000.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

En las figuras del Apéndice 7 se presentan los resultados de dividir el periodo de tiempo en pasos entre 3,001 a 3,100 partes, donde se puede advertir que, aún a ese nivel de partición, el precio no indica una clara tendencia hacia un valor, prevaleciendo el error de cuantificación. En dichas figuras, el precio

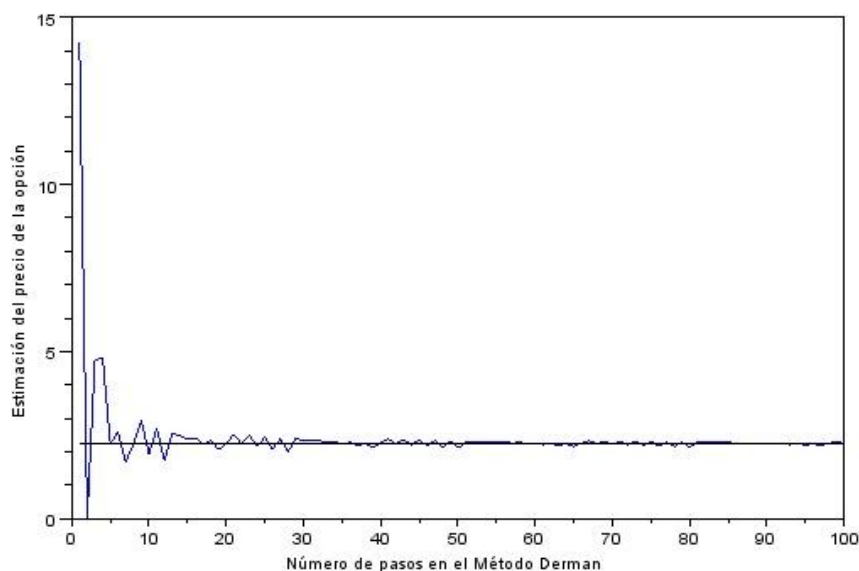
pareciese que se va acercando hacia el precio proporcionado por la fórmula cerrada para posteriormente “rebotar” hacia mayores valores en el precio.

3.1.2. Valuación de opciones con barrera utilizando el Método Derman

Para tratar de corregir la oscilación del modelo CRR, Derman propuso hacer una valoración en los nodos, determinando si el nodo superior-siguiente se encontraba por arriba de la barrera. En caso de que el valor del subyacente fuera mayor a la barrera, se plantea una interpolación del valor de la opción en función de dichos nodos, en caso contrario se procede como el método CRR.

En las Figuras 3.5 y 3.6 se muestra que al aplicar el Método Derman⁴³ aún persisten las oscilaciones alrededor del valor analítico, pero con menor variabilidad si se compara con el tradicional árbol CRR.

Figura 3.5 Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1 a 100.

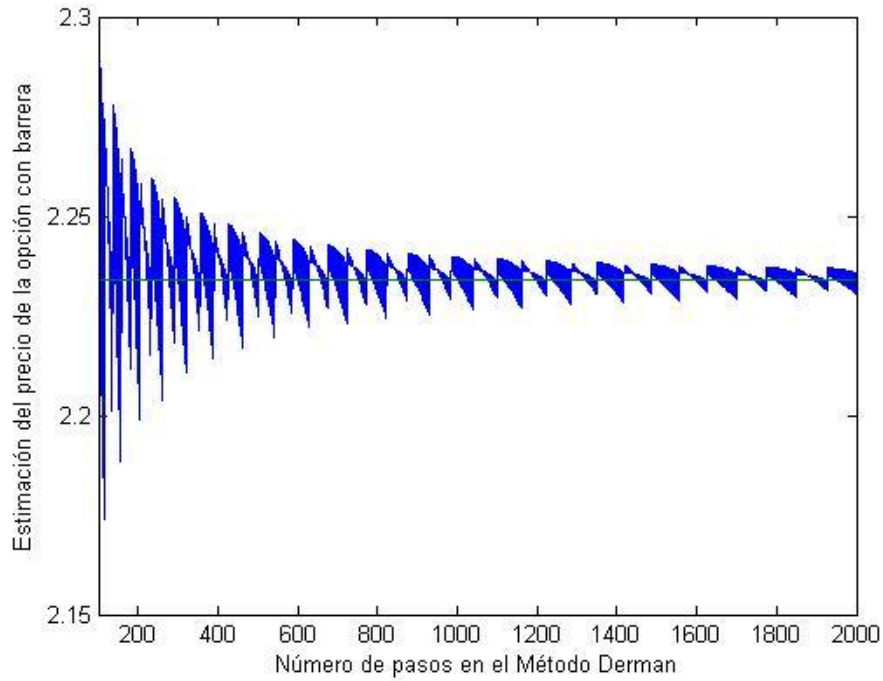


La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

⁴³ El código utilizado en la valuación de la opción con barrera por medio del Método Derman se encuentra en el Apéndice 8

Figura 3.6 Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 100 a 2000.

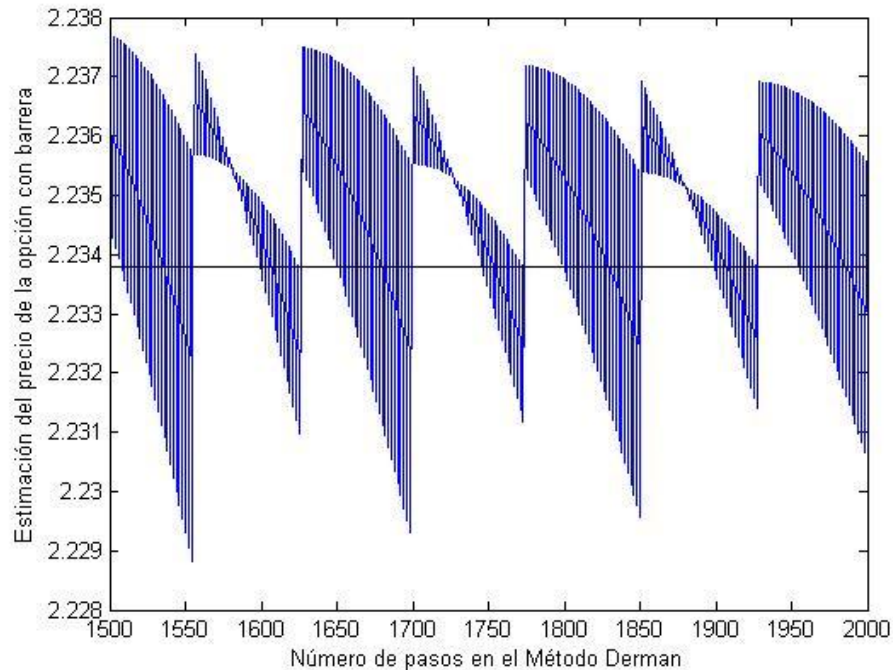


La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

En la figura anterior, se puede observar cierta tendencia de las oscilaciones hacia el valor de las formulas cerradas; aunque también se puede observar que la tendencia es muy accidentada inclusive en particiones superiores a las 1,500, como se puede ver en la Figura 3.7, la cual corresponde a un acercamiento realizada a la Figura 3.6.

Figura 3.7 Resultados obtenidos al usar el Método Derman para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1500 a 2000.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

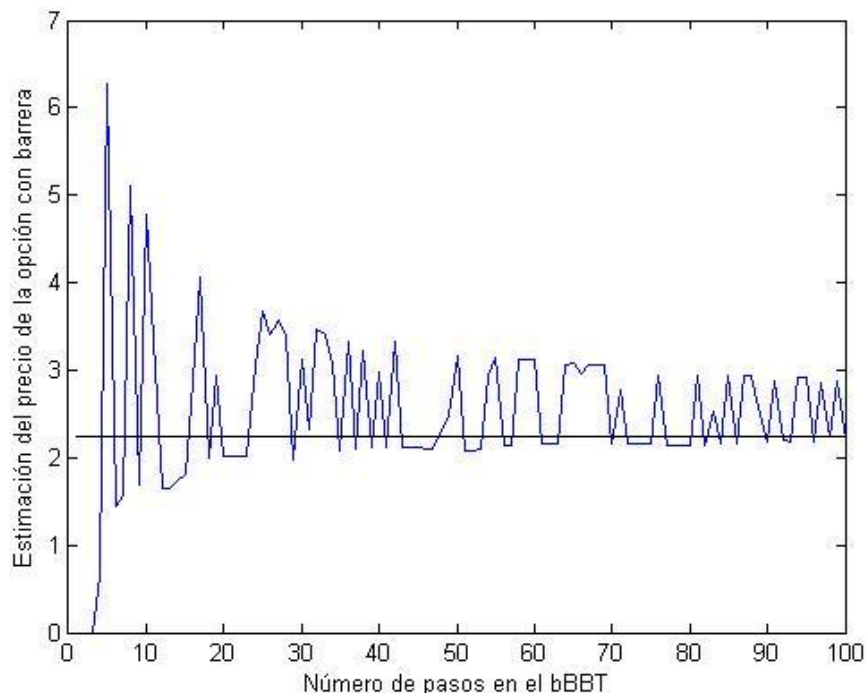
3.1.3. Valuación de opciones con barrera utilizando el Método BTT

En un intento por disminuir el error de especificación, Dai y Lyuu proponen fusionar un árbol trinomial con un árbol binomial para generar lo que ellos denominan un árbol bino-trinomial o BTT por sus siglas en inglés (Day y Lyuu, 2010).

Aunque el objetivo es reducir el error de especificación, los resultados muestran aún una relativa variación, debido a su origen binomial proveniente del

CRR; en cambio, se elimina el efecto de dientes de sierra⁴⁴. La gráfica de los resultados se expone en la Figura 3.8.

Figura 3.8 Resultados obtenidos al usar el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1 a 100.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Day y Lyuu (2010).

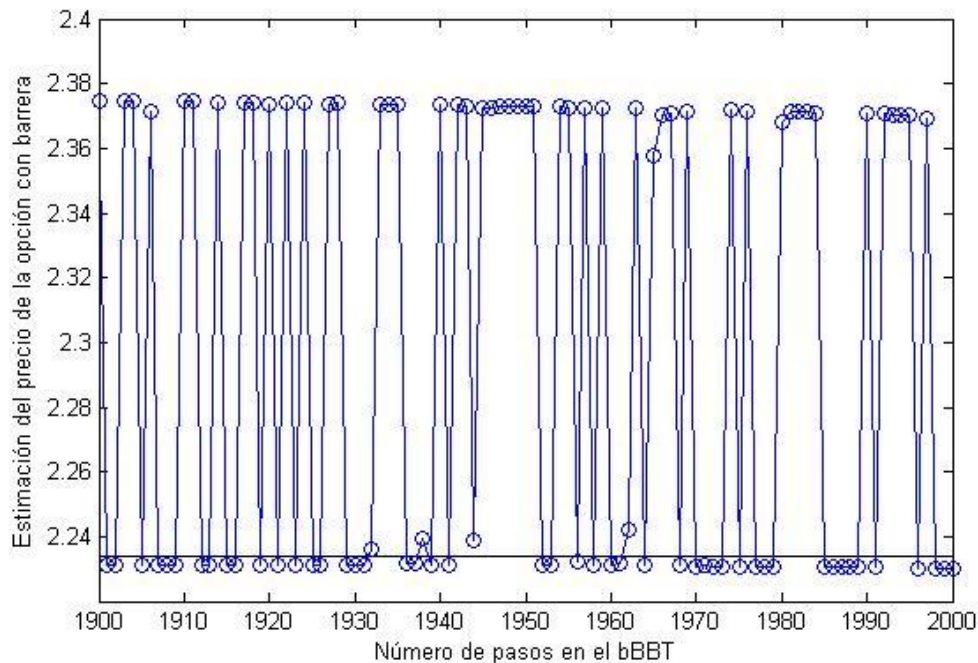
Sin embargo, al incrementar el número de pasos la variación se vuelve más “estable”, como se muestra en la Figura 3.9, donde el marcador “o” indica la estimación del precio de la opción con barrera. Por otra parte, es importante realizar un análisis descriptivo de los resultados obtenidos entre los métodos CRR y BTT⁴⁵, considerando el mismo número de pasos, para percibir cómo están

⁴⁴ En el Apéndice 9 se encuentra el código del Método BTT para obtener el valor de la opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos.

⁴⁵ En el Apéndice 10 se muestra la comparación gráfica entre el método BTT y el tradicional CRR; en esa gráfica es contrastante el comportamiento de las oscilaciones generadas por medio del BTT

agrupados los datos. Los principales indicadores de los datos se encuentran en el Cuadro 3.1; en donde se puede observar que prácticamente los promedios aritméticos son iguales; pero no así las desviaciones estándares, pues en el caso del CRR es del 3.9% mientras que para el BTT es de 7.06%, (de ahí el elevado coeficiente de variación en este método).

Figura 3.9 Resultados obtenidos al usar el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Day y Lyuu (2010).

Esta desviación se vuelve significativa y se vuelve evidente al confrontar los correspondientes histogramas del resultado de los dos métodos, pues mientras que en el caso del CRR las distribución de las frecuencias se encuentran sobre un mayor número de precios estimados (véase la Figura 3.10.a) no así en el caso del Método BTT donde los precios estimados están claramente concentrados en dos

con respecto al CCR, pues los árboles bino-trinomiales fueron capaces de eliminar, notablemente, el efecto de dientes de sierra, como consecuencia en la disminución del error de especificación.

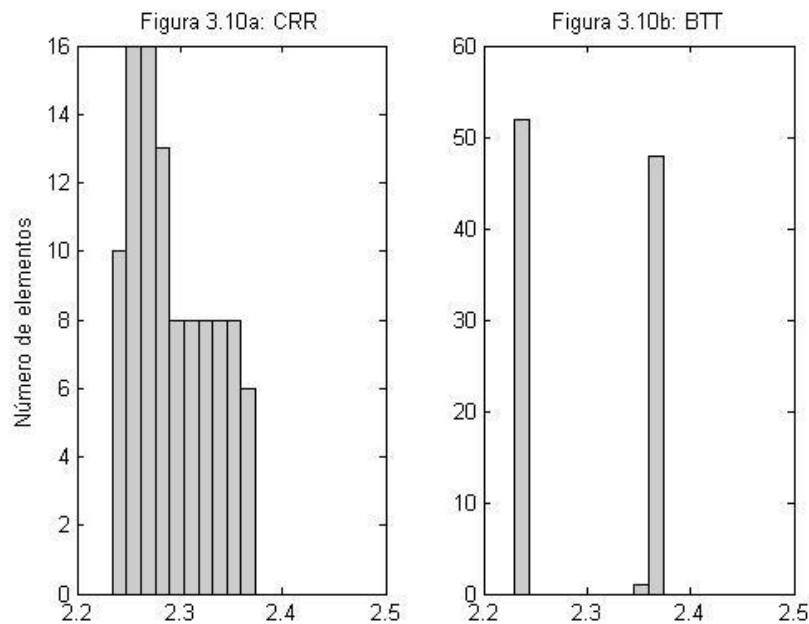
intervalos de clase (véase la Figura 3.10.b), lo cual también se puede inferir a partir de los marcadores de la Figura 3.9 anterior.

Cuadro 3.1 Principales indicadores descriptivos de los resultados obtenidos al usar los Métodos CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000.

Indicador	CRR	BTT
Media	2.2935	2.2998
Varianza	0.001521	0.004984
Desviación estándar	0.0390	0.0706
Coefficiente de variación	1.70%	3.07%
Min	2.2343	2.2301
Max	2.3734	2.3747
Rango: Max-min	0.1391	0.1446

Fuente: Elaboración propia.

Figura 3.10 Histograma de los resultados proporcionados por el CRR y el Método BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1900 a 2000.



El eje de la abscisa corresponde al precio del precio de la opción.

Fuente: Elaboración propia.

3.1.4. Comparación entre modelos (ejemplos numéricos)

En la comparación entre los resultados de la valuación por medio de los métodos binomial CRR, Método Derman (Derman) y Método Bino-trinomial (BTT) se considerará nuevamente una opción call barrera knock-out donde el precio inicial del activo es de 100, el precio de ejercicio de 100, la barrera superior de 125 y la volatilidad es del 20%. Así mismo, la tasa libre de riesgo será del 10% y la opción expirará en un año; adicionalmente, se utilizará como referencia, el valor de 2.2338 u.e. proveniente del resultado de la fórmula cerrada correspondiente.

En el Cuadro 3.2 se muestra una tabla comparativa entre los distintos métodos, en este se muestran los resultados para los pasos “N” de 10, 30, 70, 100, 200, 500, 1000, 2000 y 2100. En este cuadro, puede observar que el método Derman a partir de una partición de 500 en adelante, ya presenta una convergencia clara hacia el resultado de la fórmula cerrada; así mismo, los errores absolutos⁴⁶ para esta cantidad de pasos es de 13.559×10^{-3} en el caso del método CRR, 0.30518×10^{-3} para el Método Derman y de 9.8266×10^{-3} para el Método BTT, nótese que la menor diferencia corresponde al Método Derman.

Cuadro 3.2 Cuadro comparativo de los precios, al variar el número de pasos “N”, al aplicar los métodos CRR, Derman y BTT a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma= 0.20$.

N	CRR	Derman	BTT
10	2.34008968	1.943894048	4.78615323
30	3.30707226	2.338944813	3.12479495
70	2.61316592	2.224354356	2.15955776
100	2.68025849	2.243463924	2.1959301
200	2.28828705	2.208094626	2.20006292
500	2.24735873	2.234105179	2.22397336
1000	2.36375646	2.234101083	2.41175441
2000	2.24371243	2.230508749	2.23010781
2100	2.34533464	2.234620072	2.36783126

Fuente: Elaboración propia.

⁴⁶ Definido en este caso como la diferencia, en valor absoluto, entre el valor proporcionado por la aproximación del método correspondiente y el valor calculado a través de la fórmula cerrada.

El cuadro anterior puede complementarse por medio del análisis de los errores absolutos y relativos⁴⁷ correspondientes a cada método y por cada partición; es por ello, que en el Cuadro 3.3 se presentan los errores comparando los resultados de los métodos contra el resultado de la fórmula cerrada.

Cuadro 3.3 Cuadro comparativo de los errores, al variar el número de pasos “N”, al aplicar los métodos CRR, Derman y BTT a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.

N	Error absoluto $\times 10^{-3}$			Error relativo $\times 10^{-3}$		
	CRR	Derman	BTT	CRR	Derman	BTT
10	106.2897	289.9060	2552.3532	1.0629	2.8991	25.5235
30	1073.2723	105.1448	890.9950	10.7327	1.0514	8.9099
70	379.3659	9.4456	74.2422	3.7937	0.0945	0.7424
100	446.4585	9.6639	37.8699	4.4646	0.0966	0.3787
200	54.4870	25.7054	33.7371	0.5449	0.2571	0.3374
500	13.5587	0.3052	9.8266	0.1356	0.0031	0.0983
1000	129.9565	0.3011	177.9544	1.2996	0.0030	1.7795
2000	9.9124	3.2913	3.6922	0.0991	0.0329	0.0369
2100	111.5346	0.8201	134.0313	1.1153	0.0082	1.3403

Fuente: Elaboración propia.

Resultado de la información contenida en el Cuadro 3.3 se evidencia la relativa disminución del error absoluto, y por ende el error relativo, al aumentar el número de pasos o particiones del tiempo. Por otro lado, no hay que perder de vista el comportamiento oscilatorio, alrededor del valor analítico, de estos métodos, de ahí la disminución y el aumento en el error mostrado en ciertos pasos. Véase por ejemplo el cambio en el error relativo al pasar de 1000 a 2000 pasos, mientras que el Método Derman muestra un aumento en el error relativo de 993%, el Método BTT observó una disminución del 98%; por el contrario, al pasar de una partición de 2000 a 2100 pasos, el Método Derman mostró una disminución en el error del 75%, mientras que el Método BTT indica una degradación de 3540%; pero al aumentar un paso más al Método BTT (para llegar

⁴⁷ El error relativo se definirá como el cociente entre el error absoluto y el precio inicial del activo subyacente en la opción up-and-out, el cual, en el caso de los ejemplos, es de 100 u.e.

a 2101 pasos, con un precio estimado de 2.2314553) el error relativo disminuye un 98% y si se compara el resultado estimado para 2000 pasos contra el estimado de 2101, se obtendría una disminución del 1% del error relativo. Es importante señalar que estos saltos en los precios es el comportamiento expuesto en la sección anterior, así como por el histograma de la Figura 3.10.b.

En el mismo Cuadro 3.3, y sin perder en vista lo explicado en el párrafo anterior, el error relativo en los tres métodos disminuye drásticamente a partir de la generación de 500 pasos hacia arriba. Así mismo, el tiempo computacional no es tan costoso como para evitar el incremento en los pasos; en el Cuadro 3.4 se muestran los tiempos, en segundos, empleados en el cálculo de las estimaciones en los precios por cada uno de los métodos utilizando MatLab. Nótese además, que el tiempo empleado por el Método Derman siempre resulta ligeramente mayor al de los otros dos métodos, siendo, prácticamente el CRR quien demanda menor tiempo máquina.

Cuadro 3.4 *Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; por medio de los métodos CRR, Derman y BTT, variando el número de pasos “N”.*

N	CRR	Derman	BTT
500	0.083219	0.108524	0.077653
1000	0.296223	0.36059	0.292227
1250	0.464021	0.571575	0.459214
1500	0.673294	0.828322	0.692493
1750	0.912016	1.111699	0.924788
2000	1.188039	1.447756	1.228584
2100	1.301973	1.576302	1.34749

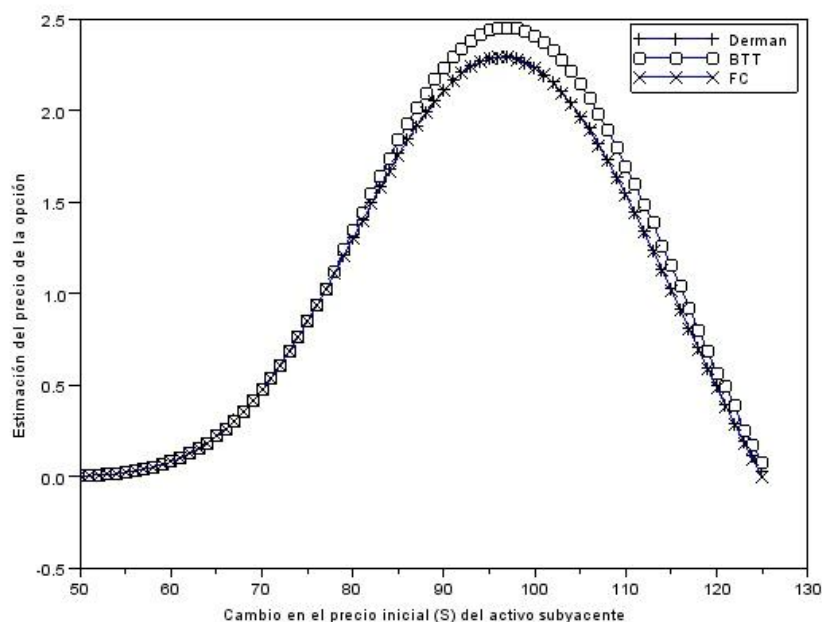
Fuente: Elaboración propia.

Los correspondientes errores absolutos para el número de pasos y los métodos indicados en el Cuadro 3.4 se encuentran en el Apéndice 11; sin embargo, es importante señalar que el máximo error absoluto (MAE, por sus siglas

en inglés) para CRR es de 0.13, para el Método Derman de 0.0033 y para el Método BTT de 0.1780; de forma similar, la raíz del error cuadrático medio, o RMSE por sus siglas en inglés, es de 0.0875 para CRR, de 0.00145 para el Método Derman y de 0.08435 para el Método BTT. Es decir, que aunque para los tres métodos el RSME es bajo, el Método Derman presenta un mayor nivel de predicción del valor de la opción, dado el valor de referencia.

Igualmente, se observan resultados similares al variar el precio inicial del activo subyacente en la opción, en un intervalo de 50 a 125 u.e., con incrementos unitarios, y graficando los resultados (véase la Figura 3.11)⁴⁸.

Figura 3.11 Resultados de la valuación de una opción de compra up-and-out tipo europea, proporcionados por el Método Derman, el Método BTT y las fórmulas cerradas (FC), variando el precio inicial “S” del activo subyacente.



El eje de la abscisa corresponde al precio inicial del activo subyacente de la opción.

Para las valuaciones se consideraron 1000 pasos.

Fuente: Elaboración propia.

⁴⁸ En los siguientes párrafos se realizan análisis sobre los métodos Derman y bino-trinomiales debido a su énfasis en la reducción del error de especificación.

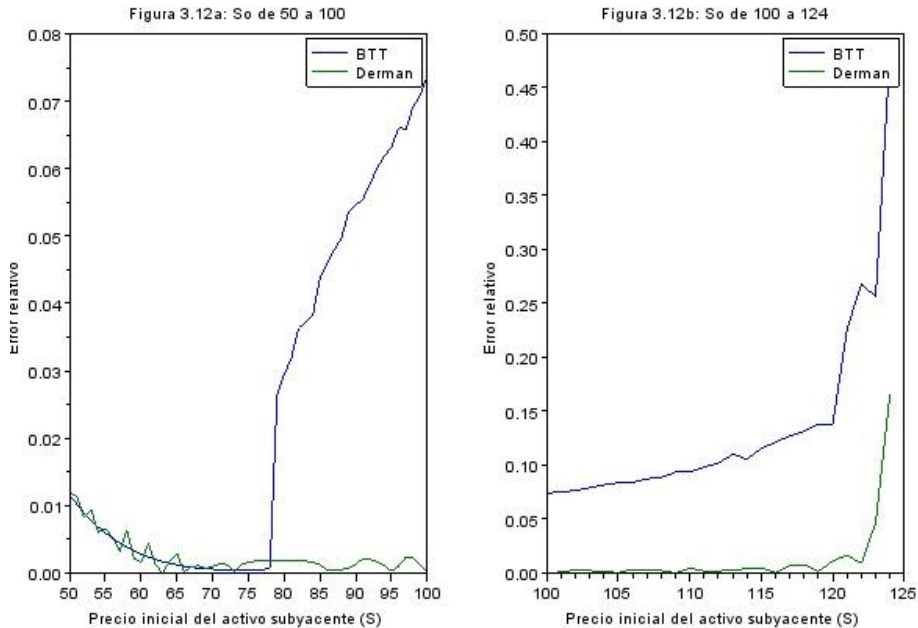
En la figura anterior se observa que las valuaciones proporcionadas por el Método Derman van al unísono a los resultados obtenidos por medio de las fórmulas cerradas, de tal forma que inclusive se cofunden las gráficas de sus resultados. Por otro lado, el Método BTT acompaña a ambos métodos mientras que el activo, del ejemplo, inicie con precios inferiores a 79 u.e. para posteriormente sobrevaluar el precio de la opción.

El comportamiento de los errores relativos producto de la valuación por medio del Método Derman y el Método BTT se exponen en la Figura 3.12; por cuestiones ilustrativas, la gráfica se ha subdividido, de tal forma que en la primera sub gráfica se muestran los resultados al considerar una variación en el precio del activo subyacente entre 50 y 100, con incrementos unitarios, mientras que en la segunda la variación corresponde de 100 a 125 modificando, además, la escala en el eje de las ordenadas.

En la primera Figura 3.12.a. el comportamiento de los errores de los dos métodos prácticamente son del mismo orden, aunque la tendencia de los errores seguida por los árboles bino-trinomiales es más suave en comparación a los resultados proporcionados a través del Método Derman.

Sin embargo, a partir de precios iniciales del activo subyacente superiores a 80 u.e. el error relativo del Método BTT crece drásticamente. Dicho crecimiento se conserva y amplifica como puede observarse en la Figura 3.12.b.; en contraste, los errores relativos del Método Derman comienzan a incrementarse en precios ya muy cercanos a la barrera.

Figura 3.12 Errores relativos al valor una opción de compra up-and-out tipo europea, proporcionados por el Método BTT y el Método Derman, variando el precio inicial "S" del activo subyacente.



El eje de la abscisa corresponde al precio inicial del activo subyacente de la opción. Para las valuaciones se consideraron 1000 pasos.

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, el resultado de los errores al variar tanto la volatilidad como el precio de ejercicio de la opción se muestran en el Cuadro 3.5. Los errores relativos se encuentran por un factor de 10^{-5} para contrastar la magnitud entre los métodos, evidenciando un mayor nivel de estimación por parte del Método Derman con respecto a los valores proporcionados por los árboles binomiales; no obstante, el error máximo del Método BTT es de 0.00178, mientras que en el Método Derman es de 0.00005, ambas cifras considerablemente pequeñas.

Cuadro 3.5 Cuadro comparativo de los precios al aplicar los métodos Derman y BTT a una opción up-and-out variando la volatilidad y el precio de ejercicio, manteniendo fijas $S=100$, $T=1$, $r=0.1$ y con 1,000 pasos.

σ	K	Derman	BTT	Fórmula cerrada	Errores relativos $\times 10^{-5}$	
					Derman	BTT
10%	100	6.493539	6.649971	6.488583	5.0	161.4
10%	105	3.750452	3.870023	3.745607	4.8	124.4
10%	110	1.764194	1.848165	1.761683	2.5	86.5
10%	115	0.582538	0.630803	0.580956	1.6	49.8
20%	100	2.234101	2.411754	2.233791	0.3	178.0
20%	105	1.20155	1.324249	1.199348	2.2	124.9
20%	110	0.52953	0.602526	0.525824	3.7	76.7
20%	115	0.161499	0.199737	0.160509	1.0	39.2
25%	100	1.37005	1.530992	1.366482	3.6	164.5
25%	105	0.719043	0.823426	0.714822	4.2	108.6
25%	110	0.308724	0.369801	0.305862	2.9	63.9
25%	115	0.094267	0.12227	0.091284	3.0	31.0
30%	100	0.876611	1.014468	0.877075	0.5	137.4
30%	105	0.453759	0.540103	0.450871	2.9	89.2
30%	110	0.189832	0.241597	0.189914	0.1	51.7
30%	115	0.057386	0.080362	0.055894	1.5	24.5
35%	100	0.593009	0.697155	0.588711	4.3	108.4
35%	105	0.304514	0.369029	0.299071	5.4	70.0
35%	110	0.129316	0.16506	0.124668	4.6	40.4
35%	115	0.039465	0.055025	0.036361	3.1	18.7
40%	100	0.4098	0.503885	0.410809	1.0	93.1
40%	105	0.206838	0.265344	0.206977	0.1	58.4
40%	110	0.086523	0.117845	0.085663	0.9	32.2
40%	115	0.025745	0.040502	0.024832	0.9	15.7

Fuente: Elaboración propia.

Así mismo, en ese mismo cuadro se puede observar el cambio de los precios de la opción call up-and-out al variar la volatilidad del activo subyacente; donde el precio de la opción desciende al incrementar la volatilidad del subyacente, esto es ocasionado a que se eleva la posibilidad de que el precio del activo subyacente cruce la barrera y expire sin valor.

3.2. Procedimientos numéricos utilizando simulaciones Monte Carlo en la valuación de opciones con barrera

En esta sección se implementarán tanto las simulaciones Monte Carlo como las simulaciones de Monte Carlo Condicional⁴⁹; al igual que en la sección anterior, el código se aplicará en la valuación de una opción call up-and-out tipo europea con las características siguientes: precio inicial del activo igual a 100, el precio de ejercicio igual a 100, la barrera superior igual a 125, la volatilidad del 20%, la tasa libre de riesgo igual al 10% y la opción expirará dentro de un año.

Es importante señalar que el procedimiento por medio del Método Monte Carlo requiere de un parámetro “ N ” el cual se utilizará para indicar cuántas veces se revisará si el precio del activo subyacente cruzó la barrera⁵⁰; es decir, si N es igual a 60, se examinará 60 veces si el activo atravesó la barrera, en cada trayectoria simulada, y si se trata de una opción knock-out el payoff de la opción barrera será igual a cero. De igual forma, es necesario un parámetro el cual denotará el número de trayectorias o simulaciones a generar.

Además, en la implementación de los métodos se utilizó la función *normfit*, la cual calcula un intervalo de confianza del 95%, considerando una distribución normal de los datos, para el parámetro estimado, en este caso el precio de la opción up-and-out. Por cuestiones ilustrativas, las variables Li y LS corresponderán al límite inferior y superior de dicho intervalo.

En el Cuadro 3.6 se muestran los resultados de aplicar el Método Monte Carlo a la opción barrera ejemplo, en éste se contemplan sólo seis escenarios donde por cada dupla de número de revisiones y el número de simulaciones a generar se estima un precio de la opción. Sin embargo, a diferencia de las implementaciones anteriores, en este caso no se muestra una tendencia hacia un valor. No obstante, si se considera el intervalo de confianza para cuando N es

⁴⁹ En los Apéndices 12 y 13 se encuentran el código de simulaciones Monte Carlo y simulaciones Monte Carlo Condicional, respectivamente.

⁵⁰ La revisión se realiza a partir de la partición del tiempo T justamente por el número de revisiones.

igual a 10,000 y con una generación de 10 millones de trayectorias el intervalo de confianza al 95% es de (2.269041, 2.274841), en otras palabras, existe la confianza del 95% de que el intervalo de 2.269041 a 2.274841 contiene el valor verdadero del precio de la opción. Recuerde, por otro lado, que el valor para la opción por medio de la fórmula cerrada es de 2.2338, el cual queda por mucho muy lejos del límite inferior de dicha barrera.

Cuadro 3.6 Resultados de aplicar el Método Monte Carlo para la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.

N	Simulaciones generadas	Precio estimado	Intervalo de confianza	
			<i>Li</i>	<i>LS</i>
60	50,000	2.683974	2.638817	2.729132
1,000	50,000	2.360890	2.318955	2.402825
10,000	50,000	2.283131	2.241948	2.324314
10,000	100,000	2.277837	2.248792	2.306882
10,000	1,000,000	2.261785	2.252638	2.270933
10,000	10,000,000	2.271941	2.269041	2.274841

Fuente: Elaboración propia.

Aunado a ello, el costo computacional, medido a través del tiempo en la estimación del precio de la opción, para cada dupla de número de revisiones–simulaciones se presenta en el Cuadro 3.7. En éste se podrá observar el notable incremento en el tiempo empleado en el algoritmo al incrementar el número de revisiones; por ejemplo en 60 revisiones para 50,000 simulaciones el tiempo empleado fue de 0.6987 segundos, contrastantemente, al realizar 1,000 revisiones para 50,000 simulaciones, el tiempo empleado fue de 5.0534 segundos. De tal forma que, al realizar una revisión más fina (10,000 revisiones por trayectoria) y generando 10 millones de trayectorias, el tiempo utilizado fue cercano a 2 horas y 40 minutos (9544 segundos); un tiempo considerablemente importante ante un situación donde las decisiones apremian.

Cuadro 3.7 *Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; aplicando el Método Monte Carlo.*

N	Simulaciones	Precio estimado	Tiempo
60	50,000	2.683974	0.698697
1,000	50,000	2.360890	5.053434
10,000	50,000	2.283131	47.775342
10,000	100,000	2.277837	95.653804
10,000	1,000,000	2.261785	946.370854
10,000	10,000,000	2.271941	9544.192235

Fuente: Elaboración propia.

De forma similar, se muestran en el Cuadro 3.8 los resultados obtenidos por medio del algoritmo del Método Monte Carlo Condicional. Donde, con el mismo número de revisiones y del número de simulaciones, se muestra una tendencia tenuemente manifiesta, considerando los dos métodos, pues para 10,000 revisiones para cada una de las 10 millones de simulaciones se obtuvo un precio de 2.2720 y de 2.2633 empleando la metodología tradicional y condicional, respectivamente.

Cuadro 3.8 *Resultados de aplicar el Método Monte Carlo Condicional para la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.*

N	Simulaciones	Precio estimado	Intervalo de confianza	
			Li	LS
60	50,000	2.652642	2.527707	2.777577
1,000	50,000	2.477830	2.356476	2.599184
10,000	50,000	2.332975	2.212131	2.453819
10,000	100,000	2.188327	2.102642	2.274012
10,000	1,000,000	2.270710	2.243654	2.297767
10,000	10,000,000	2.263379	2.254822	2.254822

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro 3.9 se muestra el comparativo entre los precios generados por cada método así como la diferencia entre éstos. Nótese que para el quinto y sexto escenario los precios ya son muy semejantes.

Cuadro 3.9 Cuadro comparativo de los precios, al variar el número de revisiones “N” y el número de simulaciones a generar, al aplicar los Métodos Monte Carlo y Monte Carlo Condicional a una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$.

N	Simulaciones	Simulaciones Monte Carlo		Diferencia
		Monte Carlo (\$)	Condicional (\$)	
60	50,000	2.683974	2.652642	0.031332
1,000	50,000	2.360890	2.477830	0.116940
10,000	50,000	2.283131	2.332975	0.049844
10,000	100,000	2.277837	2.188327	0.089510
10,000	1,000,000	2.261785	2.270710	0.008925
10,000	10,000,000	2.270200	2.263379	0.006821

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, el tiempo empleado por parte del Método Monte Carlo Condicional, muestra un comportamiento similar al Método Monte Carlo tradicional, aunque para 10 mil revisiones dentro de cada una de las 10 millones de simulaciones se empleó un tiempo superior a las dos horas y 33 minutos (véase el Cuadro 3.10).

Cuadro 3.10 Tiempo computacional, en segundos, empleado en la valuación de una opción up-and-out con las siguientes características: $S= 100$, $K= 100$, $T= 1$, $r= 0.1$, $\sigma = 0.20$; aplicando el Método Monte Carlo Condicional.

N	Simulaciones	Precio estimado	Tiempo
60	50,000	2.652642	0.866569
1,000	50,000	2.477830	5.136096
10,000	50,000	2.332975	45.952783
10,000	100,000	2.188327	92.275524
10,000	1,000,000	2.270710	919.531042
10,000	10,000,000	2.263379	9230.044017

Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 4

Análisis del rendimiento de los métodos basados en árboles

Las características de rendimiento de los métodos numéricos usualmente se centran en su rapidez, en su exactitud o calidad en sus estimaciones, en su robustez o estabilidad ante cambios en los datos iniciales, así como a su facilidad en la implementación (Barr et al: 1995:12).

Los métodos de árboles presentan mucha facilidad en su implementación en diversos lenguajes computacionales; en otras palabras, estos métodos proporcionan algoritmos claros que facilitan su traducción hacia otros lenguajes.

Por otro lado, Barr et al (1995) sugiere englobar las medidas de rendimiento en tres categorías: 1) calidad de la solución, 2) esfuerzo computacional y 3) robustez. Sin embargo, en este capítulo se incluye el análisis de convergencia de los resultados y el análisis conjunto de la calidad de los datos en función del costo computacional y de la estabilidad de los métodos.

4.1. Análisis del orden de convergencia al valuar opciones de compra “plain vanilla”

Se dirá que una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número α , con un orden de convergencia ρ si existe una k , tal que (Burden y Faires 1985:36 y Chance, 2008:51):

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \frac{k}{n^\rho}.$$

De esta manera, en el caso de los modelos de valuación de opciones estudiados, se dirá que convergerán con orden ρ si los errores absolutos generados cumplen con la desigualdad (4.1), para alguna k .

$$|e(n)| \leq \frac{k}{n^\rho} \tag{4.1}$$

Nótese que en términos de logaritmos, el lado derecho de la desigualdad corresponde a una línea recta con la siguiente representación analítica

$$\log_{10} k - \rho \log_{10} n;$$

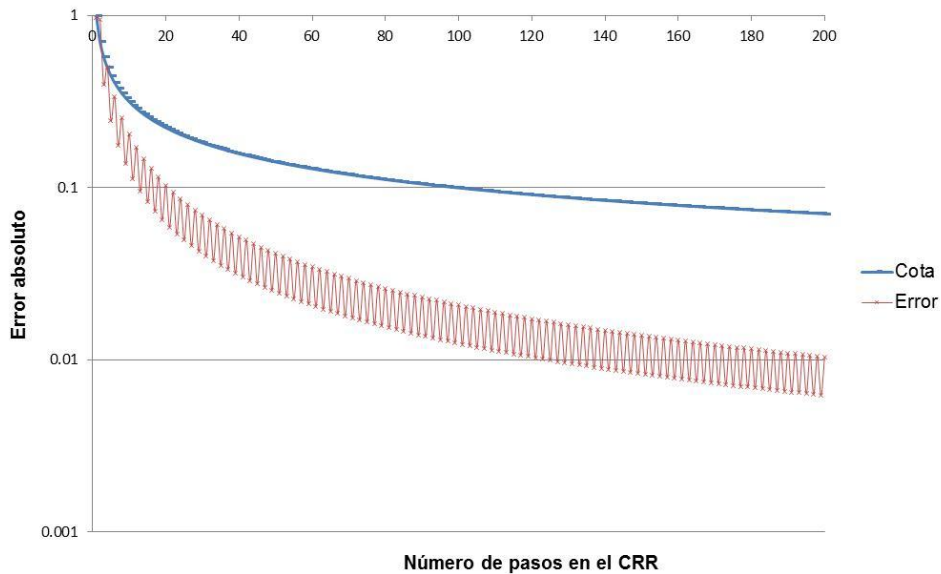
en otras palabras, si el logaritmo de los errores para cada una de las particiones se encuentran por debajo de la recta con ordenada al origen igual a $\log_{10} k$ y pendiente ρ se dirá que el modelo converge a una tasa ρ , o que es de orden ρ .

Para analizar la convergencia del método binomial se examinará un call europeo plain vanilla con las siguientes características: precio inicial del activo y precio de ejercicio de la opción igual a 100, volatilidad del activo subyacente 20%, tasa libre de riesgo igual al 10% y con un plazo residual de la opción de un año. El valor obtenido por medio de la fórmula de BSM es igual a 13.2697 u.e., este precio nos permitirá calcular los errores absolutos al emplear el modelo CRR para valuar dicha opción; sin embargo, la examinación de los errores absolutos comparados con la cota indicada en la desigualdad (4.1) empleando una k igual a uno y una tasa de convergencia ρ igual a uno, mostrarán que éstos se encuentran siempre por arriba de la cota; por otra parte, al utilizar una ρ igual a $\frac{1}{2}$ se pudo determinar que a partir de una partición de tamaño cinco, los errores se encuentran por debajo de la cota de convergencia (véase la Figura 4.1).

En las secciones siguientes se analizarán los órdenes de convergencia para los métodos estudiados, para ellos se considerará un call up-and-out tipo europeo con precio inicial del activo igual a 100, precio de ejercicio de la opción igual a 100, la barrera superior igual a 125, la volatilidad del 20%, la tasa libre de riesgo igual al 10% y la opción expirará dentro de un año. De la misma forma al capítulo anterior, se utilizará el valor de 2.2338 u.e. proporcionado al aplicar la fórmula correspondiente.

Por otra parte, para el análisis de los errores absolutos se realizaron divisiones del tiempo desde una a 2000 divisiones.

Figura 4.1 *Convergencia del modelo CRR con respecto al modelo BSM. Considerando una partición del periodo del tiempo de 1 a 200.*



En la figura se muestran los valores absolutos de los errores considerando una k igual a uno y una tasa de convergencia igual a $\frac{1}{2}$.

En el eje de las abscisas se ha utilizado una escala logarítmica.

Fuente: Chance (2008).

4.2. Análisis del orden de convergencia al valorar opciones con barrera

En el Cuadro 4.1 se indica a partir de que paso los errores, empleando el método CRR en la valuación de la opción barrera ejemplo, se encuentran por debajo de la cota señalada, utilizando para ello diversas tasas de convergencia ρ y utilizando una k igual a uno; así mismo, con una partición superior e igual a 100 los errores generados ya se ubican por debajo de la cota de $1/9$.

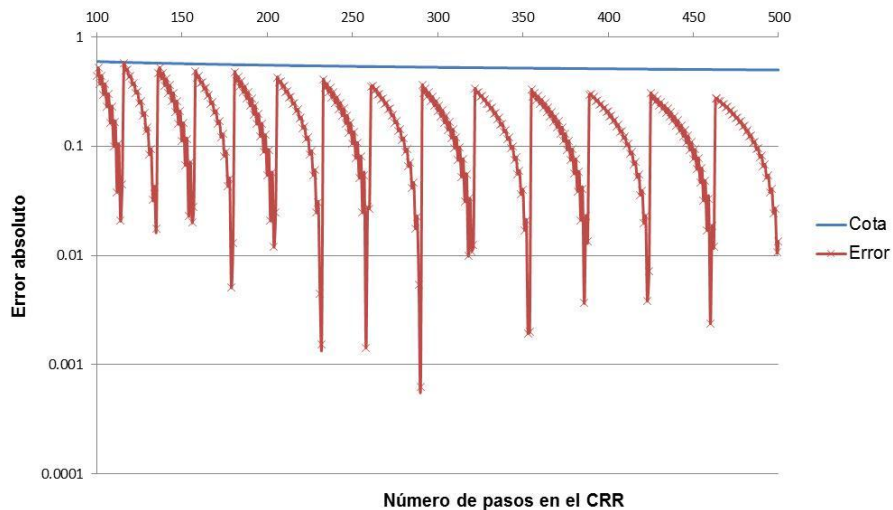
En la Figura 4.2 se muestran la representación gráfica de los errores generados al utilizar el modelo CRR en la valuación de la opción con barrera. En ésta, además, se muestra la cota calculada al considerar una tasa de convergencia de $1/9$ y una k igual a uno.

Cuadro 4.1 Partición “N” a partir de la cual los errores, al emplear el método CRR, se encuentran por debajo de la cota, utilizando una k igual a uno.

Tasa de convergencia ρ	N
1/5	426
1/6	234
1/7	182
1/8	117
1/9	100
1/10	68
1/11	68
1/12	68

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.2 Convergencia de los errores absolutos utilizando el modelo CRR con respecto al resultado de la fórmula cerrada.



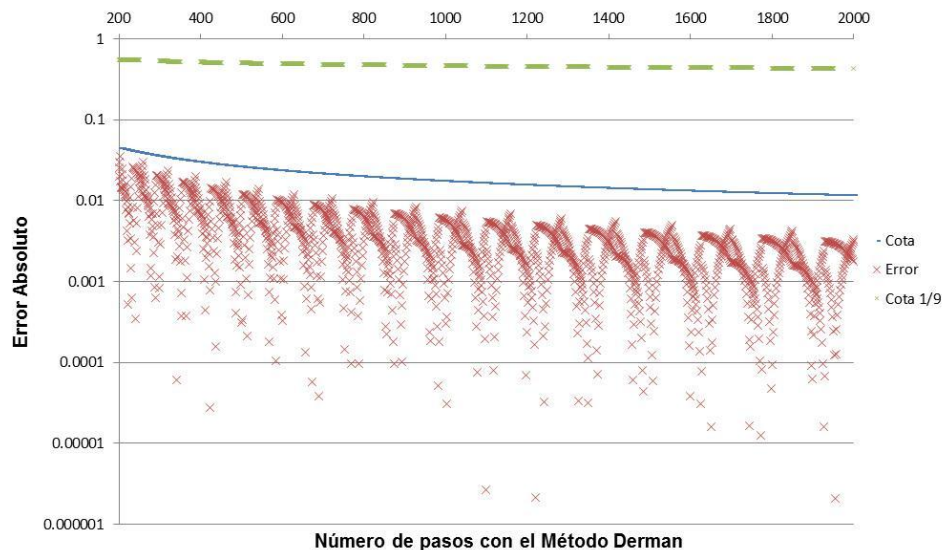
La cota es calculada considerando una k igual a uno y una tasa de convergencia igual a 1/9.

En el eje de las abscisas se ha utilizado una escala logarítmica.

Fuente: Elaboración propia.

Contrastantemente, en el caso del método Derman para particiones superiores e iguales a 100 la tasa de convergencia es mucho mayor con respecto al método CRR, pues con una ρ igual a $10/17$ (≈ 0.5882) los errores absolutos ya se encuentran por debajo de la cota; no obstante, por cuestiones prácticas, se considerará un tasa de convergencia de $\frac{1}{2}$ utilizando este método. La representación gráfica de los errores absolutos, para una partición de 200 a 2000 se encuentra en la Figura 4.3; en esa misma gráfica se muestra la cota correspondiente a una tasa de convergencia de $1/9$ por cuestiones comparativas.

Figura 4.3 *Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método Derman con respecto al resultado de la fórmula cerrada.*



La cota es calculada considerando una k igual a uno y una tasa de convergencia igual a $\frac{1}{2}$.

En el eje de las abscisas se ha utilizado una escala logarítmica.

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto al Método BTT, utilizando una k igual a uno, la tasa de convergencia ρ es menor con respecto a los dos métodos anteriores como se puede observar en el Cuadro 4.2. En dicho cuadro se muestra que para una cota con una tasa de convergencia de $1/9$ aún se encuentran errores por arriba de ella, a pesar de utilizar una partición superior a 100; no es sino empleando una cota del

orden de 1/11 que los errores se encuentran por debajo de la cota en particiones del tiempo superiores a 100.

Cuadro 4.2 Partición “N” a partir de la cual los errores, al emplear el método BTT, se encuentran por debajo de la cota, utilizando una k igual a uno.

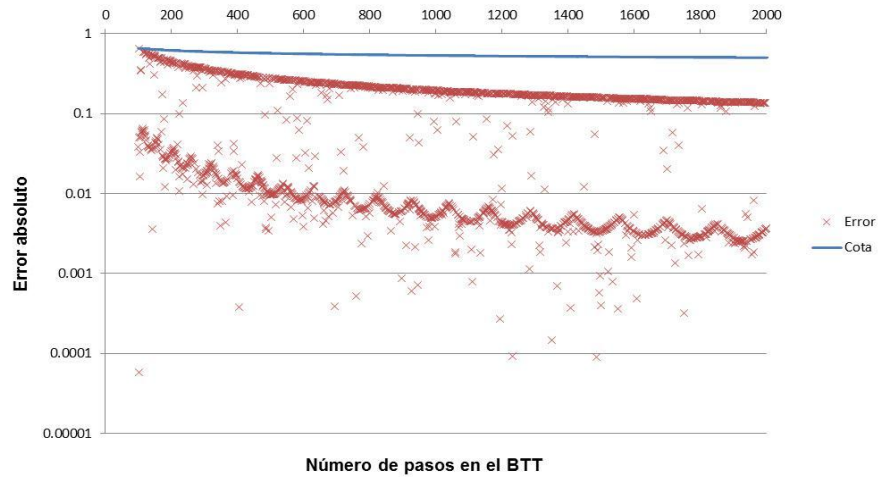
Tasa de convergencia ρ	N
1/5	450
1/6	253
1/7	253
1/8	144
1/9	121
1/10	104
1/11	96
1/12	96

Fuente: Elaboración propia.

Para fines de comparación, al aplicar particiones del tiempo superiores o iguales a 100, se considerará, para este método, una tasa de convergencia ρ de 1/11; el comportamiento de los errores absolutos del método BTT con respecto a su cota se encuentra en la Figura 4.4; en esa gráfica también se puede observar el comportamiento oscilatorio del método, exhibido en el capítulo anterior.

Reuniendo la informa de los métodos, se obtuvo que el Método Derman presenta una tasa de convergencia mayor con respecto a los métodos CRR y BTT. En el Cuadro 4.3 se encuentran las tasas de convergencia de los tres métodos; de igual forma, en la Figura 4.5 se muestran los errores absolutos producidos por el Método Derman así como su cota y la representación de las cotas generadas para los métodos CRR y BTT (de 1/9 y 1/11 respectivamente), para contrastar las diferencias.

Figura 4.4 Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método BTT con respecto al resultado de la fórmula cerrada.



La cota es calculada considerando una k igual a uno y una tasa de convergencia igual a $1/11$.

En el eje de las abscisas se ha utilizado una escala logarítmica.

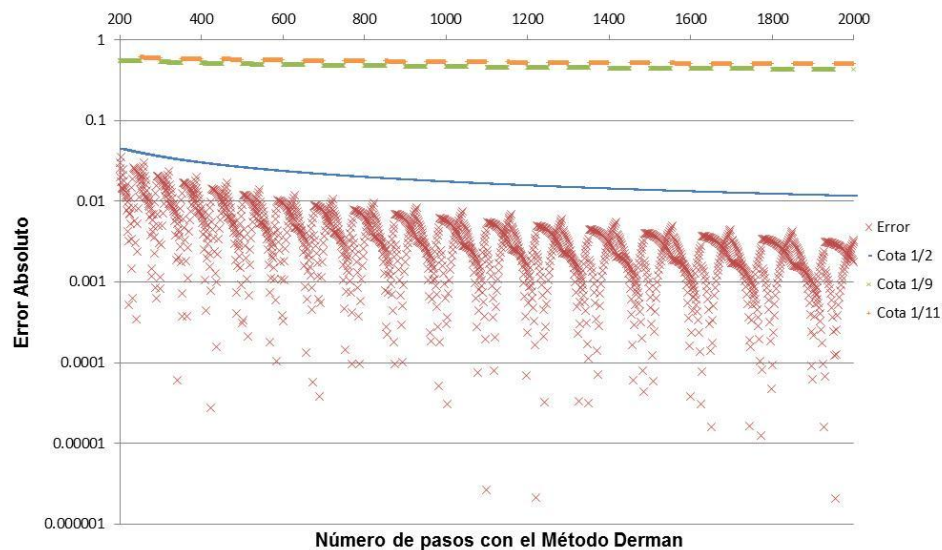
Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.3 Tasas de convergencia ρ de los Métodos, considerando particiones superiores a 100.

	Método	Tasa de convergencia ρ
↑ +rápida ↓ +lenta	Método Derman	$1/2$
	CRR	$1/9$
	BTT	$1/11$

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.5 Convergencia de los errores absolutos utilizando el Método Derman, contrastados con cotas con tasas de convergencia $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{11}$.



En el eje de las abscisas se ha utilizado una escala logarítmica.

Fuente: Elaboración propia.

4.3. Análisis del costo computacional

El esfuerzo o costo computacional es medido a través del tiempo empleado en la ejecución total para obtener el precio estimado.

En el capítulo anterior⁵¹ se encontró que prácticamente los métodos CRR y BTT presentaban el mismo costo computacional, siendo el Método Derman el más demandante en recursos computacionales; sin embargo, el método de árboles binomiales CRR no realiza ningún procedimiento para reducir el error de especificación, consecuentemente, las líneas de programación son menores con respecto a los otros dos métodos.

Es importante señalar que el tiempo computacional está en relación al manejo y tamaño de la red; es decir, entre más fina sea la partición del tiempo

⁵¹ Véase el Cuadro 3.4 de la sección 3.1.4 “Comparación entre modelos (ejemplos numéricos).”

mayor será tanto el número de nodos como las trayectorias a analizar con respecto a las barreras especificadas por el contrato.

Al analizar los datos, dividiendo el intervalo de tiempo desde una hasta dos mil partes, se encontró que la mejor estimación obtenida por el método CRR fue al considerar una subdivisión del tiempo en 984 partes, en dicho procedimiento el algoritmo requirió de 1.061 segundos; por otro lado, el Método Derman encontró su mejor estimación al fraccionar el tiempo en 1,954 partes, empleando 7.425 segundos; contrastantemente, el costo computacional presentado por el método BTT para obtener la mejor estimación fue de 0.858 segundos, realizando una segmentación del tiempo en 772 unidades. Sin embargo, el costo empleado por el Método Derman, es compensado con calidad de su estimación, como se puede observar en el siguiente cuadro.

Cuadro 4.4 *Tiempo empleado al encontrar la mejor estimación, y la partición “N” correspondiente del intervalo del tiempo de vencimiento de la opción.*

	Método	Tiempo	N	Errores absolutos x10⁻⁵
↑ +rápido +lento	CRR	1.061	984	5.96599
	BTT	0.858	772	6.98305
	Método Derman	7.425	1954	0.205469

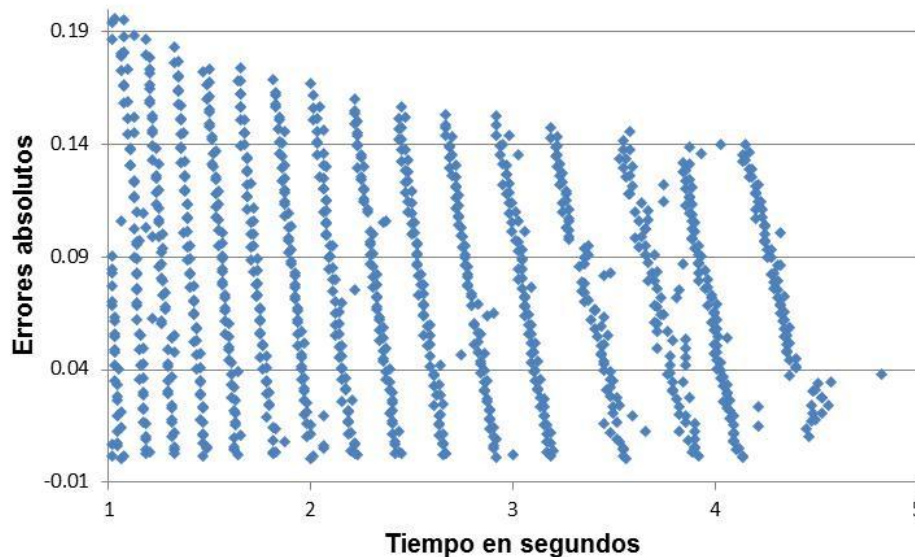
Fuente: Elaboración propia.

La información del cuadro anterior motiva el estudio de la calidad de la estimación con respecto al esfuerzo computacional. Incluso, uno de los parámetros iniciales de los métodos es el número de particiones a realizar al intervalo del tiempo; de esta manera, entre más fina sea la partición, se requerirá un mayor costo computacional y de memoria del procesador, consecuentemente, el análisis de las gráficas calidad versus el tiempo en producir la estimación en los precios cobra importancia.

En la Figura 4.6 se muestran la calidad de los resultados al realizar la estimación del precio de la opción con barrera utilizando CRR. En la ventana de

partición del tiempo considerada (de uno a dos mil particiones), el tiempo máximo empleado por el método de árboles binomiales fue de 4.82 segundos, y aunque para tiempos menores a un segundo se obtuvo tres resultados con errores absolutos del orden de 10^{-4} , también es cierto que los resultados presenta una gran variabilidad al considerar particiones del intervalo del tiempo superiores o iguales a dos donde el promedio de los errores fue de 0.1815, con una error máximo de 2.9768; por lo que por cuestiones ilustrativas no se muestran en dicha figura los datos correspondientes al intervalo de $[0,1)$.

Figura 4.6 Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el modelo CRR.



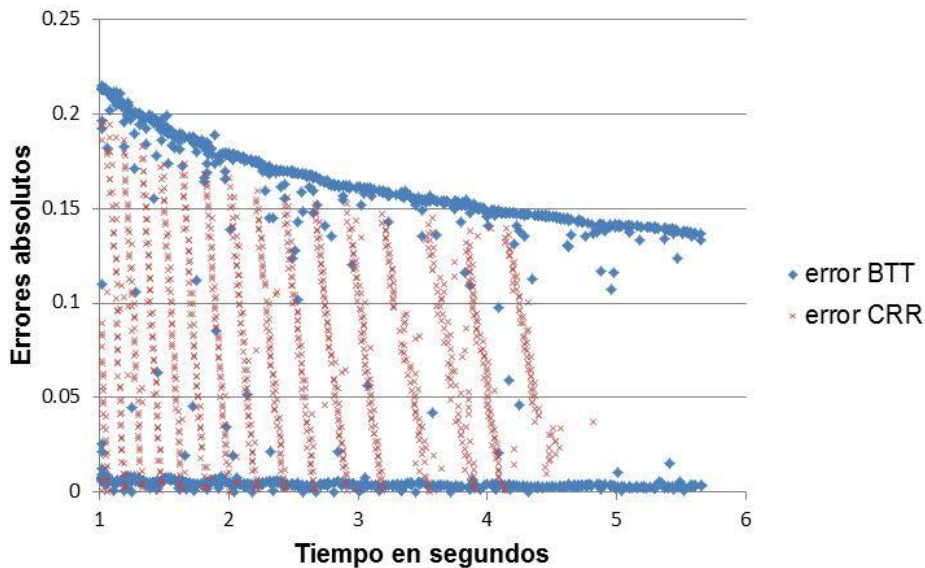
Fuente: Elaboración propia.

Nótese, en la Figura 4.6, que a pesar del costo computacional superior a dos segundos aún existen estimaciones con un alto grado de error, pues en el caso de un costo computacional superior a cuatro segundos, se obtuvo un error absoluto máximo de 0.1396.

En el caso del método BTT, el tiempo máximo empleado fue de 5.663 correspondiente a una división del tiempo de expiración de la opción en 1998 partes. La Figura 4.7 muestra la gráfica de calidad – costo computacional, del método BTT (marcadores en forma de diamantes) y el CRR (marcadores en forma

de “x”); en dicha figura se evidencia que los errores absolutos obtenidos por medio de CRR, dado el tiempo computacional, están prácticamente acotados por los errores absolutos generados por medio del método BTT.

Figura 4.7 Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el modelo BTT.



Fuente: Elaboración propia.

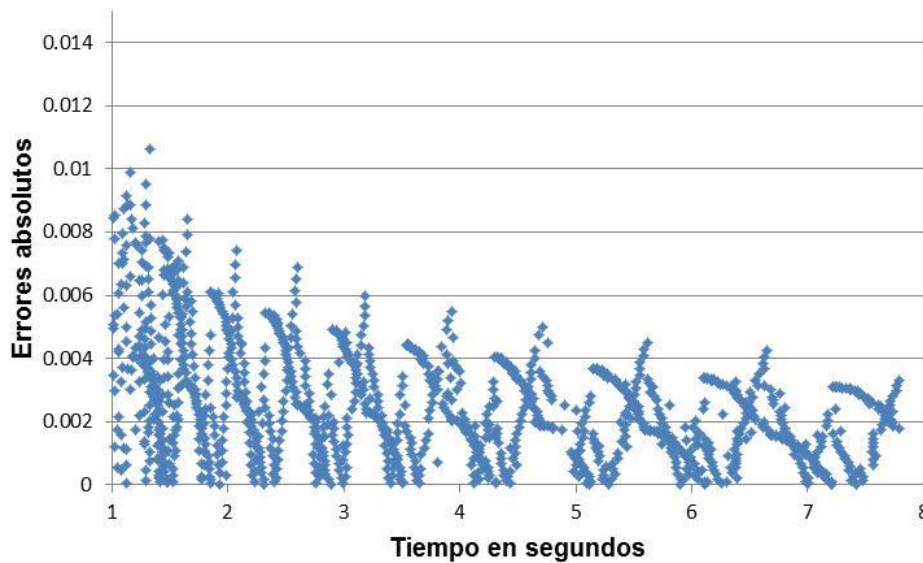
Por otra parte, el Método Derman muestra un comportamiento mucho más eficiente en comparación a los métodos anteriores, es decir, mayor calidad con respecto al costo computacional; el análisis de los errores absolutos muestra que los promedio por intervalos de longitud de un segundo son del orden de 10^{-3} ; así mismo, el mínimo de los errores absolutos, dadas las particiones consideradas, es igual a 2.05469×10^{-6} ; por otro lado, en tiempos de ejecución superiores a 3 segundos, el error máximo producido por el método es menor a 8×10^{-3} (véase el Cuadro 4.5 y la Figura 4.8).

Cuadro 4.5 Características descriptivas de los errores absolutos, con respecto al costo computacional, al utilizar el método Derman.

Costo	Errores		
	Máximo	Mínimo	Promedio
[1,2)	0.010652387	3.0767×10^{-05}	0.003817643
[2,3)	0.007416384	2.12706×10^{-06}	0.002821754
[3,4)	0.005994132	3.18449×10^{-05}	0.002579726
[4,5)	0.004981085	4.3542×10^{-05}	0.002079544
[5,6)	0.004500029	1.6153×10^{-05}	0.001796418
[6,7)	0.004232834	1.24444×10^{-05}	0.001800454
≥ 7	0.003291251	2.05469×10^{-06}	0.001638566

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.8 Comparación de la calidad versus tiempo utilizando el Método Derman.



Fuente: Elaboración propia.

Resumiendo, entre los métodos estudiados basados en la generación de nodos (CRR, BTT y el Método Derman), el que presenta mayor costo computacional es el Método Derman; sin embargo, éste también presenta la mejor relación costo-calidad, es decir, el costo empleado en la generación de las redes

nodales es compensado por la calidad en las estimaciones del precio de la opción barrera, medida a través del error absoluto.

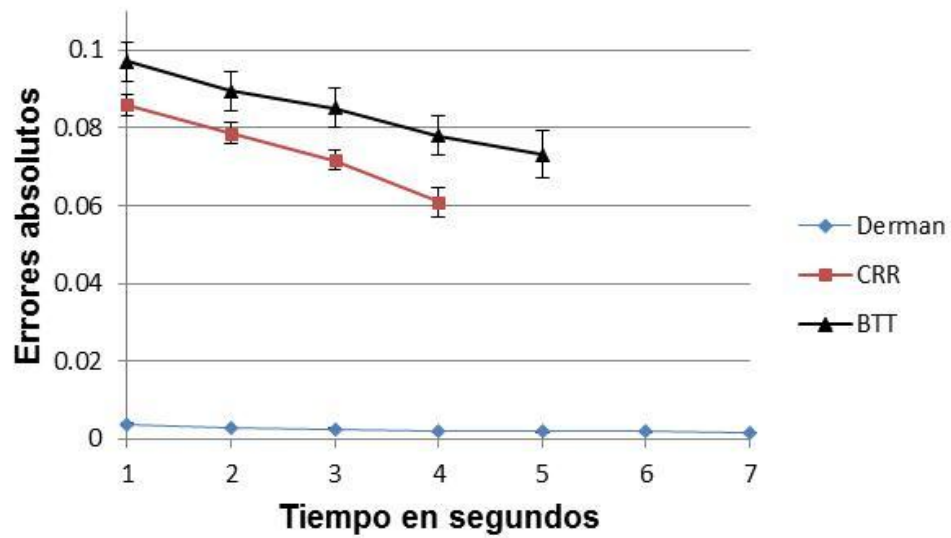
4.4. Análisis de la estabilidad

La estabilidad es la calidad de los algoritmos que ante pequeños cambios en los datos iniciales se produzcan pequeños cambios en los resultados finales; de acuerdo a Burden y Faires (1985), un algoritmo con esas características se le denominará estable, en caso contrario, el algoritmo será inestable (Burden y Faires, 1985: 33-34).

Una forma de medir la estabilidad de los algoritmos es a través del estudio de la variabilidad de los resultados obtenidos; por ejemplo, Barr et. al. (1995) recomiendan el estudio de gráficas de la calidad versus tiempo, pero considerando barras de error con respecto a los puntos promedios de la calidad de los datos; para ello se utilizará el error estándar de las estimaciones de los precios de la opción, agrupados en intervalos de acuerdo a su costo computacional, debido a que nos proporcionará una medida de la dispersión de los errores con respecto a su promedio.

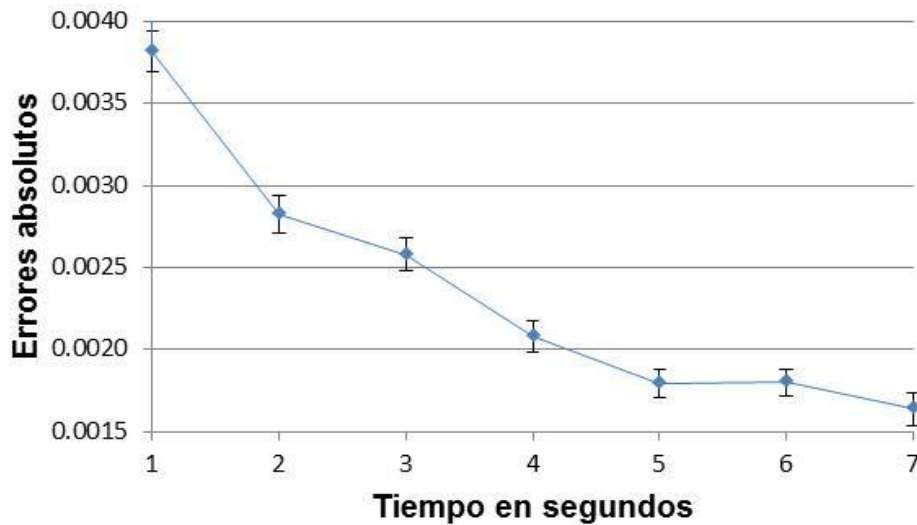
La gráfica de los promedios de los errores, y sus correspondientes barras de error, para los tres métodos se encuentra en la Figura 4.9; en ésta se puede observar que los promedios de los errores producidos por el método BTT son superiores a los otros dos métodos; en contraste, el Método Derman proporciona un menor promedio en los errores al estimar el precio de la opción. Aunado a ello, el Método Derman ofrece una menor variabilidad de los errores (véase también la Figura 4.10) con respecto a los métodos CRR y BTT; nótese, además, que el método BTT, por el tamaño de la barra alrededor del promedio, proporciona una mayor variabilidad de los errores con respecto a su media así como un mayor traslape entre las barras de error.

Figura 4.9 Variabilidad de los errores absolutos, con respecto a su media por intervalo de costo computacional, para los métodos CRR, Derman y BTT.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.10 Variabilidad de los errores absolutos, con respecto a su media por intervalo de costo computacional, para el Método Derman.



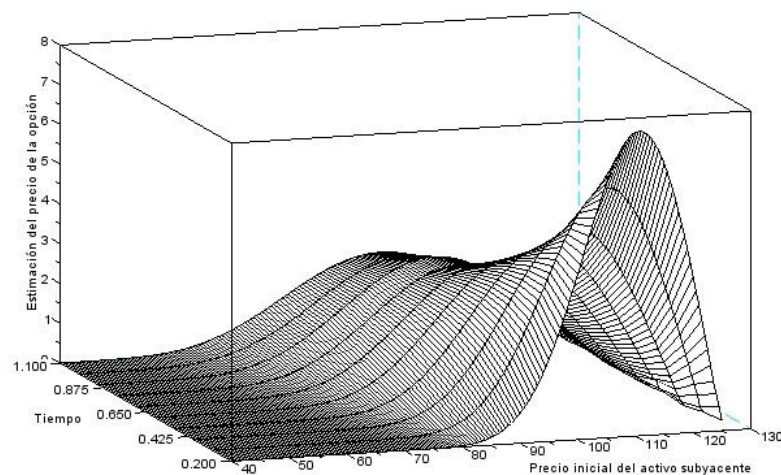
Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, otra forma de medir la estabilidad de los métodos es realizando pequeños cambios en los datos iniciales y analizar los resultados finales por medio

de los errores absolutos. Estos errores son calculados al aplicar los métodos de árboles analizados a distintos datos iniciales correspondientes al precio inicial del activo subyacente y el tiempo o plazo residual del contrato y comparando el resultado con respecto a la estimación de la fórmula cerrada.

Los cambios en los datos iniciales fueron realizados al precio del subyacente y al tiempo de vencimiento del contrato de la siguiente manera: al precio del subyacente se le permitirá variar en el intervalo de 40 u.e. hasta un precio de 125 u.e con aumentos de 0.5 unidades; el plazo residual variará en el intervalo de 0.2 a 1.1, con incrementos iguales a 0.1 unidades; por otro lado, se mantuvo constante la volatilidad en 20% y la barrera superior en 125 u.e. Es decir, se genera una combinación de 10 por 171 distintos posibles escenarios; de este modo, en la Figura 4.11 se ilustra la superficie de los resultados numéricos obtenidos en la valuación de dichas opciones de compra up-and-out; es importante señalar que superficies similares se obtienen al utilizar cualquiera de los métodos.

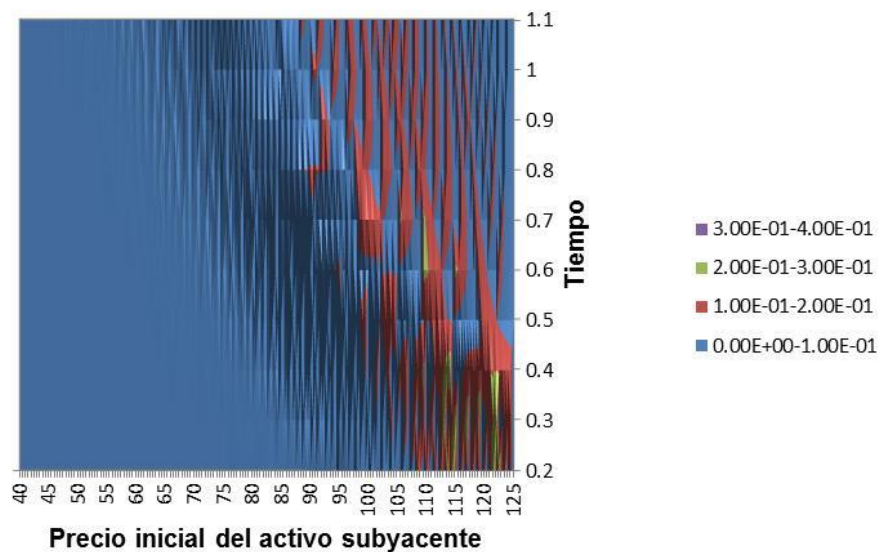
Figura 4.11 Precios para una opción up-and-out de compra, tipo europeo; con diferentes precios iniciales del subyacente y diversos tiempos de maduración, con una volatilidad del 20%, precio de ejercicio de 100 y una barrera de 125.



Fuente: Elaboración propia.

Debido a la gran cantidad de datos al modificar los datos iniciales (1710 triadas, conformadas por el precio inicial del subyacente, el plazo residual del contrato y el error del método) se utilizaron gráficas de contorno para el análisis gráfico de los errores absolutos; es decir una topografía en dos dimensiones, vista desde arriba, de los errores para mostrar la relación entre los puntos. Donde el eje de las abscisas corresponde al precio del activo, el eje de las ordenadas al tiempo, y la profundidad el tamaño de los errores absolutos; de esta manera, cada una de la bandas de colores representan un rango de los errores en las Figuras 4.12 a 4.14.

Figura 4.12 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método CRR.



Fuente: Elaboración propia.

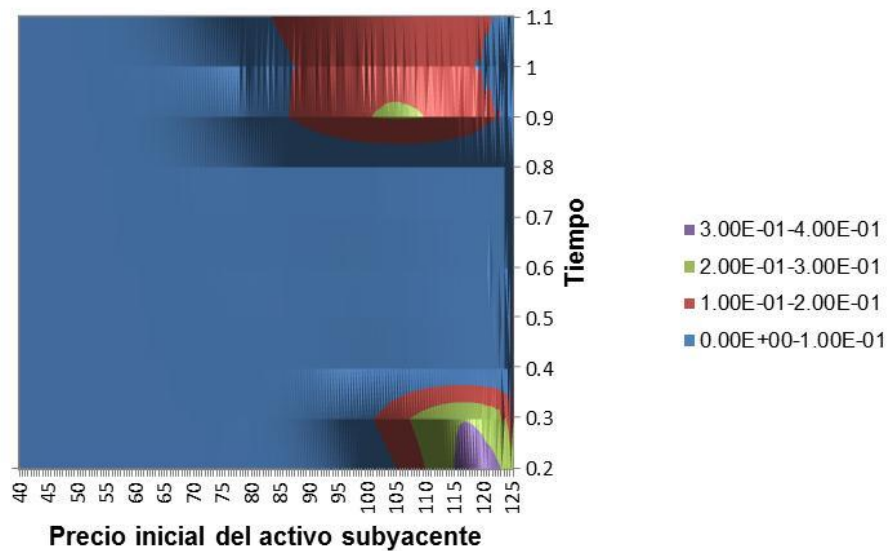
Lo importante de las gráficas, en este caso, no sólo es el tamaño del error propiamente, si no el cambio de bandas de los errores por grupos de duplas al modificar las condiciones iniciales. Las gráficas de contorno, permitirán observar donde se encuentran focalizados los errores por tamaño de bandas y entre más cambios de bandas ante ligeros cambios en las características iniciales, ya sea en

el tiempo de maduración o en el precio inicial del activo subyacente, el método mostrará una mayor inestabilidad.

En el caso de aplicar CRR a las duplas de los cambios en las condiciones iniciales, se nota que su gráfica de contorno presenta indistintamente bandas interpuestas de distinto orden de error; en otras palabras, una banda de color “rojo” puede estar seguida inmediatamente por una banda de color “azul” para regresar a una banda “roja” (véase la Figura 4.12).

Sin embargo, las estimaciones de los precios proporcionadas por el método BTT presentan una mayor estabilidad, al mostrar claras zonas por grado de error. Es importante señalar que este método, dadas las condiciones iniciales, presenta mayores zonas de error en dos subconjuntos de datos: 1) con precios iniciales superiores a 100 y un plazo residual menor a 0.3; y 2) para precios mayores a 80 con un plazo a vencimiento superior a un año, no obstante, los errores se mantienen estables en estas zonas (véase la Figura 4.13).

Figura 4.13 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT.

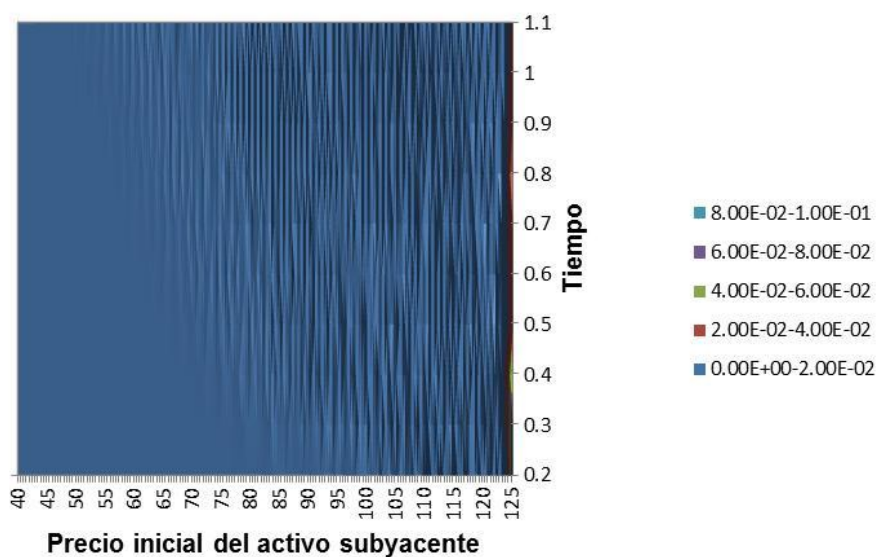


Fuente: Elaboración propia.

Es importante recordar que “[a]lgunos algoritmos serán estables para cierto grupo de datos iniciales pero no para todos” (Burden y Faires, 1985: 33, 34).

Contrastantemente, el Método Derman no solamente presenta un grado de error mucho menor, sino también una mayor estabilidad en la valuación de las duplas, a excepción de cuando el precio inicial del subyacente se encuentra en niveles muy cercanos a la barrera del contrato, como se puede observar en la Figura 4.14⁵².

Figura 4.14 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman.



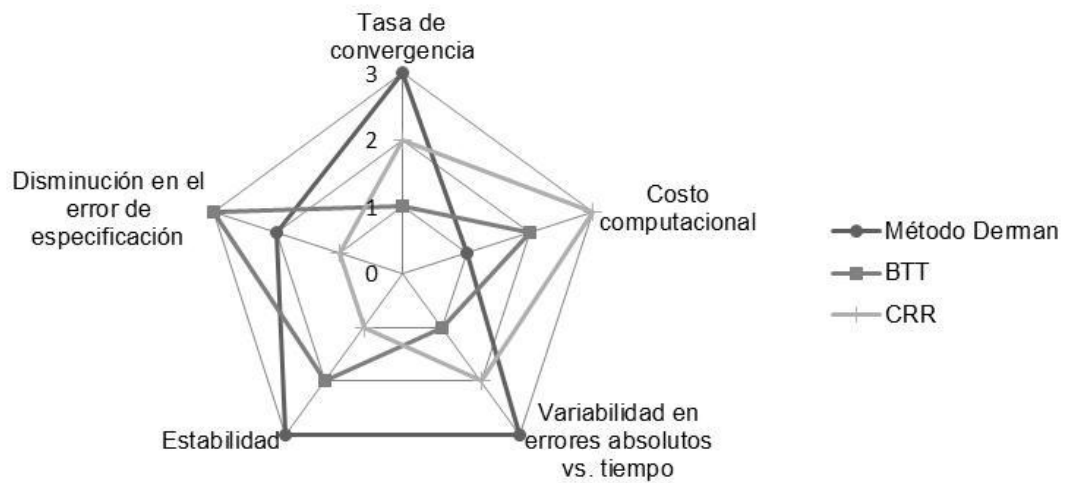
Fuente: Elaboración propia

Para concluir, la Figura 4.15 resume el resultado del análisis realizado a los métodos CRR, BTT y Método Derman; en esta figura el método ideal obtendría

⁵² En el Apéndice 14 se encuentra un conjunto de gráficas donde también se incluye la variación de la barrera de la opción up-and-out.

una calificación de tres; por lo tanto, la gráfica permite observar los puntos débiles de cada uno de los métodos estudiados.

Figura 4.15 Resumen gráfico del análisis de los resultados proporcionados por los métodos CRR, BTT y Derman.



Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se presentaron modelos para la valuación de opciones con barrera; estos modelos se pueden dividir en dos grupos: 1) los modelos basados en árboles y 2) simulaciones Monte Carlos para estimar el precio de la opción. Es importante señalar que los modelos analizados son interpretaciones discretas del tiempo de un proceso continuo en el tiempo.

Dentro del primer grupo de modelos basados en árboles se exploraron tres métodos propuestos para la valuación de opciones con barreras: CRR, BTT y Derman; los cuales presentaron ventajas y desventajas en su uso.

En el caso del método binomial o CRR este método presentó los siguientes atributos:

- un reducido costo computacional, y
- una menor variabilidad de los errores absolutos versus el costo computacional, comparado contra el método BTT.

A pesar de ello, la red creada por este método no se adapta para todas las particiones del tiempo a las características estipuladas en el contrato opcional, elevando así el error de especificación; en consecuencia, se estaría valuando una opción diferente a la contratada en ciertas particiones. Una forma de evitar este error es generar primeramente la red e identificar, posteriormente, si ésta incluye la barrera de la opción, en caso afirmativo, se valuaría la opción; en caso contrario se realizaría otra partición y se volvería a reevaluar la coincidencia de los nodos con las características del contrato. No obstante, este ejercicio podría ser demandante en recursos con resultados pírricos.

Con respecto al algoritmo de árboles bino-trinomiales o BTT, el esfuerzo por restringir el error de especificación de este método incrementa ligeramente el costo computacional. Sin embargo, es importante señalar que a diferencia de los otros métodos considerados, el método BTT posee las siguientes bondades:

- crea una red de nodos de acuerdo a las características principales de la opción, pues el algoritmo de construcción permite no sólo ajustar los nodos de la red para hacerla coincidir con la barrera de la opción, sino también con su precio de ejercicio; proporcionando, de esta manera, un precio más preciso;
- como consecuencia del punto anterior, el método BTT crea la estructura nodal antes de empezar a realizar la valuación; al contrario, el Método Derman primero crea la red de manera similar al CRR; en segundo lugar realiza las valuaciones en cada uno de los nodos y concluye realizando los ajustes necesarios en cada uno de los nodos que pertenezcan en la frontera o cercanos a la barrera especificada.

Así mismo, dentro de los métodos que involucran árboles, el Método Derman resultó el más demandante en tiempo computacional; aunque para fines prácticos el tiempo empleado no fue radicalmente diferente, pues mientras que el tiempo máximo de BTT fue de 5.663 segundos el Método Derman empleó un tiempo máximo de 7.785 segundos, una diferencia de tan solo 2.122 segundos. Por el contrario, Derman presentó las siguientes propiedades positivas:

- mostró ser un método que provee una tasa de convergencia mucho más rápida que la presentada por CRR o por BTT; es decir, la solución del algoritmo propuesto por el Método Derman al incrementar el número de divisiones, en la ventana del tiempo considerada, convergerá a una tasa de $\frac{1}{2}$, la cual es mayor a las tasas de convergencia de $\frac{1}{9}$ y de $\frac{1}{11}$ correspondientes a los métodos CRR y BTT, respectivamente;
- una mejor relación error absoluto versus costo computacional.

Con respecto al análisis de estabilidad de los métodos, se pudo determinar que CRR era el método más inestable; y aunque el método BTT resultó ser un método estable, presentó un incremento en los errores en dos subconjuntos de datos:

- 1) cuando se combinan fechas de expiración lejanas con precios iniciales del activo subyacente muy cercanos tanto al precio de ejercicio de la opción como al precio de la barrera; y
- 2) de forma similar al inciso anterior, con precios iniciales del activo subyacente muy cercanos al precio de ejercicio de la opción como al precio de la barrera pero con fechas de expiración muy próximas.

Sin embargo, el Método Derman presenta una mayor estabilidad a lo largo de la vida de la opción. Por otro lado, este método proporciona una gran calidad en los datos, a excepción de precios iniciales del activo muy cercanos al precio de la barrera, donde los errores empiezan a incrementarse.

Con respecto a las valuaciones de las opciones con barrera por medio de simulaciones Monte Carlo resultó que tanto para el método tradicional como el método condicional (el cual utiliza técnicas de reducción de varianza por condicionamiento), las simulaciones son ampliamente demandante en memoria de los procesadores así como en el tiempo para obtener una estimación. Además, tomando como guía de comparación el resultado obtenido por las fórmulas cerradas, se descubrió que los métodos BTT y Derman, basados en árboles, proveían de mayor calidad en las soluciones que el resultado propuesto por las simulaciones Monte Carlo.

En resumen, cuando se seleccionó un método de valuación de opciones con barrera se alienta a analizar no sólo las fortalezas del algoritmo seleccionado sino también sus puntos débiles; dentro de dicho análisis al menos debe incluirse:

- el estudio de la creación o disminución de errores de especificación,
- la convergencia del método,
- el costo computacional,
- la variabilidad de los errores,
- y la estabilidad del método.

Los Métodos Derman y BTT, como algoritmos para valorar opciones con barrera, mostraron sólidos resultados en el análisis de los cinco puntos anteriores. Dominando la calidad de los datos en Derman sobre BTT; no obstante, aunque el Cuadro 3.5 muestra una mejor calidad en el Método Derman sobre el BTT, también es cierto que los errores relativos generados por éste al variar los datos relativos a la volatilidad y el precio de ejercicio son del orden de 10^{-3} ; además, para ciertos conjuntos de datos, la estimación proporcionada por el BTT es de igual calidad o superior a la de Derman.

Igualmente, conforme al análisis de estabilidad tanto para el método BTT como el Método Derman, se puede concluir que ante pequeños cambios en los parámetros, se obtienen pequeños cambios en el resultado de ambos métodos.

En conclusión, entre los métodos Derman, BTT, Monte Carlo y Monte Carlo condicional para valuación de opciones con barrera, se elegiría en primer instancia a Derman, y a BTT; posteriormente a Monte Carlo condicional y Monte Carlo, debido a la calidad de las estimaciones y el tiempo empleado para hallar la solución; de igual importancia es el esfuerzo realizado por los dos primeros métodos en reducir el error de especificación.

Finalmente, el análisis realizado deja claro que aún hay puntos a desarrollar o a fortalecer como técnicas para mejorar la tasa de convergencia de los árboles bino-trinomiales, y con ello la reducción de los saltos en los precios como lo indicado en el histograma de la Figura 3.10b, para lo cual será necesario conocer los avances realizados no sólo en el ámbito financiero sino también el avance en otras ciencias como la Física y el Análisis Numérico, pues las soluciones a problemas no lineales, problemas de combinatoria y técnicas numéricas podrían ayudar a resolver no sólo problemas de convergencia, sino también en incrementar la estabilidad y la calidad de la solución propuesta, en beneficio de los agentes económicos, usuarios de este tipo de productos derivados; no obstante, estos temas se dejan para posteriores investigaciones y desarrollos.

Abreviaturas y nomenclaturas

$(X)^+$.-	Al máximo entre X y cero.
$[X]$.-	Al menor de los enteros, tal que es mayor o igual a X .
$\lceil X \rceil$.-	Al mayor de los enteros, tal que es menor o igual a X .
\mathbb{R} .-	El conjunto de los números reales.
\mathbb{Z} .-	El conjunto de los números enteros.
BSM .-	Al modelo desarrollado por Fischer Black, Myron Sholes y Robert Merton.
BTT .-	Al modelo que combina árboles trinomiales con árboles binomiales recombinantes (por sus siglas en inglés) (Dai, Tian-Shyr y Lyuu, Yuh-Dauh (2010)).
CRR .-	Árbol creado conforme lo indicado por Cox, Ross y Rubinstein en 1979.
Derman o Método Derman .-	Al método descrito por (Derman, et. al., 1995).
K .-	Precio de ejercicio de la opción o precio futuro fijado del bien subyacente en un contrato forward.
KoU .-	Barrera superior al precio del subyacente para las opciones barrera.
r .-	Tasa de interés a utilizar a utilizar en la valuación de opciones.
S .-	Precio spot del subyacente objeto de la opción.
σ .-	Volatilidad del subyacente objeto de la opción.
T .-	Tiempo residual de la opción.
u.e. .-	Unidades económicas.

Glosario

Arbitraje	Véase: <i>oportunidades de arbitraje</i>
Árbol recombinante	Es un árbol donde se recombinan los nodos, es decir, si un movimiento hacia arriba es seguido por un movimiento hacia abajo da el mismo resultado si primero la trayectoria tuvo un movimiento hacia abajo y posteriormente hacia arriba (Björk, 2004,15).
BBT	El Método de árbol bino-trinomial, BBT por sus siglas en inglés, proporciona un árbol binomial CRR trunco en su primer paso, punto donde se combina con una estructura trinomial (Dai y Lyuu 2010).
Call	Véase.- Opción call.
Costo computacional	Véase.- Esfuerzo computacional
Debugging	Inspeccionar el código de un programa para detectar algún tipo de error. Los tipos de error pueden ser, por ejemplo, errores de sintaxis o errores en el tiempo de ejecución.
Error absoluto	A la diferencia, en valor absoluto, entre el valor proporcionado por la aproximación del método correspondiente y el valor de referencia.
Error de cuantificación	Error generado al tratar un fenómeno “continuo” como si fuera “discreto”.
Error de especificación	Error generado por el modelo debido a la incapacidad de mimetizar completamente las condiciones pactadas en el contrato del producto derivado.
Error relativo	Al cociente entre el error relativo y el precio inicial del activo subyacente en el producto derivado.
Esfuerzo computacional	Tiempo empleado en la ejecución total para obtener el precio estimado.
Estabilidad	La estabilidad es la calidad de los algoritmos que ante cambios pequeños en los datos se produzcan cambios pequeños en los resultados finales (Burden, 1985:34).
Forward	Es un contrato derivado por medio del cual se fija el precio de compra o venta del bien subyacente (Neftci,

2008:51).

Generador de números pseudo-aleatorios (NPA)	Algoritmo determinista para generar números que emulen la aleatoriedad de una variable. Los métodos requieren una “semilla” y un conjunto de “variables de estado”.
Histograma	Presentación gráfica de una distribución de frecuencias, de frecuencias relativas o de frecuencias porcentuales; se traza colocando los intervalos de clase sobre el eje horizontal y las frecuencias sobre el vertical (Anderson, Sweeney y Williams, 2001:33).
Intervalo de clase	Intervalo de valores de los datos para agrupar los elementos de un conjunto (Anderson, Sweeney y Williams, 2001:31).
Intervalo de confianza	<p>Es el intervalo que contiene el parámetro estimado, dada un adecuado grado de confianza. Suponga que se quiera estimar a μ por medio de $\hat{\mu}$, será necesario encontrar dos números positivos δ y α de tal forma que la probabilidad de que el intervalo $(\hat{\mu} - \delta, \hat{\mu} + \delta)$ contenga al verdadero μ es igual a $1 - \alpha$; donde α se encuentra entre 0 y 1. Es decir,</p> $P(\hat{\mu} - \delta \leq \mu \leq \hat{\mu} + \delta) = 1 - \alpha$ <p>Además, a α se le denominará <i>nivel de significancia</i> y a $1 - \alpha$ como coeficiente de confianza (Brandimarte, 2002:640; y Gujarati y Porter, 2010:108)</p>
Máximo error absoluto	Es el máximo de los errores absolutos.
MAE	Véase.- Máximo error absoluto
NPA	Véase.- Generador de números pseudo-aleatorios
Opción call	Es un contrato derivado por medio del cual el tenedor de éste obtiene el derecho de comprar el bien subyacente. La opción se considerará <i>européa</i> sí sólo se puede ejercer a su vencimiento; <i>americana</i> , si puede ejercerse en cualquier momento durante la vida del contrato; o <i>bermuda</i> si puede ejercerse en fechas determinadas. (Neftci, 2008: 205-206)
Opción barrera	Es una opción donde su payoff depende si el precio del

bien subyacente alcanza ciertos precios denominados “barreras”.

**Opción barrera
“knock-in”**

Es una opción barrera que empieza a existir si el precio del bien subyacente toca la barrera antes de su fecha de vencimiento.

**Opción barrera
“knock-out”**

Es una opción barrera que deja de existir si el precio del bien subyacente toca la barrera antes de su fecha de vencimiento.

**Opciones
dependientes de
la trayectoria o
“path
dependent”**

Opciones donde el payoff no solamente depende del precio del bien subyacente al vencimiento del contrato, es decir en el tiempo “ T ”, sino del comportamiento del precio del bien a lo largo de la vida del derivado, $t < T$.

**Oportunidades de
arbitraje**

Es una estrategia en la cual un inversionista puede obtener una ganancia sin riesgo, sin contar con capital alguno (Pliska, 1999:9).

**Orden de
convergencia**

Se dirá que una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número α , con un orden de convergencia ρ si existe una k , tal que (Burden y Faires 1985:36 y Chance, 2008:51):

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \frac{k}{n^\rho}.$$

Path dependent

Véase.- Opciones dependientes de la trayectoria.

Payoff

Al pago al vencimiento realizado al tenedor de un producto derivado.

**Raíz del error
cuadrático medio**

Se define como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n}}$$

Por otro lado, el error cuadrático medio es definido como

$$MSE(\hat{\theta}) = E [(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

La interpretación es la siguiente: una MSE de cero indica que el estimador predice las observaciones del parámetro θ con perfecta exactitud. Los valores del MSE de dos modelos estadísticos se pueden utilizar para comparar que tan bien explican las observaciones

dadas <http://en.wikipedia.org>.

Rebate

A la compensación otorgada por el emisor al poseedor de la opción barrera por el evento de que el precio del activo subyacente haya cruzado alguna de las barreras (Brandimarte, 2002:119).

RMSE

Véase.- Raíz del error cuadrático medio

S_S-log-precio

Véase V-log-precio

V-log-precio

El V-log-precio del precio del bien (o de la acción) V' se define como $\ln(V'/V)$. Como consecuencia, un V-log-precio de z , implica un precio del bien (o de la acción) de $V \exp(z)$. Es decir, $\ln\left(\frac{V \exp(z)}{V}\right) = z$.

Bibliografía

- Anderson, David R; Sweeney, Dennis J y Williams, Thomas A. (2001). *Estadística para administración y economía. Vol. 1*. International Thomson Editores, México.
- Attaway, Stormy (2011). *Matlab: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*. Elsevier, Massachusetts.
- Bampou, Dimitra. (2008, June) *Numerical Methods for Pricing Exotic Options*. <http://www3.imperial.ac.uk/pls/portallive/docs/1/45415707.PDF>
- Barr, Richard S; Golden, Bruce L; Kelly, James P; Resende, Maurice G.C.; Stewart Jr., William R (1995). Designing and reporting on computational experiments with heuristic methods, en *Journal of Heuristics*, 1: 9-32.
- Baxter, Martin y Rennie, Andrew (1997). *Financial Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Black, Fisher y Scholes, Mayron (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81. Mayo/junio 1973, pp. 637-659.
- Björk, Tomas (2004). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford University Press, Oxford.
- Boyle, Phelim y Lau, Sok Hoon (1994) Bumping up against the barrier with the binomial method, en *The Journal of Derivatives*; summer 1994.
- Brandimarte, Paolo (2002). *Numerical Methods in Finance and Economics: a MatLab-based Introduction*. Wiley-Interscience; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Broadie, Mark; Glasserman, Paul; y Kou, Steven (1997). A Continuity Correction for Discrete Barrier Options. *Mathematical Finance*. 1997, Vol. 7, No. 4, pp. 325-348.
- Bundi, Davis (2005). *Numerical methods for the valuation of financial derivatives*. A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, in the Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Western Cape, South Africa.
- Burden, Richard L. y Faires, J. Douglas (1985). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- Chance, Don M. (2008). A synthesis of binomial option pricing models, en *Journal of applied finance*; spring/summer 2008.
- Cekic, Esad. (2008) Numerical Determination of Exotic Option Prices. Diplom Thesis, University of Zurich.
- Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark (1979) The pricing options and corporate Liabilities, en *The Journal of Financial Economics*; Vol7, No 3, pp. 229-263.
- Dai, Tian-Shyr y Lyuu, Yuh-Dauh (2010) The Bino-trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing, en *The Journal of Derivatives*; summer 2010.
- De Lara Haro, Alfonso (2008). *Medición y control de riesgos financieros*. Limusa, 3ª Edición. México.
- Derman, Emanuel; Kani, Iraj; Ergener, Deniz; and Bardhan, Indrajit (1995) Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers, en *Financial Analysts Journal* / November-December 1995.
- Glasserman, Paul (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag. New York.
- Gujarati, Damodar y Porter, Dawn (2010). *Econometría*. Mc. Graw Hill. 5ª edición, México.
- Hechenleitner, Bernhard (2004). *Defects in random number routines of well-known network simulators and appropriate improvements*. A dissertation presented to the School of Scientific Computing of the University of Salzburg in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor technicae.
- Hull, John (2009). *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall, New Jersey.
- Jäckel, Peter (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley finance series. John Wiley & Sons, LTD. Chichester West Sussex, England.
- Kwok, Yue-Kuen (2008). *Mathematical models of financial derivatives*. Springer Berlin Heidelberg, 2ª Edición.
- Kuan, Grace y Webber, Nick (2003). *Valuing Continuous Barrier Options on a Lattice solution for a Stochastic Dirichlet Problem*. http://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/wbs/subjects/finance/research/wpaperseries/pp_04.135.pdf

- Kyprianou, Andreas E.; Schoutens, Wim y Wilmott, Paul (comp.) (2005). *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models*. John Wiley & Sons, Ltd. West Sussex.
- Lemieux, Christiane (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer. 1ª Edición. New York.
- Luo, L. (2001) Various Types of Double Barrier Options en *Journal of Computational Finance*; 4, pp. 125–138.
- Marsaglia, George y Zaman Arif (1991) A New Class of Random Number Generators. *The Annals of Applied Probability*, Vol. 1, No. 3 (Aug., 1991), pp. 462-480. Publicado por el Institute of Mathematical Statistics.
- Matsumoto, Makoto y Nishimura, Takuji (2011) *Mersenne-Twister home page*. <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html> (consultado el 2 de julio de 2012).
- Merton, Robert C (1973) Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4. Summer 1973, pp. 141-183.
- Neftci, Salih N. (2008). *Principles of financial engineering*. Academic Press, Elsevier. San Diego, California.
- Pliska, Stanley R. (1999). *Introduction to Mathematical Finance: discrete time models*. Blackwell Publishers, Oxford.
- Ross, Sheldon. (1997). *Introduction to Probability Models*. Academic Press, Berkeley, California.
- Rubinstein, Mark (1991). *Somewhere over the rainbow*. Risk magazine 4 (10) 63–66.
- _____ (2000, May) On the relation between binomial and trinomial options pricing models en *UC Berkeley, Research Program in Finance*, Working Papers. <http://haas.berkeley.edu/finance/WP/rpflist.html>
- Reiner, E y Rubinstein, Mark (1991) *Breaking down the barriers*. Risk magazine 4 (8) 28–35.
- Taksar, Tatiana. (1997) *Analytical approximate solutions for the prices of American exotic options (Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Applied Mathematics and Statistics)*. State University of New York.

- Sherwani, Yasir (2007). *Binomial approximation methods for option pricing*. U.U.D.M. Project Report 2007. Department of Mathematics, Uppsala University. Suecia
- Shreve, Steven E. (2000a) *Stochastic Calculus for Finance I: The binomial asset pricing model*. Springer, New York.
- _____ (2000b) *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time models*. Springer, New York.
- Spiegel, Murray R.; Schiller, John J.; y Srinivasan, R.Alu (2003). *Teoría y problemas de probabilidad y estadística*. Segunda edición, Mc. Graw Hill.
- Seydel, Rüdiger U. (2009). *Tools for Computational Finance*. Springer Berlin Heidelberg. Berlin, Heidelberg.
- Wilmott, Paul (2007). *Introduces Quantitative Finance*. John Wiley & Sons Ltd. West Sussex, England.
- Venegas Martínez, Francisco (2008). *Riesgos financieros y económicos*. Cengage Learning Editores. México, D.F.

Apéndice 1. Desarrollo algebraico para la determinación del valor de un forward

Al final del periodo, el precio de la acción será igual a $S_1(u)$ o a $S_1(d)$ dependiendo si el precio de la acción sube o baja respectivamente. Así mismo, el payoff del forward será igual a

$$f(S_1(u)) = S_1(u) - K,$$

$$f(S_1(d)) = S_1(d) - K.$$

Del Capítulo 1 se determinó la fórmula para obtener el valor de un producto derivado, indicado por la identidad (1.9), la cual se indica a continuación

$$V = \exp(-rt)[qf(S_1(u)) + (1 - q)f(S_1(d))]. \quad (1.9)$$

Donde:

$$q \equiv \frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)}, \text{ y}$$

$$1 - q \equiv \frac{S_1(u) - S_0 \exp(rt)}{S_1(u) - S_1(d)}.$$

Por lo tanto, al substituir las expresiones relativas a “ q ”, “ $1-q$ ” y las correspondientes a los payoffs se tiene

$$\begin{aligned} V &= \exp(-rt)[qf(S_1(u)) + (1 - q)f(S_1(d))] \\ &= \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} f(S_1(u)) + \frac{S_1(u) - S_0 \exp(rt)}{S_1(u) - S_1(d)} f(S_1(d)) \right] \\ &= \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} (S_1(u) - K) + \frac{S_1(u) - S_0 \exp(rt)}{S_1(u) - S_1(d)} (S_1(d) - K) \right] \\ &= \\ &= \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) S_1(u) - S_1(d) S_1(u) - K S_0 \exp(rt) + K S_1(d) + S_1(u) S_1(d) - S_1(d) S_0 \exp(rt) - K S_1(u) + K S_0 \exp(rt)}{S_1(u) - S_1(d)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) S_1(u) + K S_1(d) - S_1(d) S_0 \exp(rt) - K S_1(u)}{S_1(u) - S_1(d)} \right] \\
&= \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) S_1(u) - S_0 \exp(rt) S_1(d) + K S_1(d) - K S_1(u)}{S_1(u) - S_1(d)} \right] \\
&= \exp(-rt) \left[\frac{(S_1(u) - S_1(d))(S_0 \exp(rt) - K)}{S_1(u) - S_1(d)} \right] \\
&= \exp(-rt) [S_0 \exp(rt) - K]
\end{aligned}$$

Para finalmente obtener: $V = S_0 - K \exp(-rt)$.

Apéndice 2. Desarrollo algebraico para la determinación del valor interpolado $\tilde{V}(D)$ de acuerdo a la distancia entre la barrera especificada y las barreras efectiva y modificada.

Debido a la posibilidad de que por medio de los modelos binomiales, la red generada no provea un conjunto de nodos coincidentes con la barrera especificada; el Método Derman plantea una interpolación del valor de la opción por medio del conjunto de nodos que se encuentran por arriba y por debajo de la barrera especificada. El conjunto de nodos donde se hace palpable, por primera vez, el efecto de la barrera se denomina *barrera efectiva*, mientras que el otro conjunto de nodos, por practicidad, se denominará *barrera modificada*.

El objetivo del método es considerar la proximidad de la barrera especificada sobre la barrera modificada. Ahora bien, sea “ D ” el nodo por debajo de la barrera especificada y, por ende, residente en la barrera modificada, mientras que el nodo “ U ” corresponde al valor de ubicado en la barrera efectiva. Para el nodo “ D ” deberá calcularse el valor de la opción, $V(D)$, considerando la barrera efectiva. Así mismo, deberá calcularse la compensación $T(D)$ por vencimiento sin valor de la opción (rebate), considerando la barrera modificada como si fuera la barrera pactada.

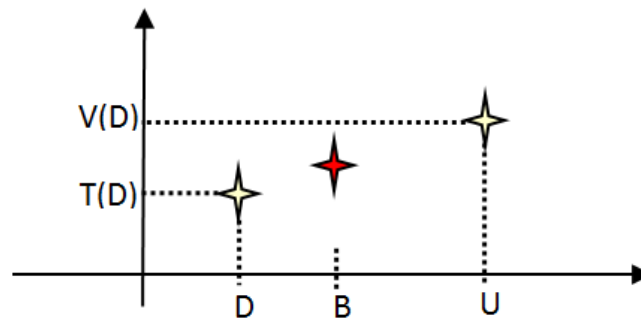
Con esos valores, $V(D)$, $T(D)$, D y U (véase la Figura A2.1), deberá interpolarse para obtener un valor aproximado del valor de la opción en el nodo “ D ” contemplando el efecto de la barrera especificada “ B ” y el cual se denominará $\tilde{V}(D)$. El desarrollo de la interpolación se muestra a continuación.

$$\frac{\tilde{V}(D) - T(D)}{B - D} = \frac{V(D) - T(D)}{U - D}$$
$$\tilde{V}(D) = \frac{V(D) - T(D)}{U - D} (B - D) + T(D)$$
$$\tilde{V}(D) = \frac{B - D}{U - D} V(D) - \frac{B - D}{U - D} T(D) + T(D)$$

$$\tilde{V}(D) = \frac{B - D}{U - D} V(D) + \frac{-B + D + U - D}{U - D} T(D)$$

$$\tilde{V}(D) = \frac{B-D}{U-D} V(D) + \frac{U-B}{U-D} T(D)$$

Figura A2.1 Ejemplo para la interpolación del valor de la opción para la barrera especificada "B".



Fuente: Elaboración propia con información de Derman et. al. (1995).

Apéndice 3. Código de MatLab y SciLab utilizando el modelo BSM para valorar una opción donde el subyacente es una acción que no paga dividendos

El código, en MatLab y SciLab para valorar opciones europeas, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, utilizando la fórmula del modelo BSM se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [c, p] = BSM1973(S,K,T,r,sigma)
%Véase Hull (2009)
    d1=(log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
    d2=d1-(sigma*sqrt(T));
    N_d1=normcdf(d1,0,1);
    N_d2=normcdf(d2,0,1);
    c=S*N_d1-K*(exp(-r*T)*N_d2);
    p=K*(exp(-r*T)*(1-N_d2))-S*(1-N_d1);
endfunction
```

En SciLab:

```
function [c, p] = BSM1973(S,K,T,r,sigma)
//Véase Hull (2009)
    d1=(log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
    d2=d1-(sigma*sqrt(T));
    N_d1=cdfnor("PQ",d1,0,1);
    N_d2=cdfnor("PQ",d2,0,1);
    c=S*N_d1-K*(exp(-r*T)*N_d2);
    p=K*(exp(-r*T)*(1-N_d2))-S*(1-N_d1);
endfunction
```

Apéndice 4. Código de MatLab y SciLab del modelo CRR para obtener el valor de una opción, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos

El código en MatLab y SciLab para valuar opciones europeas, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos por medio del modelo CRR se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [c, p] = EuroArbolBinomial(S,K,T,r,sigma,N)
%Función para determinar el precio de una opción europea utilizando árboles
%binomiales.
% S.- Precio inicial del activo subyacente
% K.- Precio de ejercicio
% T.- tiempo
% r.- tasa
% sigma.- volatilidad
% N.- Número de particiones
% Fuente: Bundi (2005)
    dt = T/N;
    A = zeros(N+1,N+1);
    a = exp(r *dt);
    u = exp(sigma* sqrt(dt));
    q = (a * u -1)/(u^2-1);
    A(N + 1,:) = max(K -S*u.^(2*(0: N)-N),0);
    for i = N:-1: 1
        A(i,1:i)=[q* A(i+1,(1:i)+1)+(1 -q)*A(i+1,1:i)]/a;
    end
    p = A(1,1);
    c =p+S-K*exp(-r* T);
end
```

En SciLab:

```
function [c, p] = EuroNonDivBinomial(S,K,T,r,sigma,N)
// Fuente: Bundi (2005)
    dt = T/N;
    A = zeros(N+1,N+1);
    a = exp(r *dt);
    u = exp(sigma* sqrt(dt));
    q = (a * u -1)/(u^2-1);
    A(N + 1,:) = max(K -S*u.^(2*(0: N)-N),0);
```

```
for i = N:-1: 1
    A(i,1:i)=[q* A(i+1,(1:i)+1)+(1 -q)*A(i+1,1:i)]/a;
end
p = A(1,1);c =p+S-K*exp(-r* T);
endfunction
```

Apéndice 5. Código de MatLab y SciLab para valorar opciones con barrera, usando fórmulas cerradas

El código en MatLab y SciLab para valorar opciones con barrera, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio de fórmulas cerradas se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function c=FormulasCerradasB(S,K,KoU,T,r,sigma,Tipo)
%Obtención del valor de los ocho tipos de opciones con barrera, donde:
%S.- Es el precio inicial del activo subyacente
%K.- Es el precio de ejercicio
%KoU.-Es la barrera simple
%T.- Es el tiempo de vida de la opción
%r.- Es la tasa libre de riesgo
%sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
%Tipo.- Tipo de opción barrera.
%    Call
%    Up-and-out.- 'cuo'
%    Up-and-in.- 'cui'
%    Down-and-out.-'cdo'
%    Down-and-in.- 'cdi'
%    Put
%    Up-and-out.- 'puo'
%    Up-and-in.- 'pui'
%    Down-and-out.-'pdo'
%    Down-and-in.- 'pdi'
%Véase: Wilmott, (2007)

%Tipo=convstr(Tipo,'l');
a=(KoU/S)^(-1+2*r/(sigma^2));
b=(KoU/S)^(1+2*r/(sigma^2));
sigma2=sigma^2;
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S/K)+(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d3=(log(S/KoU)+(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d4=(log(S/KoU)+(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d5=(log(S/KoU)-(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d6=(log(S/KoU)-(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d7=(log(S*K/(KoU^2))-(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d8=(log(S*K/(KoU^2))-(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
Nd1=normcdf(d1,0,1);Nd2=normcdf(d2,0,1);
Nd3=normcdf(d3,0,1);Nd4=normcdf(d4,0,1);
```

```

Nd5=normcdf(d5,0,1);Nd6=normcdf(d6,0,1);
Nd7=normcdf(d7,0,1);Nd8=normcdf(d8,0,1);
switch Tipo
case 'cuo'
    c=S*(Nd1- Nd3-b*(Nd6- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-Nd4-a*(Nd5-Nd7));
case 'cui'
    c=S*(Nd3+b*(Nd6- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd4+a*(Nd5-Nd7));
case 'cdo'
    if K>KoU then
        c=S*(Nd1-b*(1- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-a*(1-Nd7));
    else
        c=S*(Nd3-b*(1- Nd6))-K*(exp(-r*T))*(Nd4-a*(1-Nd5));
    end
case 'cdi'
    if K>KoU then
        c=S*b*(1-Nd8)-K*(exp(-r*T))*a*(1-Nd7);
    else
        c=S*(Nd1- Nd3-b*(1- Nd6))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-Nd4+a*(1-Nd5));
    end
case 'puo'
    if K>KoU then
        c=-S*(1-Nd3-b*Nd6)+K*(exp(-r*T))*(1-Nd4-a*Nd5);
    else
        c=-S*(1-Nd1-b*Nd8)+K*(exp(-r*T))*(1-Nd2-a*Nd7);
    end
case 'pui'
    if K>KoU then
        c=-S*(Nd3-Nd1+b*Nd6)+K*(exp(-r*T))*(Nd4-Nd2+a*Nd5);
    else
        c=-S*b*Nd8+K*(exp(-r*T))*a*Nd7;
    end
case 'pdo'
    c=-S*(Nd3-Nd1-b*(Nd8-Nd6))+K*(exp(-r*T))*(Nd4-Nd2-a*(Nd7-Nd5));
case 'pdi'
    c=-S*(1-Nd3+b*(Nd8-Nd6))+K*(exp(-r*T))*(1-Nd4+a*(Nd7-Nd5));
otherwise
    c=-1;
end
end
end

```

En SciLab:

```

function c=FormulasCerradasB(S,K,KoU,T,r,sigma,Tipo)
//Obtención del valor de los ocho tipos de opciones con barrera, donde:
//S.- Es el precio inicial del activo subyacente

```

```

//K.- Es el precio de ejercicio
//KoU.-Es la barrera simple
//T.- Es el tiempo de vida de la opción
//r.- Es la tasa libre de riesgo
//sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
//Tipo.- Tipo de opción barrera.
//    Call
//    Up-and-out.- 'cuo'
//    Up-and-in.- 'cui'
//    Down-and-out.-'cdo'
//    Down-and-in.- 'cdi'
//    Put
//    Up-and-out.- 'puo'
//    Up-and-in.- 'pui'
//    Down-and-out.-'pdo'
//    Down-and-in.- 'pdi'
//Véase: Wilmott, (2007)
Tipo=convstr(Tipo,'I')
a=(KoU/S)^(-1+2*r/(sigma^2));
b=(KoU/S)^(1+2*r/(sigma^2));
sigma2=sigma^2;
d1=(log(S/K)+(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S/K)+(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d3=(log(S/KoU)+(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d4=(log(S/KoU)+(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d5=(log(S/KoU)-(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d6=(log(S/KoU)-(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d7=(log(S*K/(KoU^2))-(r-0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d8=(log(S*K/(KoU^2))-(r+0.5*sigma2)*T)/(sigma*sqrt(T));
Nd1=cdfnor("PQ",d1,0,1);Nd2=cdfnor("PQ",d2,0,1);
Nd3=cdfnor("PQ",d3,0,1);Nd4=cdfnor("PQ",d4,0,1);
Nd5=cdfnor("PQ",d5,0,1);Nd6=cdfnor("PQ",d6,0,1);
Nd7=cdfnor("PQ",d7,0,1);Nd8=cdfnor("PQ",d8,0,1);
select Tipo
  case 'cuo'
    c=S*(Nd1- Nd3-b*(Nd6- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-Nd4-a*(Nd5-Nd7));
  case 'cui'
    c=S*(Nd3+b*(Nd6- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd4+a*(Nd5-Nd7));
  case 'cdo'
    if K>KoU then
      c=S*(Nd1-b*(1- Nd8))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-a*(1-Nd7));
    else
      c=S*(Nd3-b*(1- Nd6))-K*(exp(-r*T))*(Nd4-a*(1-Nd5));
    end
  case 'cdi'
    if K>KoU then
      c=S*b*(1-Nd8)-K*(exp(-r*T))*a*(1-Nd7);

```

```

        else
            c=S*(Nd1- Nd3-b*(1- Nd6))-K*(exp(-r*T))*(Nd2-Nd4+a*(1-Nd5));
        end
    case 'puo'
        if K>KoU then
            c=-S*(1-Nd3-b*Nd6)+K*(exp(-r*T))*(1-Nd4-a*Nd5);
        else
            c=-S*(1-Nd1-b*Nd8)+K*(exp(-r*T))*(1-Nd2-a*Nd7);
        end
    case 'pui'
        if K>KoU then
            c=-S*(Nd3-Nd1+b*Nd6)+K*(exp(-r*T))*(Nd4-Nd2+a*Nd5);
        else
            c=-S*b*Nd8+K*(exp(-r*T))*a*Nd7;
        end
    case 'pdo'
        c=-S*(Nd3-Nd1-b*(Nd8-Nd6))+K*(exp(-r*T))*(Nd4-Nd2-a*(Nd7-Nd5));
    case 'pdi'
        c=-S*(1-Nd3+b*(Nd8-Nd6))+K*(exp(-r*T))*(1-Nd4+a*(Nd7-Nd5));
    else
        c=-1;
    end
endfunction

```

Apéndice 6. Código de MatLab y SciLab del modelo CRR para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos

El código en MatLab y SciLab para valuar una opción up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio del modelo CRR se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function c = Barreras(S,K,KoU,T,r,sigma,N)
dt = T/N;
A = zeros(N+1,N+1);
B = zeros(N+1,N+1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r *dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));
d=1/u;
q = (a * u -1)/(u^2-1);
% Genera matriz de precios
for i=1:1:N+1
    A(i,1:i)=S*(u.^(0:i-1)).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
% Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
for i=1:1:N+1
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU, A(i,j)=0;end;
    end
end
% Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
%Pay off
%B(N + 1,:) = max(K-A(N + 1,:),0);
B(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
for j=1:1:N+1
    if A(N+1,j)==0, B(N+1,j)=0;end;
end
% Nodos intermedios

for i = N:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
```

```

    for j=1:1:i
        if A(i,j)==0, B(i,j)=0;end;
    end
end
c = B(1,1);

```

En SciLab:

```

function [c, tiempoMaq]= Barreras(S,K,KoU,T,r,sigma,N)
tic()
dt = T/N;
A = zeros(N+1,N+1);
B = zeros(N+1,N+1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r *dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));
d=1/u;
q = (a * u -1)/(u^2-1);
// Genera matriz de precios
for i=1:1:N+1
    A(i,1:i)=S*(u.^(0:i-1)).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
// Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
for i=1:1:N+1
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU then A(i,j)=0;end;
    end
end
// Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
//Pay off
//B(N + 1,:) = max(K-A(N + 1,:),0);
B(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
for j=1:1:N+1
    if A(N+1,j)==0 then B(N+1,j)=0;end;
end
// Nodos intermedios

for i = N:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i
        if A(i,j)==0 then B(i,j)=0;end;
    end
end

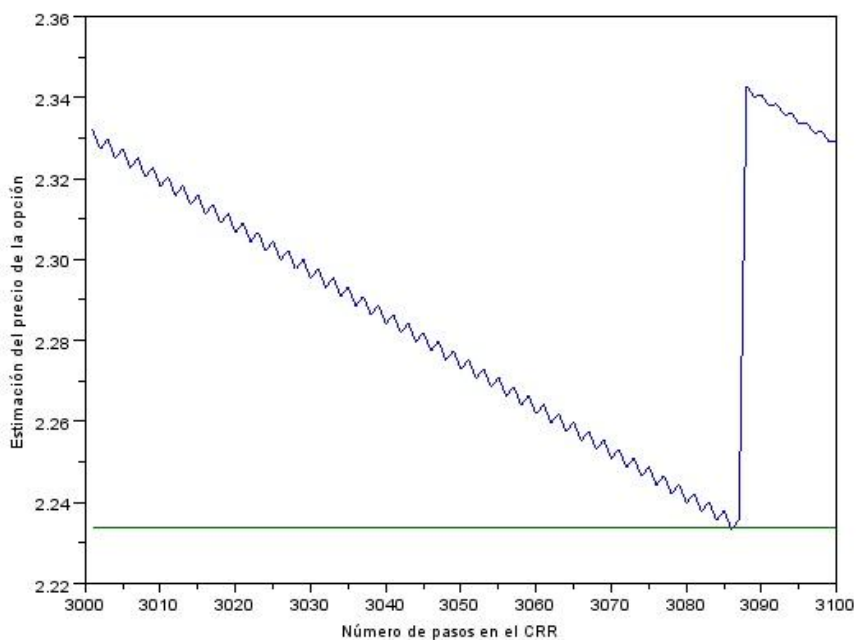
```

```
    end  
end  
c = B(1,1);  
tiempoMaq=toc()
```

Apéndice 7. Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3001 a 3100

En las figuras siguientes se muestran, gráficamente, los resultados al valorar una opción de compra up-and-out, por medio del CRR para pasos en el intervalo de 3001 3100.

Figura A7.1 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3000 a 3100.

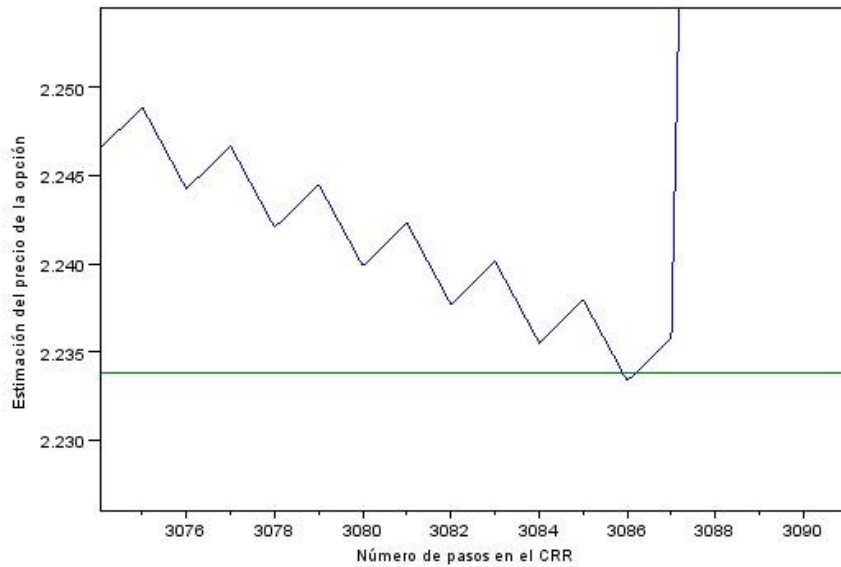


La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

Un acercamiento de la Figura A7.1, se podrá observar en la siguiente figura:

Figura A7.2 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 3075 a 3089.



La línea suave corresponde al valor obtenido por medio de la correspondiente fórmula cerrada.

Fuente: Derman *et. al.* (1995).

Apéndice 8. Código de MatLab y SciLab del Método Derman para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos

El código en MatLab y SciLab para valuar una opción up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio del Método Derman se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [c, tiempoMaq]= Derman(S,K,KoU,T,r,sigma,N)
% Obtiene el precio de una opción barrera "knock out"
% Véase Derman et. al. (1995)
T1=tic;
dt = T/N;
A = zeros(N+1,N+1);
B = zeros(N+1,N+1);
C = zeros(N+1,N+1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r * dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));
d=1/u;
q = (a * u - 1)/(u^2-1);
% Genera matriz de precios
for i=1:1:N+1
    A(i,1:i)=S*(u.^(0:i-1)).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
% Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
%for i=1:1:N+1
%   for j=1:1:i
%       if A(i,j)>=KoU, A(i,j)=0;end;
%   end
%end

% Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
%Pay off
%B(N + 1,:) = max(K-A(N + 1,:),0);
B(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
C(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
for j=1:1:N+1
    if A(N+1,j)>=KoU
        B(N+1,j)=0;
```

```

        C(N+1,j)=0;
    end;
end
% Nodos intermedios del árbol binomial sin cambios
for i = N:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU, B(i,j)=0;end;
    end
end
for i = N:-1: 1
    c1=C(i+1,(1:i)+1);
    c2=C(i+1,1:i);
    C(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i-1
        if A(i,j+1)>=KoU && A(i,j)<=KoU
            C(i,j)=B(i,j)*(KoU-A(i,j))/(A(i,j+1)-A(i,j));
        elseif A(i,j)>=KoU
            C(i,j)=0;
        end;
    end
end

```

En SciLab:

```

function [c, tiempoMaq]= Derman(S,K,KoU,T,r,sigma,N)
//Obtiene el precio de una opción call, europea, con barrera superior utilizando
// el Método Derman, es decir, calcula el valor de una opción "up-and-out".
//S.- Es el precio inicial del activo subyacente
//K.- Es el precio de ejercicio
//KoU.-Es la barrera simple
//T.- Es el tiempo de vida de la opción
//r.- Es la tasa libre de riesgo
//sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
//Véase Derman et. al. (1995)
tic()
dt = T/N;
A = zeros(N+1,N+1);
B = zeros(N+1,N+1);
C = zeros(N+1,N+1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r *dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));

```

```

d=1/u;
q = (a * u -1)/(u^2-1);
// Genera matriz de precios
for i=1:1:N+1
    A(i,1:i)=S*(u.^(0:i-1)).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
// Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
//for i=1:1:N+1
// for j=1:1:i
//     if A(i,j)>=KoU, A(i,j)=0;end;
// end
//end

// Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
//Pay off
//B(N + 1,:) = max(K-A(N + 1,:),0);
B(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
C(N + 1,:) = max(A(N + 1,:)-K,0);
for j=1:1:N+1
    if A(N+1,j)>=KoU
        B(N+1,j)=0;
        C(N+1,j)=0;
    end;
end
// Nodos intermedios del árbol binomial sin cambios
for i = N:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU, B(i,j)=0;end;
    end
end
for i = N:-1: 1
    c1=C(i+1,(1:i)+1);
    c2=C(i+1,1:i);
    C(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i-1
        if A(i,j+1)>=KoU & A(i,j)<=KoU
            C(i,j)=B(i,j)*(KoU-A(i,j))/(A(i,j+1)-A(i,j));
        elseif A(i,j)>=KoU
            C(i,j)=0;
        end;
    end
end
end
c = C(1,1);

```

tiempoMaq=toc()

Apéndice 9. Código de MatLab y SciLab del Método BTT para obtener el valor de una opción con barrera up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos

El código en MatLab y SciLab para valuar una opción up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio del modelo BTT se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [bbtt, tiempoMaq] = bBTT(S,K,KoU,T,r,sigma,N) %KoU.- Knock out CALL
% Obtiene el precio de una opción barrera "knock out"
%Fuente: The Bino-trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate
%Option Pricing, Dai y Lyuu (2010)
T1=tic;
dt = T/N;
A = zeros(N+2,N+2);
B = zeros(N+2,N+2);
C = zeros(N+1,N+1);
H = zeros(N+2,4);
Nodos=zeros(3,3);
Restricciones=zeros(3,1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r *dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));
d=1/u;
q = (a * u -1)/(u^2-1);
m=(r-(sigma^2)/2)*dt; %primer momento
var=dt*(sigma^2); %segundo momento
linf_vec=m-sigma*sqrt(dt); %genera el límite inferior de la vecindad de "B"
lsup_vec=m+sigma*sqrt(dt); %genera el límite superior de la vecindad de "B"
h=log(KoU/S); %The SS-log-prices of the KoU barrier
entero=(N+2-mod(N+2,2))/2;
impar=mod(N-1,2); %1.- si es impar, 0.- si es par
H(:,1)=(1:N+2)';
if impar==0
    H(:,2)=(-entero:entero)';
else
    H(:,2)=(-entero+1:entero)';
end
H(:,3)=h+(2*H(:,2)+impar)*sigma*sqrt(dt);
H(:,4)=linf_vec<=H(:,3)&lsup_vec>H(:,3);
b_S_log_p=H(find(H(:,4)==1),3);
```

```

Nodo_B=S*exp(b_S_log_p);
Nodo_A=S*exp(b_S_log_p+2*sigma*sqrt(dt));
Nodo_C=S*exp(b_S_log_p-2*sigma*sqrt(dt));
S_Prima=Nodo_A*d^2; %Valor virtual del precio del subyacente con
                    %el árbol completo (sin truncar)
% Genera matriz de precios
for i=1:1:N+2
    A(i,1:i)=S_Prima*(u.^((0:i-1))).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
% Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
for i=1:1:N+2
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU, A(i,j)=0;end;
    end
end
% Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
%Pay off
B(N + 2,:) = max(A(N + 2,:)-K,0);

% Nodos intermedios
for i = N+1:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i
        if A(i,j)==0, B(i,j)=0;end;
    end
end
end

%Obtención de probabilidades de los nodos A, B, y C véase pg 11 de bBTT
beta=b_S_log_p-m; %beta
alfa=beta+2*sigma*sqrt(dt); %alfa
gamma=beta-2*sigma*sqrt(dt); %gamma
%Nodos(1,1)=alfa; Nodos(1,2)=beta; Nodos(1,3)=gamma;
%Nodos(2,1)=alfa^2; Nodos(2,2)=beta^2; Nodos(2,3)=gamma^2;
%Nodos(3,:)=1;
Nodos(1,1)=gamma; Nodos(1,2)=beta; Nodos(1,3)=alfa;
Nodos(2,1)=gamma^2; Nodos(2,2)=beta^2; Nodos(2,3)=alfa^2;
Nodos(3,:)=1;
Restricciones(1,1)=0;
Restricciones(2,1)=var;
Restricciones(3,1)=1;
P=Nodos\Restricciones;

bbtt=B(3,1:3)*P/a;
tiempoMaq=toc(T1);

```

En SciLab:

```
function [bbtt, tiempoMaq] = bBTT(S,K,KoU,T,r,sigma,N) //KoU.- Knock out CALL
// Obtiene el precio de una opción barrera "knock out"
//Fuente: The Bino-trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate
//Option Pricing, Dai y Lyuu (2010)
tic()
dt = T/N;
A = zeros(N+2,N+2);
B = zeros(N+2,N+2);
C = zeros(N+1,N+1);
H = zeros(N+2,4);
Nodos=zeros(3,3);
Restricciones=zeros(3,1);
c1=zeros(1,N+1);
c2=zeros(1,N+1);
a = exp(r *dt);
u = exp(sigma* sqrt(dt));
d=1/u;
q = (a * u -1)/(u^2-1);
m=(r-(sigma^2)/2)*dt; //primer momento
var=dt*(sigma^2); //segundo momento
linf_vec=m-sigma*sqrt(dt); //genera el límite inferior de la vecindad de "B"
lsup_vec=m+sigma*sqrt(dt); //genera el límite superior de la vecindad de "B"
h=log(KoU/S); //The SS-log-prices of the KoU barrier
entero=(N+2-modulo(N+2,2))/2;
impar=modulo(N-1,2); //1.- si es impar, 0.- si es par
H(:,1)=(1:N+2)';
if impar==0
    H(:,2)=(-entero:entero)';
else
    H(:,2)=(-entero+1:entero)';
end
H(:,3)=h+(2*H(:,2)+impar)*sigma*sqrt(dt);
H(:,4)=linf_vec<=H(:,3)&lsup_vec>H(:,3);
b_S_log_p=H(find(H(:,4))==1),3);
Nodo_B=S*exp(b_S_log_p);
Nodo_A=S*exp(b_S_log_p+2*sigma*sqrt(dt));
Nodo_C=S*exp(b_S_log_p-2*sigma*sqrt(dt));
S_Prima=Nodo_A*d^2; //Valor virtual del precio del subyacente con
//el árbol completo (sin truncar)
// Genera matriz de precios
for i=1:1:N+2
    A(i,1:i)=S_Prima*(u^(0:i-1)).*d.^abs((0:i-1)-i+1);
end
// Corrección a los precios por errores de redondeo
//StepKoU=log(KoU/Nodo_B)/log(u);
```

```

//helperKoU=0
//for i=StepKoU+1:2:N+2
//    A(i,StepKoU+1+helperKoU)=KoU;
//    helperKoU=helperKoU+1;
//end
// Genera matriz de precios dentro de la barrera superior; se divide sólo como
medida control
for i=1:1:N+2
    for j=1:1:i
        if A(i,j)>=KoU, A(i,j)=0;end;
    end
end
// Genera matriz de valor de la opción para cada nodo
//Pay off
B(N + 2,:) = max(A(N + 2,:)-K,0);

// Nodos intermedios
for i = N+1:-1: 1
    c1=B(i+1,(1:i)+1);
    c2=B(i+1,1:i);
    B(i,1:i)=[q* c1+(1 -q)*c2]/a;
    for j=1:1:i
        if A(i,j)==0, B(i,j)=0;end;
    end
end

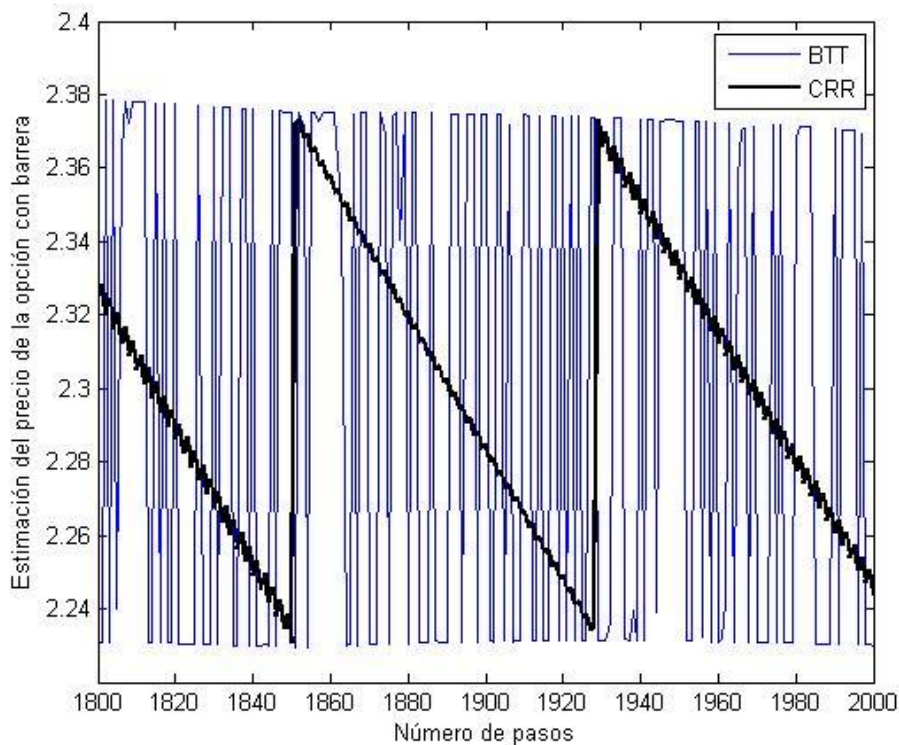
//Obtención de probabilidades de los nodos A, B, y C véase pg 11 de bBTT
beta=b_S_log_p-m; //beta
alfa=beta+2*sigma*sqrt(dt); //alfa
gamma=beta-2*sigma*sqrt(dt); //gamma
//Nodos(1,1)=alfa; Nodos(1,2)=beta; Nodos(1,3)=gamma;
//Nodos(2,1)=alfa^2; Nodos(2,2)=beta^2; Nodos(2,3)=gamma^2;
//Nodos(3,:)=1;
Nodos(1,1)=gamma; Nodos(1,2)=beta; Nodos(1,3)=alfa;
Nodos(2,1)=gamma^2; Nodos(2,2)=beta^2; Nodos(2,3)=alfa^2;
Nodos(3,:)=1;
Restricciones(1,1)=0;
Restricciones(2,1)=var;
Restricciones(3,1)=1;
P=Nodos\Restricciones;
bbtt=B(3,1:3)*P/a;
tiempoMaq=toc()

```

Apéndice 10. Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1800 a 2000

En la figura siguiente se muestra, gráficamente, los resultados al valorar una opción de compra up-and-out, para pasos en el intervalo de 3001 a 3100; por medio de los modelos CRR y BTT. Nótese el comportamiento acotado de las estimaciones de CRR por el método BTT.

Figura A10.1 Resultados obtenidos al usar árboles tipo CRR y BTT para una opción de compra up-and-out tipo europea, con pasos entre el intervalo de 1800 a 2000



Fuente: Day y Lyuu (2010).

Apéndice 11. Errores absolutos generados por los Métodos CRR, Derman y BTT para 500, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 y 2100 pasos

Los correspondientes errores absolutos para número de pasos iguales a 500, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 y 2100 generados por los métodos CRR, BTT y Derman al valuar una opción con precio del subyacente inicial a 100, precio de ejercicio de 100, barrera superior de 125, volatilidad del 20%, tasa libre de riesgo del 10% y plazo residual de un año se muestra el cuadro siguiente:

Cuadro A11.1 *Tiempo computacional, en segundos, errores absolutos, MAE y RMSE generados al valuar una opción up-and-out con las siguientes características: $S=100$, $K=100$, barrera de 125, $T=1$, $r=0.1$, $\sigma=0.20$; por medio de los métodos CRR, Derman y BTT, variando el número de pasos iguales a 500, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000 y 2100.*

N	Tiempo			Error			Error ²		
	CRR	Derman	BTT	CRR	Derman	BTT	CRR	Derman	BTT
500	0.281	0.483	0.483	0.013559	0.000305	0.009827	0.000184	9.31×10^{-8}	9.656×10^{-5}
1000	1.107	1.919	1.42	0.129956	0.000301	0.177954	0.016889	9.07×10^{-8}	0.0316678
1250	1.732	2.995	2.231	0.088336	0.001038	0.004421	0.007803	1.08×10^{-6}	1.955×10^{-5}
1500	2.496	4.337	3.198	0.118233	0.000652	0.0004	0.013979	4.25×10^{-7}	1.602×10^{-7}
1750	3.432	5.896	4.352	0.046897	0.000892	0.000318	0.002199	7.96×10^{-7}	1.011×10^{-7}
2000	4.493	7.769	5.632	0.009912	0.003291	0.003692	9.83×10^{-5}	1.08×10^{-5}	1.363×10^{-5}
2100	4.93	8.549	6.193	0.111535	0.00082	0.134031	0.01244	6.73×10^{-7}	0.0179644
			MAE	0.129956	0.003291	0.177954			
			RMSE	0.087499	0.001414	0.084314			

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro anterior, se puede observar que el Método Derman es el que presenta el menor MAE, seguido por CRR y al último el método basado en árboles binomiales.

Apéndice 12. Código de MatLab y SciLab para el Método Monte Carlo

El código en MatLab y SciLab para valuar una opción up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio del Método Monte Carlo se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [c,c1, CI,T1, T2]= MMC(S,K,KoU,T,r,sigma,N,NRepl)
%Obtiene el precio de una opción up-and-dow tipo europeo, donde:
% S.- Es el precio inicial del activo subyacente
% K.- Es el precio de ejercicio
% KoU.-Es la barrera simple
% T.- Es el tiempo de vida de la opción
% r.- Es la tasa libre de riesgo
% sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
% N.- Se utiliza para indicar cuántas veces se debe revisar si el precio
%     ha cruzado la barrera
% NRepl=Es el número de simulaciones
%Fuente: Brandimarte, Paolo (2002). Numerical Methods in Finance and
%     Economics: a MatLab-based Introduction.
    T1=tic;
    Payoff=zeros(NRepl,1);
    NCrossed=0;
    for i=1:1:NRepl
        Path=AssetPaths(S,r,sigma,T,N,1);
        crossed=any(Path>=KoU);
        if crossed==0
            Payoff(i)=max(0,Path(N+1)-K);
        else
            Payoff(i)=0;
            NCrossed=NCrossed+1;
        end
    end
    c=sum(exp(-r*T)*Payoff)/NRepl;
    [c1, aux,CI]=normfit(exp(-r*T)*Payoff);
    T2=toc(T1);
end
```

En Scilab:

```

function c= MMC(S,K,KoU,T,r,sigma,N,NRepl)
//Obtiene el precio de una opción up-and-dow tipo europeo, donde:
// S.- Es el precio inicial del activo subyacente
// K.- Es el precio de ejercicio
// KoU.-Es la barrera simple
// T.- Es el tiempo de vida de la opción
// r.- Es la tasa libre de riesgo
// sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
// N.- Se utiliza para indicar cuántas veces se debe revisar si el precio
//   ha cruzado la barrera
// NRepl=Es el número de simulaciones
//Fuente: Brandimarte, Paolo (2002). Numerical Methods in Finance and
//   Economics: a MatLab-based Introduction.
Payoff=zeros(NRepl,1);
NCrossed=0;
for i=1:1:NRepl
    Path=AssetPaths(S,r,sigma,T,N,1);
    crossed=or(Path>=KoU);
    if ~crossed
        Payoff(i)=max(0,Path(N+1)-K);
    else
        Payoff(i)=0;
        NCrossed=NCrossed+1;
    end
end
c=sum(exp(-r*T)*Payoff)/NRepl;
endfunction

```

Apéndice 13. Código de MatLab y SciLab para el Método Monte Carlo Condicional

El código en MatLab y SciLab para valuar una opción up-and-out, donde el subyacente es una acción que no paga dividendos, por medio del Método Monte Carlo Condicional se muestra a continuación.

En MatLab:

```
function [StockVals, Times,T1, T2]=
Previo_MMC_Cond(S,K,KoU,T,r,sigma,N,NRepl)
%Obtiene el precio de una opción up-and-dow tipo europeo, donde:
% S.- Es el precio inicial del activo subyacente
% K.- Es el precio de ejercicio
% KoU.-Es la barrera simple
% T.- Es el tiempo de vida de la opción
% r.- Es la tasa libre de riesgo
% sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
% N.- Se utiliza para indicar cuántas veces se debe revisar si el precio
% ha cruzado la barrera
% NRepl=Es el número de simulaciones
%Fuente: Brandimarte, Paolo (2002). Numerical Methods in Finance and
% Economics: a MatLab-based Introduction.
T1=tic;
dt=T/N;
[Call, Put]=blsprice(S,K,r,T,sigma);
%Generate asset paths and payoffs for the up-and-out option
NCrossed=0;
Payoff=zeros(NRepl,1);
Times=zeros(NRepl,1);
StockVals=zeros(NRepl,1);
for i=1:1:NRepl
    Path=AssetPaths(S,r,sigma,T,N,1);
    tcrossed=min(find(Path>=KoU));
    if not(isempty(tcrossed))
        NCrossed=NCrossed+1;
        Times(NCrossed)=(tcrossed-1)*dt;
        StockVals(NCrossed)=Path(tcrossed);
    end
end
% if NCrossed>0
```

```

% [Caux, Paux]=blsprice(StockVals(1:NCrossed),K,r,T-
Times(1:NCrossed),sigma);
% Payoff(1:NCrossed)=exp(-r*Times(1:NCrossed)).*Caux;
%end
[Cdo, aux, CI]=normfit(Call-Payoff);
%c=sum(exp(-r*T)*Payoff)/NRepl;
%c=sum(Call-Payoff)/NRepl;
T2=toc(T1);
end

```

En SciLab:

```

function [c, tiempoMaq]= MMC_Cond(S,K,KoU,T,r,sigma,N,NRepl)
//Obtiene el precio de una opción up-and-dow tipo europeo, donde:
// S.- Es el precio inicial del activo subyacente
// K.- Es el precio de ejercicio
// KoU.-Es la barrera simple
// T.- Es el tiempo de vida de la opción
// r.- Es la tasa libre de riesgo
// sigma.- Es la volatilidad del tipo de cambio
// N.- Se utiliza para indicar cuántas veces se debe revisar si el precio
// ha cruzado la barrera
// NRepl=Es el número de simulaciones
//Fuente: Brandimarte, Paolo (2002). Numerical Methods in Finance and
// Economics: a MatLab-based Introduction.
tic();
dt=T/N;
[Call, Put]=BSM1973_V(S,K,T,r,sigma);
//Generate asset paths and payoffs for the up-and-out option
NCrossed=0;
Payoff=zeros(NRepl,1);
Times=zeros(NRepl,1);
StockVals=zeros(NRepl,1);
for i=1:1:NRepl
    Path=AssetPaths(S,r,sigma,T,N,1);
    tcrossed=min(find(Path>=KoU));
    if ~(isempty(tcrossed))
        NCrossed=NCrossed+1;
        Times(NCrossed)=(tcrossed-1)*dt;
        StockVals(NCrossed)=Path(tcrossed);
    end
end
if NCrossed>0
    [Caux, Paux]=BSM1973_V(StockVals(1:NCrossed),K,r,T-
Times(1:NCrossed),sigma);
    Payoff(1:NCrossed)=exp(-r*Times(1:NCrossed)).*Caux;

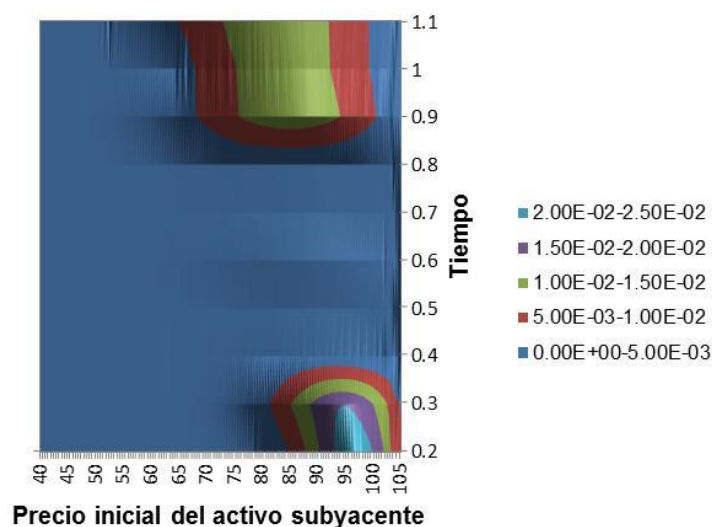
```

```
end
//[Cdo, aux, CI]=normfit(Call-Payoff);
//c=sum(exp(-r*T)*Payoff)/NRepl;
c=sum(Call-Payoff)/NRepl;
tiempoMaq=toc();
endfunction
```

Apéndice 14. Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente, el tiempo de maduración y de la barrera superior en una opción up-and-out utilizando el Método BTT y el Método Derman

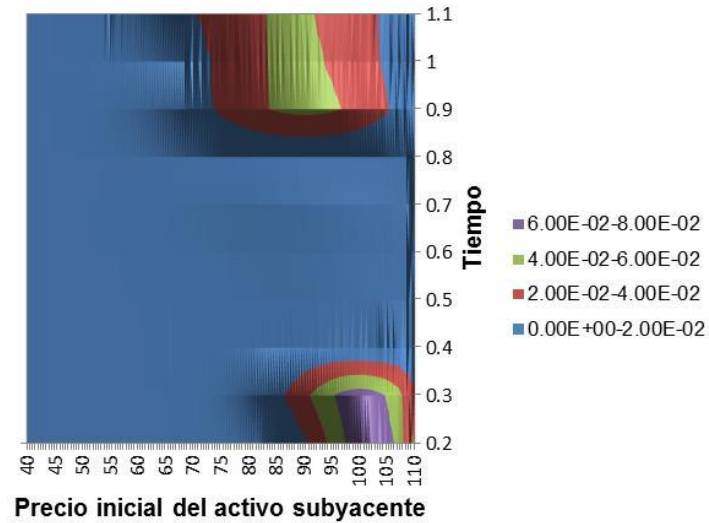
En las siguientes figuras se muestran los contornos de la variabilidad de los errores en los precios para una opción up-and-out de compra, tipo europeo; con diferentes precios iniciales del subyacente y diversos tiempos de maduración, con una volatilidad del 20%, precio de ejercicio de 100, modificando el precio de la barrera; considerando los métodos BTT y Derman.

Figura A14.1 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 105.



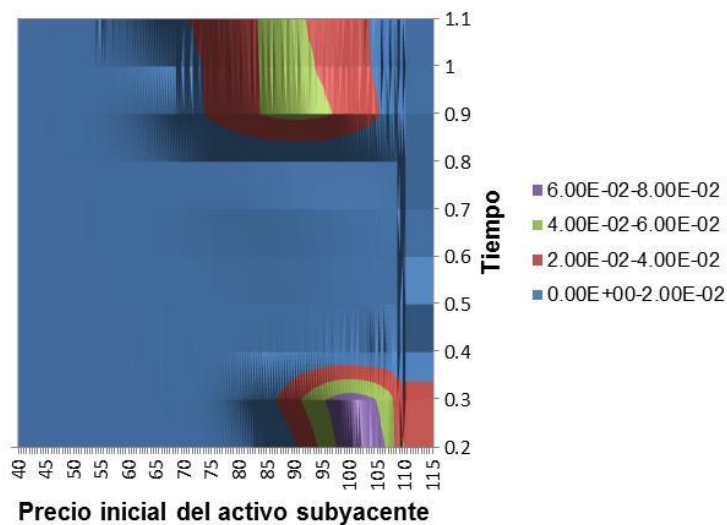
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.2 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 110.



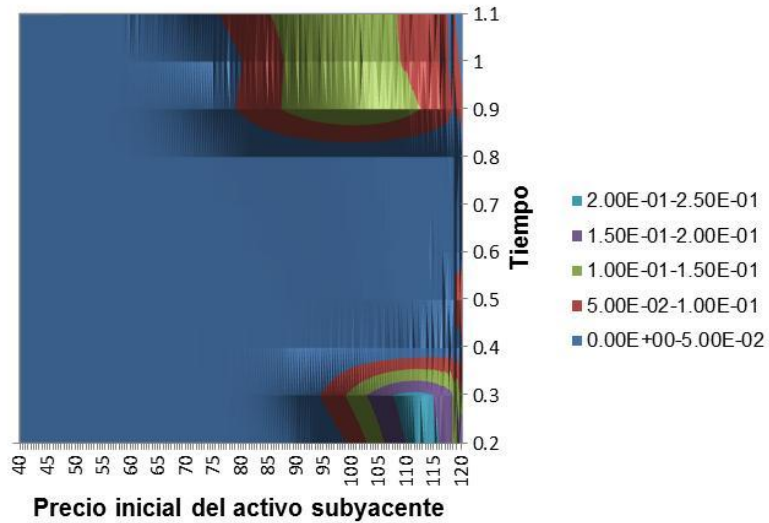
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14. 3 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 115.



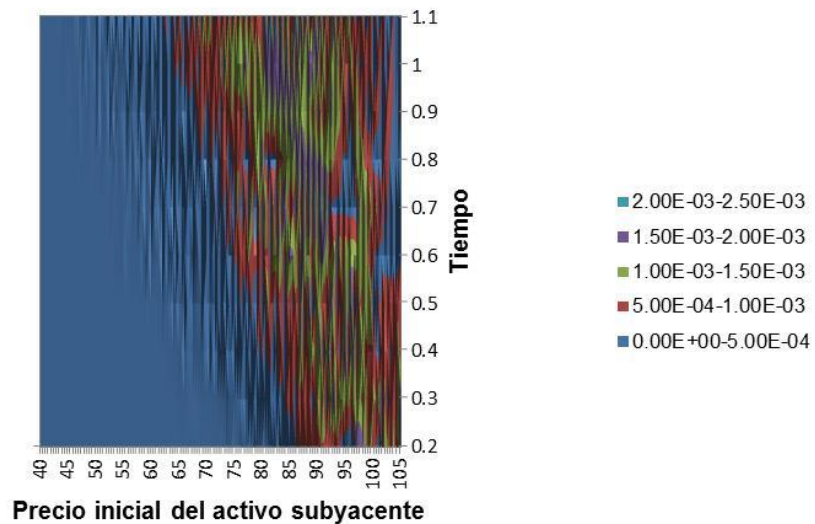
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.4 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el método BTT y una barrera de 120.



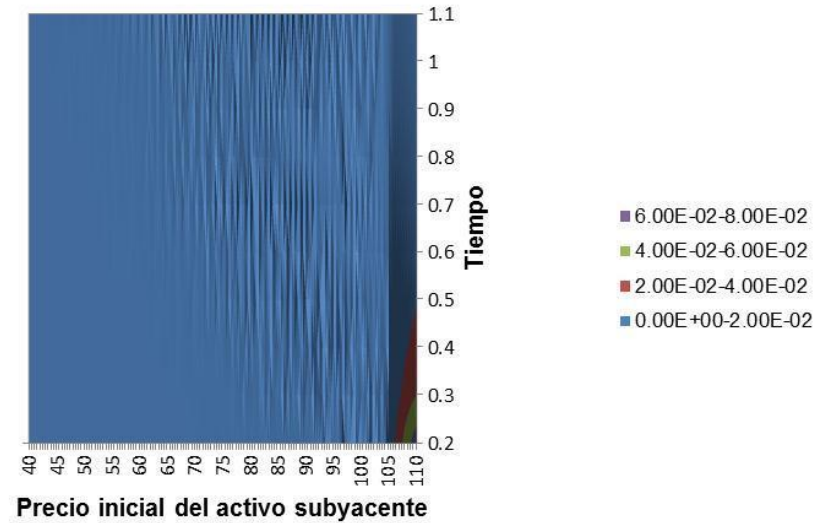
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.5 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 105.



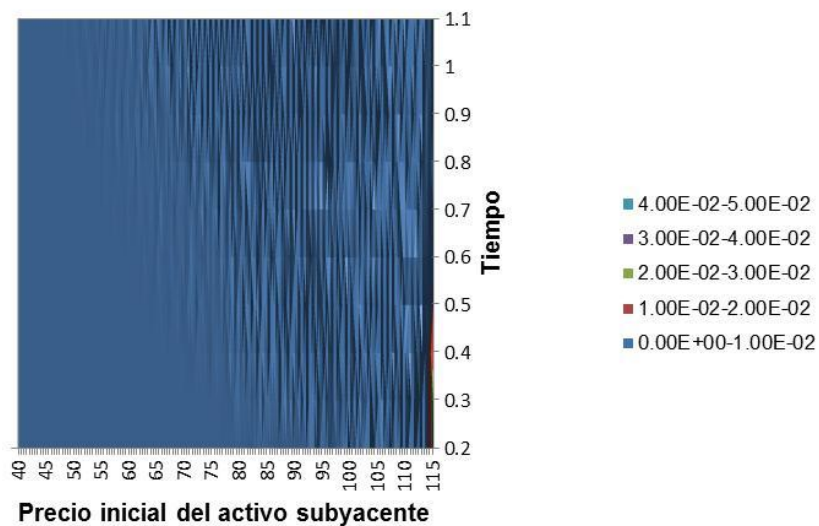
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.6 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 110.



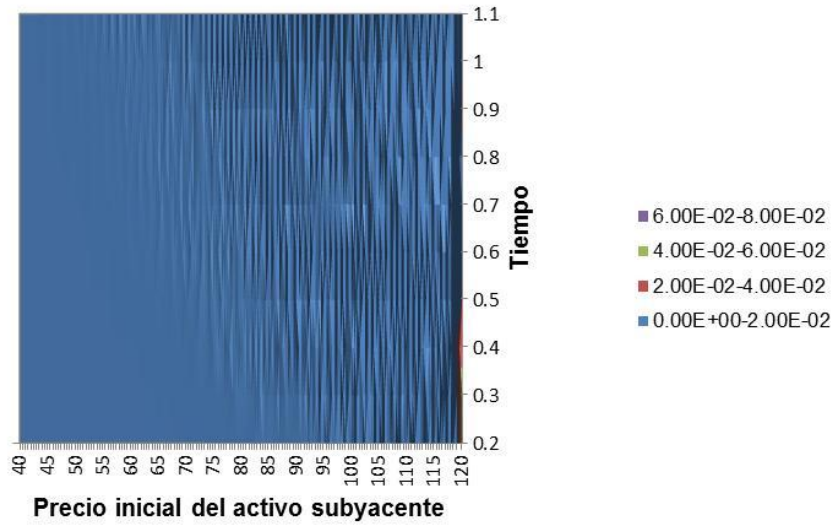
Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.7 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 115.



Fuente: Elaboración propia.

Figura A14.8 Contorno de la variabilidad de los errores absolutos ante cambios en el precio inicial del activo subyacente y en el tiempo de maduración de la opción up-and-out utilizando el Método Derman y una barrera de 120.



Fuente: Elaboración propia.